ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 2, с. 314–322

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ ОБЪЕМНОМ ПРИЛОЖЕНИИ СИЛ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ: УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ (ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ)

© 2019 г. И. А. Солдатенков*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
** e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 04.08.2018 г.
После доработки 29.11.2018 г.
Принята к публикации 25.12.2018 г.

Рассматривается постановка контактной задачи при наличии объемно приложенных сил межмолекулярного взаимодействия контактирующих тел. Предлагается метод оценки контактного зазора, позволяющий существенно упростить расчет контактного взаимодействия в рамках самосогласованного подхода. С использованием полученной оценки контактного зазора выполнен расчет подповерхностных напряжений в упругом полупространстве, контактирующим со сферическим индентором.

Ключевые слова: контактная задача, упругость, межмолекулярное взаимодействие

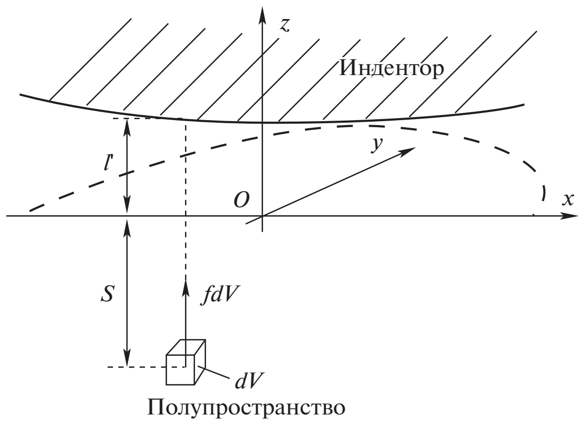
DOI: 10.1134/S0032823519020140

При решении контактных задач с учетом межмолекулярного взаимодействия (адгезии) широко используются упрощающие допущения. Например, используется классическое решение Герца (модели JKR [1] и DMT [2]), применяются кусочно-постоянные аппроксимации потенциала Леннард–Джонса и адгезионного давления [3, 4].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора r между контактирующими телами, величина которого зависит от деформации тел и должна обеспечивать равенство деформационных и межмолекулярных сил на контакте (самосогласованный подход по Дерягину [5]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [6–8]) и объемным (уточненная постановка [9–12]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

Контактная задача в рамках самосогласованного подхода сводится к нелинейному интегральному уравнению относительно контактного зазора r, решение которого может быть получено только в приближенном виде, например, с помощью метода последовательных приближений [5, 8]. Задача существенно упрощается при заранее известном контактном зазоре, например, когда форма индентора обеспечивает постоянство зазора по области контакта [13].

В данной работе в рамках самосогласованного подхода рассматривается контакт гладкого индентора с упругим полупространством при условии, что характерный размер a области контакта (крупномасштабный уровень 1) значительно превышает зазор r (мелкомасштабный уровень 2). Предлагается упрощенный метод расчета такого контакта на основе гипотезы, согласно которой зазор r на уровне 2 определяется контактным давлением, которое находится из решения классической контактной задачи на уровне 1. Выполнена проверка выдвинутой гипотезы. Полученная таким образом



Фиг. 1

оценка контактного зазора используется для расчета объемно приложенных в полупространстве сил межмолекулярного взаимодействия и соответствующего напряженно-деформированного состояния.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим контактное взаимодействие абсолютно жесткого тела (индентора) с упругим полупространством в рамках самосогласованного подхода (фиг. 1). Наличие сил межмолекулярного взаимодействия приводит к существованию некоторого контактного зазора r, обеспечивающего баланс сил межмолекулярного и упругого взаимодействия контактирующих тел [5].

Межмолекулярное взаимодействие индентора и полупространства определяется парными взаимодействиями молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы такой зависимости, среди которых наиболее известен закон Леннард–Джонса [14]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n},$$

где a_1, a_2, m, n – параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7$, $n = 13$.

