ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 2, с. 249–264

УДК 517.958 + 539.3:534.1

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

© 2019 г. Х. Г. Умаров*

Академия наук Чеченской Республики, Грозный, Россия
** e-mail: umarov50@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.06.2018 г.
После доработки 06.12.2018 г.
Принята к публикации 25.12.2018 г.

Для дифференциального уравнения крутильных колебаний бесконечного нелинейно-упругого стержня исследуется разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси. Получен явный вид решения соответствующего линейного уравнения в частных производных. Найден временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

Ключевые слова: крутильные колебания, нелинейные уравнения соболевского типа, глобальная разрешимость, разрушение решения

DOI: 10.1134/S0032823519020164

1. Введение. Крутильные волны в нелинейно-упругом стержне моделируются ([1], гл. 3, § 3.3 и формула (П.18) из обзора, приведенного в приложении) уравнением соболевского типа, не разрешенным относительно временной производной второго порядка:

$$\mathrm{D}u = \beta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3; \quad \mathrm{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}$$
$$(x,t)\in R^1\times R^1_+, \quad R^1 =]-\infty,+\infty[, R^1_+ =]0,+\infty[; \quad \alpha\in R^1_+, \quad \beta\in R^1 \tag{1.1}$$

Отметим, что после замены

$$\tilde{t} = c_1 t\sqrt{I_0/I_\varphi}, \quad \tilde{x} = x\sqrt{I_0/I_\varphi}, \quad u = \theta\sqrt{I_0/I_\varphi}$$

в уравнении крутильных колебаний [1]

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{I_\varphi}{I_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) = 0,$$

параметр $\alpha = c_0/c_1$ в уравнении (1.1) равен отношению скоростей продольных c_0 и крутильных c_1 волн.

Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x), \quad x\in R^1 \tag{1.2}$$

полагая, что начальные функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ и искомое классическое решение

$$u = u(x,t), \quad (x,t)\in R^1\times\overline{R}^1_+, \quad \overline{R}^1_+ = [0,+\infty[$$

для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат банахову пространству $C[-\infty,+\infty] \equiv C[R^1]$ (с нормой $\|g(x)\|_C = \sup_{x\in R^1}|g(x)|$) — множеству непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Наряду с уравнением (1.1) будем рассматривать уравнение, получающееся из (1.1) заменой $u_x = v$ и последующим дифференцированием обеих его частей:

$$\mathrm{D}v^3 = \beta\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

Цель исследования – для случая $\beta = 0$, т.е. для соответствующего (1.1) линейного уравнения, найти явный вид решения задачи Коши, а в случае $\beta \neq 0$ найти временной отрезок существования классического решения задачи Коши и оценить норму в $C[R^1]$ этого локального решения уравнения (1.3), далее рассмотреть условия существования глобального (определенного для $t \in \overline{R}^1_+$) решения уравнения (1.1) и разрушения его решения на конечном временном отрезке.

Замечание 1. Выбор пространства $C[R^1]$ и его подмножеств

$$C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1]: g'(x),\ldots,g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$$

обоснован тем, что дифференциальный оператор d/dx с областью определения $D(d/dx) = C^{(1)}[R^1]$ является ([2], гл. 8, § 1; [3], § 1.3) производящим оператором группы класса C_0 левых сдвигов:

$$U\left(t;\frac{d}{dx}\right)g(x) = g(x+t), \quad t \in R^1,$$

а оператор d^2/dx^2, $D(d^2/dx^2) = C^{(2)}[R^1]$, порождает [2] полугруппу класса C_0:

$$U\left(t;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)d\xi, \quad t \geq 0$$

Положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит [2] резольвентным множествам операторов d/dx, d^2/dx^2 и для соответствующих резольвент справедливы оценки

$$\left\|\left(\lambda I - \frac{d}{dx}\right)^{-1}\right\|, \quad \left\|\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

где I – тождественный оператор.

2. Задача Коши для линейного уравнения крутильных волн. В линейном однородном уравнении[1]

$$\mathrm{D}u = 0 \tag{2.1}$$

введем новую неизвестную функцию

$$w = u - u_{xx} \tag{2.2}$$

полагая, что частные производные u_{xx}, u_{xxt} непрерывны при $t \geq 0$. Используя существование и представление [2] линейного ограниченного оператора $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, из замены (2.2) можно единственным образом определить начальные значения функции $w = w(x,t)$:

$$t = 0: \quad w = w_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x), \quad w_t = w_1(x) = \psi(x) - \psi''(x)$$

[1] Были получены [4] условия разрешимости задачи Коши для линейных строго псевдогиперболических уравнений, частный случай которых – так называемое уравнение Релея–Бишопа (2.1)

при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[R^1]$, и выразить решение $u(x,t)$ задачи Коши (1.1), (1.2) через новую неизвестную функцию $w(x,t)$:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{-s} U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) w(x,t) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|r|} w(x+r,t) dr \tag{2.3}$$

В результате замены (2.2) уравнение (2.1) в пространстве $C[R^1]$ можно записать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = K_0 W, \quad t \in R^1_+, \quad K_0 = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \frac{d^4}{dx^4}\right), \tag{2.4}$$

где $W = W(t)\colon t \to w(x,t)$ – искомая вектор-функция, определенная для $t \in \overline{R}^1_+$ и со значениями в пространстве $C[R^1]$. Операторный коэффициент в уравнении (2.4) – линейный оператор K_0, определен на функциях $g(x) \in C^{(4)}[R^1]$, и его можно продолжить до оператора

$$K = \alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha^2 - 1)\left[I - \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right], \quad D(K) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

Таким образом, получим эквивалентное (2.1) интегро-дифференциальное уравнение

$$w_{tt} = \alpha^2 w_{xx} + (\alpha^2 - 1)(w - h * w); \quad h = 2^{-1} e^{-|x|}, \tag{2.5}$$

в котором через $\varphi * \psi$ обозначена свертка

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - \xi)\psi(\xi) d\xi$$

функций из $C[R^1]$.