При определенных допущениях [7, 10, 15] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет рассчитать объемную силу f в полупространстве, обусловленную межмолекулярным взаимодействием, а также силу p воздействия индентора на полупространство, приходящуюся на единицу площади его границы:

$$p(x, y) = \Phi(r(x, y)), \quad \Phi(r) \equiv -\int_0^\infty f(r + s)ds \tag{1.1}$$

Здесь величина $d = r + s$ определяет расстояние от индентора до точки приложения силы f (фиг. 1), сила f направлена вдоль оси z, а определение (1.1) величины p позволяет интерпретировать ее как контактное давление [5–7, 12].

В случае закона Леннард–Джонса функции $f(d)$ и $\Phi(r)$ имеют вид [12] (аналогичные формулы см. также [7, 10, 11])

$$f(d) = \frac{b_1}{d^{m-3}} - \frac{b_2}{d^{n-3}} \equiv \frac{b_1}{d_e^{m-3}}\left[\left(\frac{d_e}{d}\right)^{m-3} - \left(\frac{d_e}{d}\right)^{n-3}\right], \quad d_e = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{1/(m-n)} \tag{1.2}$$

$$-\Phi(r) = \frac{A_1}{r^{m-4}} - \frac{A_2}{r^{n-4}} \equiv \frac{A_1}{r_e^{m-4}}\left[\left(\frac{r_e}{r}\right)^{m-4} - \left(\frac{r_e}{r}\right)^{n-4}\right], \quad r_e = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{1/(m-n)}, \tag{1.3}$$

причем

$$b_1 = \frac{2\pi N N_s a_1}{(m-1)(m-3)}, \quad b_2 = \frac{2\pi N N_s a_2}{(n-1)(n-3)}, \quad A_1 = \frac{b_1}{m-4}, \quad A_2 = \frac{b_2}{n-4},$$

N и N_s – концентрации молекул полупространства и индентора, соответственно. Согласно формуле (1.2), объемные силы f быстро затухают и сконцентрированы в подповерхностном слое нанометровой толщины $\sim d_e$ в пределах области контакта.

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.1) контактное давление прикладывается к границе полупространства, в результате чего оно деформируется [5–8]. Ниже рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация полупространства порождается объемными силами f, распределенными по его глубине, тогда как граница полупространства свободна от нагрузок [9–12].

Рассматриваемое контактное взаимодействие индентора с полупространством описывается следующими уравнениями, в которых зазор $r(x, y)$ выступает в качестве искомой функции [12, 13]:

$$r(x,y) - r(0,0) + w(x,y) - w(0,0) = g(x,y) \text{ – условие контакта} \tag{1.4}$$

$$P = \iint\limits_{D} \Phi(r(x,y))dxdy \text{ – условие равновесия} \tag{1.5}$$

$$w(x,y) = \iint\limits_{D} \Gamma\left(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2};\, r(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta \tag{1.6}$$

– деформационное соотношение

Здесь $w(x, y)$ – нормальное (по оси z) перемещение границы полупространства, P – нормальная нагрузка на индентор, D – область контакта, $g(x, y)$ – форма индентора, $g(0,0) = 0$

$$\Gamma(\rho; r) = \frac{1+\nu}{2\pi E}[(3-2\nu)\Lambda_1(\rho,r) + \Lambda_2(\rho,r)]$$
$$\Lambda_{\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}}(\rho,r) = \int_0^\infty \left\{\begin{matrix} f(r+s) \\ sf'(r+s)\end{matrix}\right\} \frac{ds}{\sqrt{\rho^2+s^2}} \tag{1.7}$$

E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полупространства. Величина $\Gamma(\rho; r)$ представляет собой функцию влияния (Грина), определяющую нормальное перемещение границы полупространства от локального воздействия индентора, при этом зазор r выступает в качестве характеристики этого воздействия.

Заметим, что при наличии контактного зазора, обусловленного межмолекулярным взаимодействием, область контакта D определяется однозначно только для индентора ограниченного (в плоскости z) размера [8, 13]. В случае произвольного индентора его взаимодействие с полупространством может распространяться на всю границу полупространства и область контакта D можно определить только условно, например, как область с положительными значениями контактного давления p, определяемого по формуле (1.1). Если характерный размер a такой области значительно превышает зазор r, то такое определение области контакта D будет достаточно корректным ввиду быстрого затухания межмолекулярного взаимодействия вне области D.

Далее будет дана априорная оценка зазора r в предположении его малости по сравнению с характерным размером a области контакта:

$$r(x, y) \ll a \tag{1.8}$$

Условие (1.8) позволяет для задачи (1.4)–(1.6) выделить крупномасштабный уровень 1 и мелкомасштабный уровень 2, характеризуемые размерами a и r, соответственно. На масштабном уровне 1 взаимодействие индентора с полупространством будем рассматривать в терминах классической контактной задачи, пренебрегая зазором r. Соответствующие контактное давление $p_c(x, y) \geq 0$ и область контакта D_c считаются известными.

Существование контактного зазора будем учитывать на масштабном уровне 2, при этом найденное на уровне 1 распределение $p_c(x, y)$ используется в качестве контактного давления $p(x, y)$, связанного с зазором $r(x, y)$ первым равенством (1.1). Другими словами, допустим, что $p(x, y) = p_c(x, y)$ и определим соответствующий зазор $r_c(x, y)$ из уравнения

$$p_c(x, y) = \Phi(r_c(x, y)), \quad x, y \in \mathrm{D}_c \tag{1.9}$$

По определению (1.3) функция $\Phi(X)$ – монотонная при $X > 0$, поэтому при положительных значениях p_c уравнение (1.9) однозначно разрешимо относительно r_c.

Величина $r_c(x, y)$ представляет собой искомую оценку контактного зазора. Наличие такой оценки позволяет избежать прямого решения задачи (1.4)–(1.6), которое представляется весьма проблематичным ввиду присутствия нелинейного интегрального оператора (1.6).

В описанном выше методе оценки контактного зазора центральным является допущение $p(x, y) = p_c(x, y)$ (далее, гипотеза С). В следующем разделе будет выполнена

2. Проверка гипотезы С. Обозначим через $g_c(x, y)$ левую часть условия контакта (1.4) при подстановке в нее величины $r_c(x, y)$ в качестве контактного зазора:

$$g_c(x, y) = r_c(x, y) - r_c(0, 0) + w_c(x, y) - w_c(0, 0), \quad x, y \in \mathrm{D}_c, \tag{2.1}$$

причем, в силу соотношения (1.6)

$$w_c(x, y) = \iint\limits_{\mathrm{D}_c} \Gamma(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}; r_c(\xi, \eta)) d\xi d\eta \tag{2.2}$$

Функцию $g_c(x, y)$ можно интерпретировать как некоторую эффективную форму индентора, обеспечивающую выполнение условия контакта (1.4) при использовании в качестве контактного зазора оценки $r_c(x, y)$. Если бы функция $r_c(x, y)$ представляла собой точное решение задачи (1.4)–(1.6), то эффективная форма $g_c(x, y)$ совпадала бы с заданной формой $g(x, y)$ индентора. Расхождение этих форм характеризует степень согласованности задачи при использовании оценки $r_c(x, y)$ в качестве контактного зазора и может служить мерой правомерности гипотезы С.

Отметим, что условие равновесия (1.5) для зазора $r_c(x, y)$ выполняется точно в силу равенства (1.9) и определения контактного давления $p_c(x, y)$ как решения классической контактной задачи для индентора, нагруженного силой P.