Дальнейшее рассмотрение разобьем на три случая: $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$.

Случай $\alpha = 1$. Уравнение (2.5) вырождается в классическое гиперболическое уравнение, решение которого находится по формуле Даламбера

$$w(x,t) = 2^{-1}\left[w_0(x - t) + w_0(x + t)\right] + 2^{-1} \int_{x-t}^{x+t} w_1(s) ds, \tag{2.6}$$

если начальная функция $w_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $w_1(x)$ – до первого. Эти условия будут выполнены, если

$$\varphi(x) \in C^{(4)}[R^1], \quad \psi(x) \in C^{(3)}[R^1]$$

В этом случае из соотношений (2.3) и (2.6) имеем

$$u(x,t) = 2^{-1}\left[\varphi(x - t) + \varphi(x + t)\right] + 2^{-1} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds \tag{2.7}$$

Случай $\alpha > 1$ и $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Оператор K запишем в виде

$$K = A + \alpha_1^2 I + B_1; \quad A = \alpha^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad B_1 = -\alpha_1^2 \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$$

Оператор A, $D(A) = D(d^2/dx^2)$, порождает в пространстве $C[R^1]$ ([3], § 1.5) косинус оператор-функцию $C(t; A)$, $t \in R^1$, класса C_0, для которой на произвольном элементе $g(x) \in C[R^1]$ справедливо представление

$$C(t; A)g(x) = \frac{1}{2}\left[U\left(\alpha t; \frac{d}{dx}\right) + U\left(-\alpha t; \frac{d}{dx}\right)\right]g(x) = [g(x \pm \alpha t)]_2, \tag{2.8}$$

где обозначено

$$[g(x \pm \alpha t)]_2 \equiv 2^{-1}[g(x - \alpha t) + g(x + \alpha t)]$$

и оценка нормы

$$\|C(t; A)\| \le 1, \quad t \in R^1 \tag{2.9}$$

Возмущенный оператор

$$A + \alpha_1^2 I, \quad D(A + \alpha_1^2 I) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

также порождает в $C[R^1]$ ([3], § 8.1) косинус оператор-функцию $C(t; A + \alpha_1^2 I)$, $t \in R^1$, класса C_0, для которой, при всех $g(x) \in C[R^1]$, справедливо представление

$$C(t; A + \alpha_1^2 I)g(x) = C(t; A)g(x) + \alpha_1 t\int_0^t I_1(\alpha_1\sqrt{t^2 - s^2})C(s; A)g(x)\frac{ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}, \tag{2.10}$$

где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя ([5], прилож. 2.10), и оценка нормы

$$\left\|C(t; A + \alpha_1^2 I)\right\| \le \operatorname{ch}(\alpha_1 t), \quad t \in R^1$$

Ограниченный оператор B_1, $D(B_1) = C[R^1]$, является в $C[R^1]$ производящим оператором косинус оператор-функции $C(t; B_1)$, $t \in R^1$, класса C_0, которая для произвольного элемента $g(x) \in C[R^1]$ представляется ([3], § 4.2) степенным рядом

$$C(t; B_1)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}B_1^n g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\alpha_1 t)^{2n}}{(2n)!}\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-n} g(x) \tag{2.11}$$

равномерно сходящимся по t на каждом конечном отрезке из R^1. Из представления (2.11) выводим

$$\|C(t; B_1)\| \le \operatorname{ch}(\alpha_1 t), \quad t \in R^1$$

Используя формулу [2], выражающую степени резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-n}$ через полугруппу, порождаемую оператором d^2/dx^2:

$$\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-n} g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} s^{n-1}e^{-s}U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)ds \tag{2.12}$$

преобразуем представление (2.11):

$$C(t; B_1)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha_1 t)^2}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s}\,{}_0F_2\left(;\frac{3}{2}, 2; -\frac{(\alpha_1 t)^2}{4}s\right)U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)ds, \tag{2.13}$$

где ${}_0F_2(;3/2,2;-z/4)$ — обобщенная гипергеометрическая функция ([6], гл. 7, § 7.2.3). Применяя интегральное представление полугруппы $U(s;d^2/dx^2)$, формуле (2.13) можно придать вид

$$C(t;B_1)g(x) = g(x) - \frac{(\alpha_1 t)^2}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 t)^2,\xi^2)g(x+\xi)d\xi, \quad t\in R^1$$
$$F_0(z,\xi^2) = \int_0^{+\infty} e^{-s-\xi^2/(4s)}\,{}_0F_2\left(;\frac{3}{2},2;-\frac{zs}{4}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}} \tag{2.14}$$

Возмущение ограниченным оператором B_1 сохраняет способность оператора $A+\alpha_1^2 I$ порождать косинус оператор-функцию класса C_0 ([3], § 8.2), поэтому оператор K является производящим оператором косинус оператор-функции класса C_0, для которой на элементах $g(x)\in D(A)$ и для всех $t\in R^1$ справедливо представление

$$C(t;K)g(x) = C(t;A+\alpha_1^2 I)g(x) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 j_1(t\sqrt{1-\zeta^2},A+\alpha_1^2 I)C(t\zeta;B_1)g(x)d\zeta$$
$$j_1(t,A+\alpha_1^2 I)g(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}C(t\eta;A+\alpha_1^2 I)g(x)d\eta \tag{2.15}$$