Далее будет рассматриваться осесимметричный случай сферического индентора радиуса R:

$$g(x, y) \equiv g(\rho) = \frac{1}{2R}\rho^2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2.3}$$

для которого близость эффективной формы $g_c(x, y) \equiv g_c(\rho)$ к заданной форме $g(\rho)$ и, следовательно, правомерность гипотезы C можно охарактеризовать показателем

$$\varepsilon = \frac{1}{S_g}\int_0^a |g(\rho) - g_c(\rho)|\,d\rho, \quad S_g = \int_0^a |g(\rho)|\,d\rho \tag{2.4}$$

Для сферического индентора [16]:

$$p_c(x, y) \equiv p_c(\rho) = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)R}\sqrt{a^2 - \rho^2}, \quad a = \left(\frac{3(1-\nu^2)RP}{4E}\right)^{1/3} \tag{2.5}$$

область контакта D_c представляет собой круг радиуса a. Соответствующий зазор $r_c(x, y) \equiv r_c(\rho)$ находится из уравнения (1.9): $p_c(\rho) = \Phi(r_c(\rho))$, $\rho \in [0, a]$.

В случае круговой области D_c, используя полярную систему координат ρ, φ, выражение (2.2) можно представить в виде

$$w_c(x, y) \equiv w_c(\rho) = \int_0^a ldl\int_0^{2\pi} d\varphi\Gamma(L(\rho, l, \varphi); r_c(l)), \quad L(\rho, l, \varphi) = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l\cos\varphi} \tag{2.6}$$

В свою очередь, учитывая представления (1.2) и (1.7) для функций $f(d)$ и $\Gamma(\rho; r)$ и выполняя интегрирование по φ, выражение (2.6) можно преобразовать и установить, что

$$w_c(\rho) = \frac{2(1+\nu)}{\pi E}\left\{b_1\int_0^a [4rN_5 - (1+2\nu)N_4]\,ldl - b_2\int_0^a [10rN_{11} - (7+2\nu)N_{10}]\,ldl\right\}, \tag{2.7}$$

где

$$N_m = \int_0^\infty \frac{\mathbf{K}(k)\,ds}{(r_c(l)+s)^m\sqrt{(\rho+l)^2+s^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{4\rho l}{(\rho+l)^2+s^2}}, \tag{2.8}$$

$\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода. Интегралы (2.7) и (2.8) могут быть определены с помощью известных численных методов.

На основе выражений (2.1), (2.4) и (2.7) были проведены расчеты эффективной формы $g_c(\rho)$ и соответствующего показателя ε при следующих значениях параметров задачи:

$$E = 10^8 \text{ Па}, \quad \nu = 0.3, \quad R = 1 \text{ мкм}, P, \text{ нН} = 5\,(1),\ 10\,(2),\ 20\,(3),\ 50\,(4)$$

Выбранным вариантам нагружения отвечают значения

$$a, \text{ нм} \approx 32.436\,(1),\ 40.866\,(2),\ 51.489\,(3),\ 69.881\,(4)$$

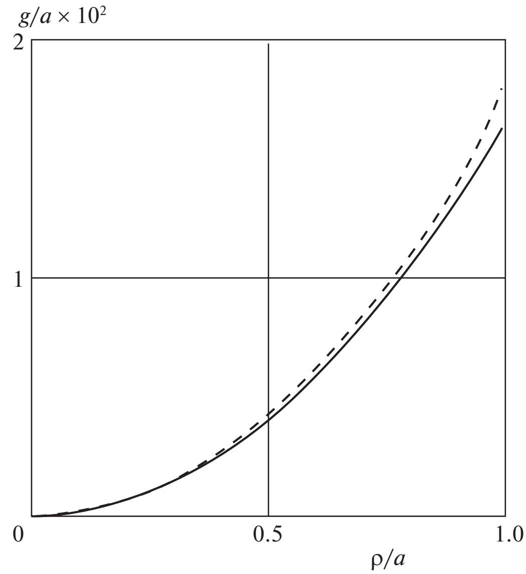
$$r_c(0), \text{ нм} \approx 0.94935\,(1),\ 0.94018\,(2),\ 0.92996\,(3),\ 0.91486\,(4),$$

которые удовлетворяют условию (1.8). Параметры $b_{1,2}$ межмолекулярного взаимодействия при расчетах принимались такими, что в формуле (1.3) $r_e = 1$ нм, $A_1 = (6\pi)^{-1}A_H$; $A_H = 10^{-19}$ Дж – постоянная Гамакера [5, 13].

Расчетные значения показателя ε составили: 0.0557 (1), 0.04026 (2), 0.02894 (3), 0.01881 (4). Как видно, особенно малые значения показатель ε имеет при больших нагрузках P и, следовательно, больших размерах a области контакта (варианты 3 и 4), когда условие (1.8) выполняется в полной мере.

Полученные значения ε свидетельствуют о незначительном отличии эффективной формы индентора от заданной. Это иллюстрируется фиг. 2, на которой для варианта 1 нагружения изображены функции $g_c(\rho)$ (штриховая линия) и $g(\rho)$ (сплошная линия).

Таким образом, выполненный анализ позволяет сделать заключение о допустимости использования гипотезы C для оценки контактного зазора при условии (1.8).



Фиг. 2

3. Расчет подповерхностных напряжений. Как указывалось выше, при рассматриваемой постановке задачи деформация полупространства обуславливается распределение объемных сил $f(r(x, y) + s)$ по его глубине s. Вклад каждой силы fdV (фиг. 1) в напряженно-деформированное состояние (НДС) полупространства может быть определен с помощью решения Миндлина о внутренней сосредоточенной силе [17]. Суммирование этих вкладов по всему распределению объемных сил позволяет рассчитать НДС полупространства [13, 18].

Далее будет рассматриваться осесимметричный случай сферического индентора (2.3) и использоваться цилиндрическая система координат ρ, φ, z, ось z которой направлена внутрь полупространства [16, 17]. Соответствующие ненулевые компоненты перемещений и тензора напряжений будут обозначаться через u, w, σ_ρ, σ_φ, σ_z, $\tau_{\rho z}$. Указанная выше процедура расчета НДС полупространства в таком случае приводит к следующим результатам:

$$\begin{gathered} u(\rho, z) = c\int_0^a ldl\int_0^{2\pi} E_{10}(\rho, z, l, \varphi)d\varphi, \quad w(\rho, z) = c\int_0^a ldl\int_0^{2\pi} E_{20}(\rho, z, l, \varphi)d\varphi \\ u_{\left\{\substack{,\rho \\ ,z}\right\}}(\rho, z) = c\int_0^a ldl\int_0^{2\pi} E_{\left\{\substack{11 \\ 12}\right\}}(\rho, z, l, \varphi)d\varphi, \quad w_{\left\{\substack{,\rho \\ ,z}\right\}}(\rho, z) = c\int_0^a ldl\int_0^{2\pi} E_{\left\{\substack{21 \\ 22}\right\}}(\rho, z, l, \varphi)d\varphi, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где запятая перед индексом ρ или z обозначает соответствующую частную производную,

$$\begin{gathered} E_{10} = \rho_* U, \quad E_{20} = W, \quad E_{11} = U + \frac{\rho_*^2}{L}U_{,L}, \quad E_{12} = \rho_* U_{,z} \\ E_{21} = \frac{\rho_*}{L}W_{,L}, \quad E_{22} = W_{,z}; \quad \rho_* = \rho - l\cos\varphi \\ \left\{\begin{matrix} U(L, z, l) \\ W(L, z, l) \end{matrix}\right\} = -\int_0^\infty f(r(l) + s)\hat{M}_{\left\{\substack{1 \\ 2}\right\}}(L, z; s)ds, \quad c = \frac{1 + \nu}{8\pi(1 - \nu)E} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Функции $\hat{M}_{1,2}$ определяют поле перемещений u, w в полупространстве при действии в нем сосредоточенной силы F_z, приложенной в точке $\rho = 0$, $z = s$ и направленной по оси z (задача Миндлина [17]), так что

$$u(\rho, z) = c\rho\hat{M}_1(\rho, z; s)F_z, \quad w(\rho, z) = c\hat{M}_2(\rho, z; s)F_z$$

Производные $U_{,L}$, $U_{,z}$, $W_{,L}$, $W_{,z}$ находятся путем внесения операции дифференцирования под знак интеграла (3.2) – правомерность такого действия может быть установлена для $z > 0$.