Используя формулы (2.8), (2.10), (2.14), косинус оператор-функцию $C(t;K)g(x)$ записываем в явном виде на функциях $g(x)\in D(d^2/dx^2)$:

$$\begin{aligned}
C(t;K)g(x) &= [g(x\pm\alpha t)]_2 + \alpha_1 t\int_0^t I_1(\alpha_1\sqrt{t^2-s^2})[g(x\pm\alpha s)]_2\frac{ds}{\sqrt{t^2-s^2}} + \\
&+ \frac{2t^2}{\pi}\int_0^1 d\zeta\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}\Bigg\{[g(x\pm\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 - \\
&- \frac{(\alpha_1 t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 t\zeta)^2,\xi^2)[g(x+\xi\pm\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\xi + \\
&+ \alpha_1 t\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1(\alpha_1\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2})\Bigg\{[g(x\pm\alpha s)]_2 - \\
&- \frac{(\alpha_1 t\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 t\zeta)^2,\xi^2)[g(x+\xi\pm\alpha s)]_2 d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{t^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Используя табличные интегралы ([7], гл. 2, § 2.4.2; [5], гл. 2, § 2.15.9; [5], прилож. 2.10), оценим норму косинус оператор-функции (2.16):

$$\begin{aligned}
\|C(t;K)\| &\le \operatorname{ch}(\alpha_1 t) + \frac{2t^2}{\pi}\int_0^1 \operatorname{ch}(\alpha_1 t\zeta)d\zeta\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}\operatorname{ch}(\alpha_1 t\eta\sqrt{1-\zeta^2})d\eta \le \\
&\le \operatorname{ch}(\alpha_1 t) + \frac{1}{\alpha_1^2}\operatorname{sh}(\alpha_1 t(\sqrt{2}-1))\operatorname{sh}(\alpha_1 t(\sqrt{2}+1))
\end{aligned} \tag{2.17}$$
$$t\in R^1$$

С косинус оператор-функцией (2.16) ассоциируют ([3], § 1.4) синус оператор-функцию

$$S(t;K)g(x) = \int_0^t C(r;K)g(x)dr, \quad g(x)\in C[R^1] \tag{2.18}$$

и линейное многообразие

$$C_1[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : C(t;K)g(x) \in C^{(1)}(R^1;C[R^1])\},$$

т.е. подмножество $C_1[R^1] \subset C[R^1]$ состоит из тех функций из $C[R^1]$, для которых $C(t;K)g(x) : R^1 \to C[R^1]$ – непрерывно дифференцируемая функция переменной t. Очевидно, что

$$D(K) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) \subset C_1[R^1]$$

Используя оценку (2.17), имеем

$$\|S(t;K)\| \le \frac{|\mathrm{sh}(\alpha_1 t)|}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1^3}\left|\frac{\mathrm{sh}(2\alpha_1 t\sqrt{2})}{\sqrt{2}} - \mathrm{sh}(2\alpha_1 t)\right| \tag{2.19}$$

Случай $\alpha < 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{1-\alpha^2}$. Оператор K запишем в виде

$$K = A + B_2; \quad B_2 = \alpha_2^2\left[\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} - I\right]$$

Ограниченный оператор B_2, $D(B_2) = C[R^1]$, является производящим оператором косинус оператор-функции $C(t;B_2)$, $t \in R^1$, класса C_0, которая для произвольного элемента $g(x) \in C[R^1]$ представляется степенным рядом

$$C(t;B_2)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha_2 t)^{2n}}{(2n)!}\left[\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} - I\right]^n g(x) \tag{2.20}$$

равномерно сходящимся по t на каждом конечном отрезке из R^1. Из равенства (2.20) выводим

$$\|C(t;B_2)\| \le \mathrm{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2}), \quad t \in R^1$$

Применяя формулу бинома Ньютона и затем представление (2.12), имеем

$$\begin{gathered} C(t;B_2)g(x) = g(x) + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\alpha_2 t)^{2n}}{(2n)!}\left[(-1)^n g(x) + \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\frac{(-1)^k s^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\right)e^{-s}U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)ds\right] = \\ = \cos(\alpha_2 t)g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\alpha_2 t)^{2n}}{(2n)!(n-1)!}\int_0^{+\infty}\Psi(1-n,2;s)e^{-s}U\left(s;\frac{d^2}{dx^2}\right)g(x)ds, \end{gathered} \tag{2.21}$$

где $\Psi(a,b;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми ([6], гл. 7, § 7.2.2). В рассматриваемом случае ([6], гл. 7, § 7.11.4)

$$\Psi(-m,n+1;z) = (-1)^m m!\,L_m^n(z),$$

где $L_m^n(z)$ – обобщенные многочлены Лагерра ([5], прилож. 2.11).

Используя интегральное представление полугруппы $U(s;d^2/dx^2)$, из равенства (2.21) выводим

$$\begin{gathered} C(t;B_2)g(x) = \cos(\alpha_2 t)g(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_0((\alpha_2 t)^2,\xi^2)g(x+\xi)d\xi \\ \Psi_0((\alpha_2 t)^2,\xi^2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\alpha_2 t)^{2n}}{(2n)!(n-1)!}\int_0^{+\infty}e^{-s-\xi^2/(4s)}\Psi(1-n,2;s)\frac{ds}{\sqrt{s}} \end{gathered} \tag{2.22}$$

Косинус оператор-функция класса C_0, порождаемая оператором $K = A + B_2$, на элементах $g(x) \in D(A)$ представляется формулами (2.15), в которых следует положить $\alpha_1 = 0$ и заменить B_1 на B_2. Отсюда, применяя формулы (2.8) и (2.22), получаем явный вид косинус оператор-функции $C(t; K)g(x)$ на функциях $g(x) \in D(d^2/dx^2)$:

$$C(t;K)g(x) = [g(x \pm \alpha t)]_2 +$$
$$+ \frac{2t^2}{\pi}\int_0^1 \cos(\alpha_2 t\zeta)d\zeta\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}[g(x \pm \alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\eta +$$
$$+ \frac{t^2}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^1 d\zeta\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}d\eta\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0((\alpha_2 t)^2, \xi^2)[g(x + \xi \pm \alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\xi \tag{2.23}$$

Используя оценку (2.9), оценим норму косинус оператор-функции (2.23):

$$\|C(t;K)\| \le 1 + \frac{2t^2}{\pi}\int_0^1 \operatorname{ch}(\alpha_2 t\zeta\sqrt{2})d\zeta\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2}d\eta \le 1 + t\frac{\sqrt{2}}{\pi\alpha_2}\operatorname{sh}(\alpha_2 t\sqrt{2}) \tag{2.24}$$

Синус оператор-функция $S(t; K)$, порождаемая оператором K, в рассматриваемом случае допускает оценку

$$\|S(t;K)\| \le |t| + \frac{1}{\pi\alpha_2^3\sqrt{2}}\left|\alpha_2 t\sqrt{2}\operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2}) - \operatorname{sh}(\alpha_2 t\sqrt{2})\right|, \quad t \in R^1 \tag{2.25}$$

Таким образом, во всех трех случаях задания параметра α приходим к абстрактному дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение (2.4) в пространстве $C[R^1]$:

$$W_{tt} = KW, \quad t \in R^1_+, \tag{2.26}$$

в котором оператор K порождает косинус оператор-функцию класса C_0. Начальные условия в $C[R^1]$ для уравнения (2.26) перепишутся в виде

$$t = 0{:}\ W = \Phi, \quad W_t = \Psi, \quad \Phi = \varphi(x) - \varphi''(x), \quad \Psi = \psi(x) - \psi''(x) \tag{2.27}$$

где Φ и Ψ – элементы пространства $C[R^1]$.

Для того чтобы задача Коши (2.26), (2.27) была равномерно корректной на $\overline{R}^1_+$, необходимо и достаточно, чтобы оператор K был производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0; при этом классическое решение задачи Коши (2.26), (2.27) дается формулой ([3], § 1.4)

$$W(t) = C(t;K)\Phi + S(t;K)\Psi, \quad t \in R^1$$

для любых $\Phi \in D(K)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$.

Замечание 2. Задача Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \overline{R}^1_+; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \tag{2.28}$$

в банаховом пространстве E называется равномерно корректной ([3], § 1.2), если: найдется плотное подмножество $E_1 \subset E$ такое, что при $u^0, u^1 \in E_1$ существует единственное решение на $\overline{R}^1_+$ и это решение равномерно устойчиво по t на любом компакте $P \subset \overline{R}^1_+$, т.е. из условия $u_n^m \to 0$ ($u_n^m \in E_1$, $m = 0,1$) при $n \to \infty$ следует сходимость соответствующих решений $u_n(t) \to 0$ равномерно по $t \in P$, где $u_n^{(m)}(0) = u_n^m$, $m = 0,1$.

Замечание 3. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(t)\colon \bar{R}^1_+ \to E$, т.е. $u(t) \in C^{(2)}(\bar{R}^1_+; E)$, называется классическим решением абстрактной задачи Коши (2.28), если $u(t) \in D(A)$, $Au(t) \in C(\bar{R}^1_+; E)$ при $t \in \bar{R}^1_+$ и удовлетворяются равенства (2.28).

Теперь, производя обратную замену (2.3) и используя перестановочность резольвенты $(I - d^2/dx^2)^{-1}$ с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором K, находим решение задачи Коши для уравнения (2.1)

$$u = (I - d^2/dx^2)^{-1} W(t) = C(t; K)\varphi + S(t; K)\psi \tag{2.29}$$

Таким образом, имеет место утверждение.

Теорема 1. Пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[R^1]$. Тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (2.1) равномерно корректна, классическое решение дается формулой (2.29), или в подробной записи:

1) при $\alpha = 1$ – формулой (2.7), и для решения справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(x,t)| \le \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| + |t| \sup_{x \in R^1} |\psi(x)|, \quad t \in R^1$$

2) при $\alpha > 1$ – формулой

$$u(x,t) = [\varphi(x \pm \alpha t)]_2 + \int_0^t [\psi(x \pm \alpha r)]_2 dr +$$

$$+ \alpha_1 t \int_0^t I_1(\alpha_1 \sqrt{t^2 - s^2}) [\varphi(x \pm \alpha s)]_2 \frac{ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} +$$

$$+ \alpha_1 \int_0^t r \left\{ \int_0^r I_1(\alpha_1 \sqrt{t^2 - s^2}) [\psi(x \pm \alpha s)]_2 \frac{ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \right\} dr +$$

$$+ \frac{2t^2}{\pi} \int_0^1 d\zeta \int_0^1 \sqrt{1 - \eta^2} \left\{ [\varphi(x \pm \alpha t \eta \sqrt{1 - \zeta^2})]_2 - \right.$$

$$- \frac{(\alpha_1 t \zeta)^2}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 t \zeta)^2, \xi^2) [\varphi(x + \xi \pm \alpha t \eta \sqrt{1 - \zeta^2})]_2 d\xi +$$

$$+ \alpha_1 t \eta \sqrt{1 - \zeta^2} \int_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1(\alpha_1 \sqrt{t^2 \eta^2 (1 - \zeta^2) - s^2}) \left\{ [\varphi(x \pm \alpha s)]_2 - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(\alpha_1 t \zeta)^2}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{t\eta\sqrt{1-\zeta^2}} F_0((\alpha_1 t \zeta)^2, \xi^2) [\varphi(x + \xi \pm \alpha s)]_2 d\xi \right\} \frac{ds}{\sqrt{t^2 \eta^2 (1 - \zeta^2) - s^2}} \right\} d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^t r^2 \left\{ \int_0^1 d\zeta \int_0^1 \sqrt{1 - \eta^2} \left\{ [\psi(x \pm \alpha r \eta \sqrt{1 - \zeta^2})]_2 - \right. \right.$$

$$- \frac{(\alpha_1 r \zeta)^2}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 r \zeta)^2, \xi^2) [\psi(x + \xi \pm \alpha r \eta \sqrt{1 - \zeta^2})]_2 d\xi +$$

$$+\alpha_1 r\eta\sqrt{1-\zeta^2}\int\limits_0^{r\eta\sqrt{1-\zeta^2}} I_1(\alpha_1\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2})\Bigg\{[\psi(x\pm\alpha s)]_2 -$$

$$-\frac{(\alpha_1 r\zeta)^2}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0((\alpha_1 r\zeta)^2,\xi^2)[g(x+\xi\pm\alpha s)]_2 d\xi\Bigg\}\frac{ds}{\sqrt{r^2\eta^2(1-\zeta^2)-s^2}}\Bigg\}d\eta\Bigg\}dr$$