Поле перемещений (3.1) позволяет на основе закона Гука определить компоненты тензора напряжений для рассматриваемого осесимметричного случая [19]:

$$\sigma_\rho = \lambda\theta + 2\mu u_{,\rho}, \quad \sigma_\varphi = \lambda\theta + 2\mu\frac{u}{\rho}, \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu w_{,z}, \quad \tau_{\rho z} = \mu(u_{,z} + w_{,\rho}), \tag{3.3}$$

причем

$$\theta = u_{,\rho} + u/\rho + w_{,z}, \quad \lambda = [(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}\nu E, \quad \mu = [2(1+\nu)]^{-1}E$$

Располагая компонентами тензора напряжений, можно определить интенсивность касательных напряжений и удельную потенциальную энергию деформаций

$$\begin{gathered}\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2]^{1/2}\\ \Pi = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)],\end{gathered} \tag{3.4}$$

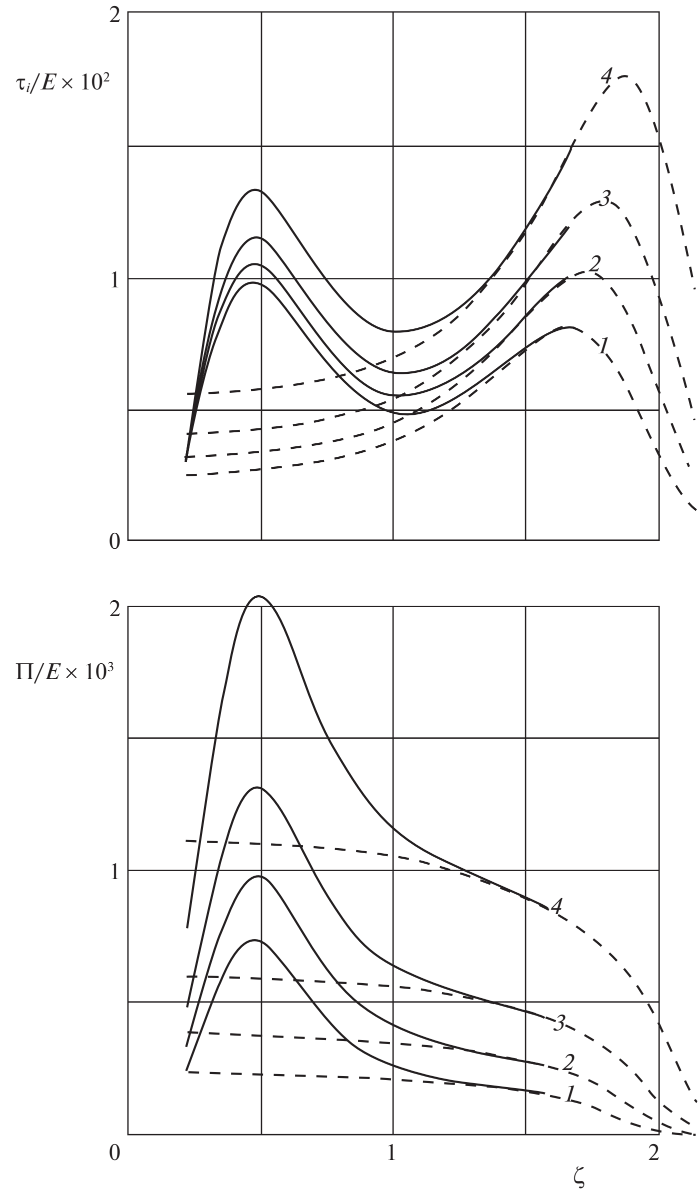
которые используются в некоторых критериях пластического течения и разрушения материалов [20]. Здесь σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения, которые выражаются известным образом через компоненты σ_ρ, σ_φ, σ_z, $\tau_{\rho z}$ [19]. Например, при $\rho = 0$: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\rho$, $\sigma_3 = \sigma_z$.

На основе формул (3.1)–(3.4) были выполнены расчеты величин τ_i и Π, при этом в качестве контактного зазора использовалась полученная выше оценка $r_c(\rho)$. Расчеты проводились при указанных в разделе 2 значениях параметров задачи.

На фиг. 3 показаны распределения величин τ_i и Π по глубине $z > 0$ полупространства при $\rho = 0$. Для того чтобы иметь возможность изобразить на одном графике особенности рассматриваемых величин при малых и больших значениях z/r_e, здесь используется переменная $\zeta = [\ln(1 + z/r_e)]^{1/2}$. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют выбранным в разд. 2 вариантам нагружения. Решению (2.5) классической контактной задачи отвечают напряжения, распределения которых по глубине полупространства описываются известными формулами [16, 21]. Величины τ_i и Π, рассчитанные на основе этих формул, представлены на фиг. 3 штриховыми кривыми.

Выполненные расчеты свидетельствуют о существенном различии напряженных состояний в тонком (толщина $\sim r_e$) подповерхностном слое полупространства при классической постановке контактной задачи (фиг. 3, штриховые кривые) и при самосогласованном подходе с объемным приложением межмолекулярных сил (сплошные кривые). Это согласуется с ранее полученными результатами [11, 13].

Важная особенность распределений по глубине полупространства величин τ_i и Π, связанных с разрушением материала – наличие у них при самосогласованном подходе дополнительных локальных максимумов, отсутствующих при классической постановке. Как показывают расчеты, значения этих максимумов существенно зависят от контактной нагрузки P. Таким образом, использование самосогласованного подхода поз-



Фиг. 3

воляет прогнозировать существование дополнительных очагов разрушения в полупространстве.

4. Выводы.

1. Предложен и обоснован метод оценки контактного зазора, использующий концепцию двух масштабных уровней и позволяющий существенно упростить расчет контактного взаимодействия в рамках самосогласованного подхода.

2. С использованием полученной оценки контактного зазора выполнен расчет подповерхностных напряжений в упругом полупространстве, контактирующим со сферическим индентором при различных нагрузках.

3. Показано, что использование самосогласованного подхода с объемным приложением межмолекулярных сил позволяет прогнозировать существование дополнительных очагов подповерхностного разрушения материала.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310379-5) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-58-52030, 18-08-00558).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
2. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
3. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 279–279.
4. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Adhesion effects in contact interaction of solids // CR Mecanique. 2008. V. 336. № 1–2. P. 118–125.
5. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Coll. Interface Sci. 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
6. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
7. *Greenwood J.A.* Adhesion of small spheres // Phil. Mag. 2009. V. 89. № 11. P. 945–965.
8. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
9. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.
10. *Sauer R.A., Wriggers P.* Formulation and analysis of a three-dimensional finite element implementation for adhesive contact at the nanoscale // Computer Methods Appl. Mech. Engng. 2009. V. 198. № 49–52. P. 3871–3883.
11. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // J. Mech. Phys. Solids. 2013. V. 61. № 6. P. 1377–1390.
12. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
13. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: особенности подповерхностных напряжений // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 6. С. 733–745.
14. *Kaplan I.G.* Intermolecular interactions: physical picture, computational methods and model potentials. Chichester: Wiley, 2006.
15. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. 3-rd ed. London: Academic, 2011.
16. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1982.
17. *Mindlin R.D.* Force at a point in the interior of a semi-infinite solid // Phys. 1936. V. 7. № 5. P. 195–202.
18. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: функция влияния для неоднородного упругого полупространства // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 358–371.
19. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985.
20. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention. N.Y.: The Ohio State University, John Wiley & Sons, 1981.
21. *Terazawa K.* On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid under given boundary conditions, with some applications // J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo. 1916. V. 37. Art. 7. P. 1–64.