и для решения справедлива оценка

$$\sup_{x\in R^1}|u(x,t)| \le \left[\operatorname{ch}(\alpha_1 t)+\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 t(\sqrt{2}-1))\operatorname{sh}(\alpha_1 t(\sqrt{2}+1))}{\alpha_1^2}\right]\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| +$$

$$+\frac{1}{\alpha_1}\left[|\operatorname{sh}(\alpha_1 t)|+\frac{|\operatorname{sh}(2\alpha_1 t\sqrt{2})-\sqrt{2}\operatorname{sh}(2\alpha_1 t)|}{4\alpha_1^2\sqrt{2}}\right]\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|$$

$$t\in R^1$$

3) при $\alpha < 1$ — формулой

$$u(x,t) = [\varphi(x\pm\alpha t)]_2 + \int\limits_0^t[\psi(x\pm\alpha r)]_2 dr +$$

$$+\frac{2t^2}{\pi}\int\limits_0^1\cos(\alpha_2 t\zeta)d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}[\varphi(x\pm\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\eta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t r^2 dr\int\limits_0^1\cos(\alpha_2 t\zeta)d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}[\psi(x\pm\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\eta +$$

$$+\frac{t^2}{\pi\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_0((\alpha_2 t)^2,\xi^2)[\varphi(x+\xi\pm\alpha t\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t r^2 dr\int\limits_0^1 d\zeta\int\limits_0^1\sqrt{1-\eta^2}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_0((\alpha_2 r)^2,\xi^2)[\psi(x+\xi\pm\alpha r\eta\sqrt{1-\zeta^2})]_2 d\xi$$

и для решения справедлива оценка

$$\sup_{x\in R^1}|u(x,t)| \le \left(1+\frac{t\sqrt{2}\operatorname{sh}(\alpha_2 t\sqrt{2})}{\pi\alpha_2^2}\right)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| +$$

$$+\left(|t|+\frac{|\alpha_2 t\sqrt{2}\operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2})-\operatorname{sh}(\alpha_2 t\sqrt{2})|}{2\pi\alpha_2^3}\right)\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|$$

$$t\in R^1$$

Замечание 4. От начальной функции $\psi(x)$ в теореме 1 требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши, чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1[R^1]$ пространства $C[R^1]$.

Замечание 5. При $\alpha = 1$ синус оператор-функция представляется в явном виде формулой

$$S\left(t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x) = \int\limits_0^t C\left(r;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)dr = \int\limits_0^t[\psi(x\pm r)]_2 dr = 2^{-1}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(s)ds$$

и для нее справедлива оценка нормы

$$\left\|S\left(t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\right\| \le |t|, \quad t\in R^1$$

Замечание 6. Хотя изначально ставилась цель найти решение линейного однородного уравнения крутильных колебаний на полуоси $t \in R_+^1$, формула (2.29) определяет решение $u(x,t)$ и его частные и смешанные производные на всей числовой прямой $t \in R^1$, что естественно вытекает и из самого задания уравнения, так как оно не меняется при замене $t \to -t$.

Замечание 7. Так как классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (2.26), (2.27) принадлежит $C^{(2)}(\bar{R}_+^1; C[R^1])$ и для него $KW(t) \in C(\bar{R}_+^1; C[R^1])$, то решение

$$u(x,t) = \left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} W(t)$$

уравнения (2.1) принадлежит $C^{(4)}[R^1]$ для всех $t \in \bar{R}_+^1$.

3. Локальное решение задачи Коши для нелинейного уравнения крутильных волн. Применим к обеим частям уравнения (1.3) оператор $(I - d^2/dx^2)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (1.3) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение — нелокальное уравнение Клейна—Гордона

$$v_{tt} - \alpha^2 v_{xx} = (\alpha^2 - 1)v - \beta v^3 + h * [\beta v^3 - (\alpha^2 - 1)v] \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) в пространстве $C[R^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = KV + F(V), \quad t \in R_+^1 \tag{3.2}$$

Начальные условия (1.2) для уравнения (3.2) перепишутся в виде

$$t = 0: V = \Phi, \quad V_t = \Psi, \tag{3.3}$$

где $\Phi = \varphi(x)$, $\Psi = \psi(x)$ — элементы пространства $C[R^1]$.

В уравнении (3.2) оператор K такой же, как и в уравнении (2.26), а $F(\cdot)$ — заданный нелинейный оператор:

$$F(g) = \beta\left[\left(I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} - I\right]Q(g), \quad Q(g) = f(g(x)), \quad g(x) \in C[R^1], \quad f(s) = s^3$$

Отметим, что из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции Q в пространстве непрерывных функций ([8], гл. 5, § 20.1) и ограниченности оператора $(I - d^2/dx^2)^{-1} - I$ следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[R^1]$, и следовательно, $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому существует промежуток $[0, t^*[$, в котором абстрактная задача Коши (3.2), (3.3) имеет ([9], § 3) единственное обобщенное решение $V = V(t)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$V(t) = C(t; K)\Phi + S(t; K)\Psi + \int_0^t S(t - \tau; K)F(V(\tau))d\tau, \quad t \in R_+^1 \tag{3.4}$$

для любых $\Phi \in D(K)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$.

Учитывая, что для элементов пространства $C[R^1]$ справедлива оценка

$$\|\varphi\psi\|_C \le \|\varphi\|_C \|\psi\|_C$$

в силу чего с ним можно работать как с алгеброй ([10], гл. 6, § 6.1), из интегрального уравнения (3.4) выводим интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C \le \|C(t;K)\|\|\Phi\|_C + \|S(t;K)\|\|\Psi\|_C + 2|\beta|\int_0^t \|S(t-\tau;K)\|\|V(\tau)\|_C^3\,d\tau \tag{3.5}$$

Нормы оператор-функций из этого неравенства оцениваются разными мажорантами в зависимости от значения параметра α уравнения (1.3). Поэтому дальнейшее рассмотрение интегрального неравенства (3.5) разобьем на три случая:

1) пусть $\alpha = 1$, тогда, обозначая $\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha=1}(t) = \|\Phi\|_C + t\|\Psi\|_C$, неравенству (3.5) придадим вид

$$\|V(t)\|_C \le \Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha=1}(t) + 2|\beta|\int_0^t (t-\tau)\|V(t)\|_C^3\,d\tau,$$

откуда следует [11] оценка

$$\begin{gathered}\|V(t)\|_C \le \frac{\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha=1}(t)}{\sqrt[4]{1-24\beta^2t^2(e^{2t}-1)(\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha=1}(t))^4}}, \quad t\in[0,t_*]\\ t_* = \sup\left\{t\in[0,t^*[:\ t^2(e^{2t}-1)(\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha=1}(t))^4 < \frac{1}{24\beta^2}\right\}\end{gathered} \tag{3.6}$$

2) пусть $\alpha > 0$, тогда, применяя оценки (2.17) и (2.19) норм оператор-функций (2.16) и (2.18), записанные в виде

$$\|C(t;K)\| \le \left(1+\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)\operatorname{ch}(2\alpha_1 t\sqrt{2}) \equiv \rho(\alpha_1,t), \quad \|S(t;K)\| \le \frac{\rho(\alpha_1,t)}{2\alpha_1\sqrt{2}}$$

имеем

$$\|V(t)\|_C \le \rho(\alpha_1,t)\left[\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha>1} + \frac{|\beta|}{\alpha_1\sqrt{2}}\int_0^t \operatorname{ch}(2\alpha_1\tau\sqrt{2})\|V(\tau)\|_C^3\,d\tau\right]; \quad \Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha>1} = \|\Phi\|_C + \frac{\|\Psi\|_C}{2\alpha_1\sqrt{2}},$$

откуда следует ([12], гл. 1, § 1.3) выполнение при $t\in[0,t_*]$, где

$$t_* = \sup\left\{t\in[0,t^*[:\ \frac{3}{4}\alpha_1 t\sqrt{2} + \frac{\operatorname{sh}(4\alpha_1 t\sqrt{2})}{4} + \frac{\operatorname{sh}(8\alpha_1 t\sqrt{2})}{32} < \frac{4\alpha_1^7\sqrt{2}}{|\beta|(2\alpha_1^2+1)^3(\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha>1})^2}\right\}$$

оценки нормы обобщенного решения

$$\|V(t)\|_C \le \frac{(1+1/(2\alpha_1^2))\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha>1}\operatorname{ch}(2\alpha_1 t\sqrt{2})}{\sqrt{1-\frac{|\beta|(2\alpha_1^2+1)^3(\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha>1})^2}{4\alpha_1^7\sqrt{2}}\left[\frac{3}{4}\alpha_1 t\sqrt{2} + \frac{\operatorname{sh}(4\alpha_1 t\sqrt{2})}{4} + \frac{\operatorname{sh}(8\alpha_1 t\sqrt{2})}{32}\right]}} \tag{3.7}$$

3) пусть $\alpha < 1$, тогда, используя неравенства (2.24) и (2.25), переписанные в виде

$$\|C(t;K)\| \le \left(1+\frac{t\sqrt{2}}{\pi\alpha_2}\right)\operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2}), \quad \|S(t;K)\| \le \left(1+\frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)t\operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2})$$

и обозначая

$$\Omega_{\Phi,\Psi}^{\alpha<1}(t) = \left(1+\frac{t\sqrt{2}}{\pi\alpha_2}\right)\|\Phi\|_C + \left(1+\frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)t\|\Psi\|_C$$

имеем

$$\|V(t)\|_C \le \operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2})\left[\Omega^{\alpha<1}_{\Phi,\Psi}(t) + 2|\beta|\left(1+\frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)\int_0^t (t-\tau)\operatorname{ch}(\alpha_2\tau\sqrt{2})\|V(\tau)\|_C^3\,d\tau\right],$$

откуда следует [11] выполнение при $t \in [0, t_*]$, где

$$t_* = \sup\left\{t \in [0, t^*[:\, t^2(\Omega^{\alpha<1}_{\Phi,\Psi}(t))^4 \operatorname{ch}^6(\alpha_2 t\sqrt{2})\, j(\alpha_2, t) < \left(48\beta^2\left(1+\frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)^2\right)^{-1}\right\}$$

$$j(\alpha_2, t) = \int_0^t e^{2\tau}\operatorname{ch}^2(\alpha_2\tau\sqrt{2})d\tau$$

оценки нормы обобщенного решения[2]

$$\|V(t)\|_C \le \frac{\sqrt{2}\Omega^{\alpha<1}_{\Phi,\Psi}(t)\operatorname{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2})}{\sqrt{1 - 48\beta^2(1+(\pi\alpha_2^2)^{-1})^2 t^2(\Omega^{\alpha<1}_{\Phi,\Psi}(t))^4\operatorname{ch}^6(\alpha_2 t\sqrt{2})\, j(\alpha_2, t)}} \tag{3.8}$$

Итак, на отрезке $[0, t_*]$ существует обобщенное решение абстрактной задачи Коши (3.2), (3.3) для которого, в зависимости от значения параметра α, справедлива соответствующая оценка нормы (3.6)–(3.8). Это обобщенное решение $V(t)$ будет классическим решением задачи Коши (3.2), (3.3), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [9] непрерывной дифференцируемости нелинейного оператора $F(\cdot)$, при условии $\Phi \in D(K)$ и $\Psi \in C_1[R^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задачи Коши (1.3), (1.2) принадлежат пространству $C[R^1]$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно. Тогда при $t \in [0, t_*]$ существует единственное классическое решение $\upsilon = \upsilon(x, t)$, $(x, t) \in R^1 \times [0, t_*]$, этой задачи в пространстве $C[R^1]$, для которого, в зависимости от значения параметра α, справедлива оценка нормы (3.6)–(3.8), или в подробной записи

1) при $\alpha = 1$, обозначая

$$\omega^{\alpha=1}_{\varphi,\psi}(t) = \sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| + t\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|$$

имеем

$$\sup_{x\in R^1}|\upsilon(x,t)| \le \sqrt{2}\omega^{\alpha=1}_{\varphi,\psi}(t)(1 - 24\beta^2 t^2(e^{2t}-1)(\omega^{\alpha=1}_{\varphi,\psi}(t))^4)^{-1/2}$$

2) при $\alpha > 1$, $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, обозначая

$$\omega^{\alpha>1}_{\varphi,\psi} = \sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| + \frac{1}{2\alpha_1\sqrt{2}}\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|$$

имеем

$$\sup_{x\in R^1}|\upsilon(x,t)| \le \left(1+\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)\omega^{\alpha>1}_{\varphi,\psi}\operatorname{ch}(2\alpha_1 t\sqrt{2})\times$$

$$\times\left(1 - \frac{|\beta|(2\alpha_1^2+1)^3(\omega^{\alpha>1}_{\varphi,\psi})^2}{128\alpha_1^7\sqrt{2}}[24\alpha_1 t\sqrt{2} + 8\operatorname{sh}(4\alpha_1 t\sqrt{2}) + \operatorname{sh}(8\alpha_1 t\sqrt{2})]\right)^{-1/2}$$

[2] В оценке фигурирует интеграл $j(\alpha_2, t)$, а не его значение, чтобы не усложнять запись.

3) при $\alpha < 1$, $\alpha_2 = \sqrt{1-\alpha^2}$, обозначая

$$\omega^{\alpha<1}_{\varphi,\psi}(t) = \left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{\pi\alpha_2}\right)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| + \left(1 + \frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)t\sup_{x\in R^1}|\psi(x)|$$

имеем

$$\sup_{x\in R^1}|\upsilon(x,t)| \le \sqrt{2}\omega^{\alpha<1}_{\varphi,\psi}(t)\,\mathrm{ch}(\alpha_2 t\sqrt{2})\times$$
$$\times\left(1 - 48\beta^2\left(1 + \frac{1}{\pi\alpha_2^2}\right)^2 t^2(\omega^{\alpha<1}_{\varphi,\psi}(t))^4\mathrm{ch}^6(\alpha_2 t\sqrt{2})j(\alpha_2,t)\right)^{-1/2}$$

Замечание 8. Здесь надо учитывать, что классическое решение уравнения (1.3) из $C^{(4)}[R^1]$, тогда как классическое решение уравнения (3.1) из $C^{(2)}[R^1]$.

Замечание 9. Из существования локального классического решения уравнения (1.3) следует существование классического решения уравнения (1.1) на том же отрезке $[0, t_*]$.

4. Существование глобального решения уравнения крутильных волн и разрушения его решения на конечном отрезке. Если функция $g(x) \in C[R^1]$ также принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, то [13] справедлива оценка

$$\|g\|_C = \sup_{x\in R^1}|g(x)| \le \|g\|_{W_2^1} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}[(g(x))^2 + (g'(x))^2]dx},$$

причем, если к тому же $g(x) \in C^{(2)}[R^1]$, то предел при $x \to \pm\infty$ функций $g(x)$ и $g'(x)$ равен нулю.

Полагая, что для всех $t \ge 0$ классическое решение $u = u(x,t)$ уравнения (1.1) принадлежит пересечению пространств $C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, рассмотрим так называемый интеграл энергии

$$y(t) = \|u\|^2_{W_2^1} = \int_{-\infty}^{+\infty}(u^2 + u_x^2)dx,$$

в котором $u = u(x,t)$ – решение уравнения (1.1).

Применяя к правой части равенства

$$y'(t) = 2(u,u_t) + 2(u_x,u_{xt})$$

неравенство Коши–Буняковского ($|(\varphi,\psi)| \le \|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, где $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)dx$ и $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2dx}$ – скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R^1)$), выводим оценку $y'(t) \le \|u\|^2_{W_2^1} + \|u_t\|^2_{W_2^1}$, или

$$y'(t) \le y(t) + z(t); \quad z(t) = \|u_t\|^2_{W_2^1} = \|u_t\|_2^2 + \|u_{xt}\|_2^2 \tag{4.1}$$

Аналогично, из равенства

$$[y'(t)]^2 = 4[(u,u_t)^2 + 2(u,u_t)(u_x,u_{xt}) + (u_x,u_{xt})^2]$$

выводим оценку

$$[y'(t)]^2 \le 4y(t)z(t) \tag{4.2}$$

Используя уравнение (1.1), представление

$$u_x u_{xtt} = (uu_{xtt})_x - uu_{xxtt}$$

и интегрируя по частям, имеем

$$2^{-1}y''(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xt}^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx - \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^4 dx,$$

откуда выводим первое энергетическое равенство

$$2^{-1}y''(t) = z(t) - \|u_x\|_2^2 - \alpha^2 \|u_{xx}\|_2^2 - \beta \left\|u_x^2\right\|_2^2 \tag{4.3}$$

Аналогично, используя представление

$$u_{xt}u_{xtt} = (u_t u_{xtt})_x - u_t u_{xxtt}$$

и интегрируя по частям, имеем

$$z'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx - \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx - 2^{-1}\beta \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^4 dx\right),$$

откуда следует второе энергетическое равенство

$$z(t) = Z_0 - \|u_x\|_2^2 - \alpha^2 \|u_{xx}\|_2^2 - 2^{-1}\beta \left\|u_x^2\right\|_2^2, \tag{4.4}$$

в котором

$$Z_0 = \|\psi\|_2^2 + \|\psi'\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2 + \alpha^2 \|\varphi''\|_2^2 + 2^{-1}\beta \left\|(\varphi')^2\right\|_2^2$$

Пусть коэффициент уравнения (1.1) – параметр $\beta > 0$, тогда из соотношений (4.1) и (4.4) следует, что

$$y'(t) \le y(t) + Z_0, \quad t \ge 0,$$

и значит, в силу леммы Гронуолла,

$$y(t) \le e^t[y(0) + tZ_0], \quad t \ge 0,$$

откуда следует, что при выполнении начальными функциями условий

$$\varphi(x), \quad \psi(x) \in W_2^1(R^1); \quad (\varphi'(x))^2, \quad \varphi''(x) \in L_2(R^1) \tag{4.5}$$

классическое решение $u(x, t)$ уравнения (1.1) принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, и значит, справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(x,t)| \le e^{t/2}\sqrt{y(0) + tZ_0}, \quad t \ge 0,$$

или в подробной записи

$$\sup_{x \in R^1} |u(x,t)| \le e^{t/2}\sqrt{\|\varphi\|_{W_2^1}^2 + t\left(\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi'\|_2^2 + \alpha^2 \|\varphi''\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\left\|(\varphi')^2\right\|_2^2\right)}, \tag{4.6}$$

обеспечивающая существование глобального решения уравнения (1.1).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. Пусть в уравнении (1.1) параметр $\beta > 0$, а начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условию (4.5). Тогда существует единственное глобальное классическое решение задачи Коши (1.1), (1.2), для которого справедлива оценка (4.6).

Вернемся к рассмотрению энергетических равенств (4.3) и (4.4): исключая из них слагаемое с параметром β; имеем

$$2^{-1}y''(t) - 3z(t) + 2Z_0 = \|u_x\|_2^2 + \alpha^2 \|u_{xx}\|_2^2,$$

откуда, в силу оценки (4.2), вытекает дифференциальное неравенство для интеграла энергии

$$2y(t)y''(t) - 3[y'(t)]^2 + 8Z_0 y(t) \geq 0,$$

сравнивая которое с основным дифференциальным неравенством для интеграла энергии ([14], прилож., § 1) (см. ниже замечание 10), заключаем, что если потребовать выполнение условий

$$\|\varphi\|^2_{W_2^1} > 0, \quad M = (\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > 0 \quad \text{и} \quad Z_0 < M^2 \|\varphi\|^{-2}_{W_2^1}, \tag{4.7}$$

то имеет место оценка снизу интеграла энергии

$$y(t) \geq (\|\varphi\|^{-1/2}_{W_2^1} - Nt)^{-2}$$

и оценка сверху времени T^* существования классического решения уравнения (1.1)

$$T^* \leq N^{-1} \|\varphi\|^{-1/2}_{W_2^1}, \quad \text{где} \quad N = \|\varphi\|^{-3/2}_{W_2^1} \sqrt{M^2 - Z_0 \|\varphi\|^2_{W_2^1}}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. Пусть параметры α, β и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задачи Коши (1.1), (1.2) подчинены условиям (4.7). Тогда не существует глобального по времени классического решения уравнения крутильных колебаний нелинейно-упругого стержня, т.е. решение разрушается за конечное время T^*, причем имеет место оценка сверху для времени существования решения.

Замечание 10. Пусть в дифференциальном неравенстве

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0$$

$$\Phi(t) \in C^{(2)}([0,T]), \quad \Phi(t) \geq 0, \quad \Phi(0) \geq 0$$

выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0), \quad \left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0)$$

Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно, выполнено неравенство

$$T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

$$\text{где} \quad A^2 \equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0)\right],$$

причем

$$\Phi(t) \geq e^{\gamma t/(\alpha - 1)}[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{-1/(\alpha - 1)} \quad \text{и} \quad \lim_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty$$

Замечание 11. Оценку (4.6) нормы решения уравнения крутильных колебаний в пространстве $C[R^1]$ можно существенно улучшить, если воспользоваться при $\beta > 0$ неравенствами, вытекающими из энергетических равенств (4.3) и (4.4): $2^{-1}y''(t) \leq z(t) \leq Z_0$, откуда, интегрируя, имеем

$$y(t) \leq y(0) + y'(0)t + Z_0 t^2$$

Замечание 12. Покажем совместность достаточных условий (4.7). Пусть, например, начальные функции φ и ψ совпадают между собой: $\varphi(x) = \psi(x) \equiv \gamma(x) \neq 0$, причем $\gamma'(x) \neq 0$. Тогда выполнены первые два условия (4.7): $M = \|\gamma\|^2_{W_2^1} > 0$, и значит, третье условие (4.7) перепишется в виде $Z_0 < \|\gamma\|^2_{W_2^1}$, откуда в этом случае следует

$$\beta < -2(\|\gamma\|_2^2 + \alpha^2 \|\gamma'\|_2^2)\left\|\gamma'^2\right\|_2^{-2} \tag{4.8}$$

Таким образом, при значениях параметра β, удовлетворяющих неравенству (4.8), совместны условия (4.7) разрушения за конечное время решения уравнения крутильных колебаний бесконечного нелинейно-упругого стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
2. *Dunford, N., Schwartz, J.T.* Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p.
3. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 87–202.
4. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1983. 752 с.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1986. 800 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1981. 800 с.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
9. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
10. *Appell J., Zabreiko P.P.* Nonlinear Superposition Operators. Cambridge: Univ. Press, 1990. 320 p.
11. *Kirane M., Tatar N.* Global existence and stability of some semilinear problems // Arch. Math. (Brno) Tomus. 2000. V. 36. No. 1. P. 33–44.
12. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne City MC: Victoria 8001, 2002. 193 p.
13. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
14. *Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физ. фак. МГУ, 2014. 364 с.