
УДК 533.6.013.2:534.222.2:535.71



Александр Николаевич КРАЙКО, крупный специалист в области газовой динамики и аэродинамики, ученик Г.Г. Черного, автор более 250 статей по механике и прикладной математике, активный рецензент и автор статей в ПММ, многократно премированный редколлегией за лучшую работу (ежегодные премии изд-ва Elsevier), отмечает 21 августа 2019 г. свое 85-летие. Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и многочисленные ученики сердечно поздравляют его с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов.

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ
С ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ ЧЕПМЕНА–ЖУГЕ**

© 2019 г. А. Н. Крайко^{1,2,*}

¹Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

* e-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.

После доработки 10.04.2019 г.

Принята к публикации 24.04.2019 г.

Исследована устойчивость стационарных течений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в каналах переменной площади поперечного сечения, в расширяя-

ющейся части которых располагается (“стоит”) детонационная волна Чепмена–Жуге (DV_{CJ}). Стационарные и нестационарные течения описываются уравнениями одномерного приближения с детонационной волной – плоской, нормальной оси канала поверхностью разрыва. Горючая смесь до детонационной волны и продукты сгорания за ней – совершенные газы с постоянными теплоемкостями, которые, как и аддитивные постоянные в выражениях для внутренней энергии и энтальпии, разные до и после волны. Так как число Маха за DV_{CJ} равно единице, то в стационарном потоке она может стоять только в расширяющейся части канала. При этом в зависимости от условий на выходе из канала поток за ней может быть и сверх-, и дозвуковым. В первом случае начальное возмущение может прийти на DV_{CJ} только слева (газ течет слева направо), во втором – с обеих сторон. При исследовании устойчивости сначала предполагается, что и после начального возмущения детонационная волна, слегка сместившись, продолжает оставаться DV_{CJ} . При этом анализ устойчивости сводится к вычислению производной числа Маха DV_{CJ} по числу Маха стационарного потока перед волной. В принятой постановке величина этой производной всегда такая, что рассматриваемое течение неустойчиво. На самом деле, малые возмущения DV_{CJ} делают ее слегка пересжатой. Однако и с учетом этого стационарное течение с DV_{CJ} в расширяющемся канале всегда неустойчиво.

Ключевые слова: устойчивость течения в канале переменной площади, детонационная волна Чепмена–Жуге, слегка пересжатая детонационная волна, инварианты линеаризованных уравнений, особенности линеаризованных соотношений для детонационной волны Чепмена–Жуге

DOI: 10.1134/S0032823519030081

Введение. Согласно модели Зельдовича–Неймана–Дёринга (ЗНД-модели) [1–3] структура детонационной волны включает интенсивную ударную волну (поверхность разрыва) и примыкающую к ней “зону реакций” конечной ширины. Действительная толщина ударной волны – несколько длин свободного пробега при на порядки более протяженной зоне реакций. Химические реакции, скорость которых сильно зависит от температуры, начинаются благодаря нагреву горючей смеси ударной волной и заканчиваются достижением продуктами сгорания термодинамического равновесия. Получающиеся в рамках ЗНД-модели детонационные адиабаты полностью определяются термодинамикой смеси в исходном (холодном, метастабильном) и в конечных равновесных состояниях, не завися от кинетики процесса горения. На детонационных адиабатах особый интерес представляют точки, которые отвечают детонационным волнам, названным по именам их открывателей [4, 5] детонационными волнами Чепмена–Жуге (DV_{CJ}). Важная особенность DV_{CJ} – равная звуковой нормальная к волне скорость газа за ней [6–8]. Благодаря этому DV_{CJ} оказывается самоподдерживающейся, ибо волны разрежения, идущие от “инициатора детонации”, не могут ее догнать и ослабить.

Экспериментально обнаруженные в середине XX века случаи развала ожидаемых в рамках ЗНД-модели стационарных структур детонационных волн вызвали поток исследований их “структурной” устойчивости. В соответствующих, как правило, одномерных моделях [9–20] реальная кинетика заменяется одной реакцией с некоторой “энергией активации” и последующим мгновенным или протяженным по времени тепловыделением. В таком приближении условие структурной устойчивости приводит к ограничениям на энергию активации. В настоящее время выяснение одномерной структурной устойчивости DV_{CJ} в любой смеси при известной кинетике ее горения (реакциях, их энергиях и константах скоростей) возможно в процессе численного решения сравнительно простой нестационарной задачи о неравновесном одномерном течении невязкого и нетеплопроводного газа. Если такое решение выходит на стационарную структуру, то DV_{CJ} в рассматриваемой горючей смеси структурно устойчива.

Если же выхода на стационарную структуру не происходит, то в такой смеси ДВ_{СД} структурно неустойчива.

Наряду со структурной устойчивостью ДВ_{СД} представляет интерес устойчивость стационарных течений в каналах переменной площади со структурно устойчивой и поэтому рассматриваемой как поверхность разрыва ДВ_{СД}. Интерес к таким течениям — следствие их привлечения (см., например, [21–25]) в качестве элемента прямоточных двигателей с горением в стационарной ДВ_{СД}. Стационарная ДВ_{СД} располагается на входе двигателя летательного аппарата, летящего со скоростью ДВ_{СД} [21, 22]; она стоит в камере сгорания двигателя аппарата, летящего со скоростью, превышающей скорость ДВ_{СД} [23, 24]; рассмотрены оба варианта [25]. При этом отмечено [23]: “Устойчивость таких режимов требует самостоятельного исследования. Вероятно, она может быть обеспечена лишь при специальном регулировании”. При допущении, что сдвинутая по потоку волна остается самоподдерживающейся, расчеты, показали [24], что в рассматриваемых там примерах течения с ДВ_{СД} в расширяющихся каналах неустойчивы. Ниже анализ устойчивости стационарных течений с ДВ_{СД} в расширяющемся канале выполнен сначала с таким же допущением, а затем в более полной нестационарной постановке.

1. Формулы и уравнения одномерного приближения для течения с детонационной волной в канале переменной площади. Пусть невязкий и нетеплопроводный газ течет слева направо по каналу переменной площади поперечного сечения $F = F(x)$, где x — расстояние, отсчитываемое далее от стационарного положения ДВ_{СД}. Если t — время, u , ρ , p , e и $h = e + p/\rho$ — скорость, плотность, давление, удельные внутренняя энергия и энтальпия газа, то в одномерном приближении нестационарное течение в канале удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u F)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u F)}{\partial t} + \frac{\partial[(p + \rho u^2)F]}{\partial x} = p F', \\ \frac{\partial[\rho F(e + u^2/2)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u F(h + u^2/2)]}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

и соотношениям на детонационной волне

$$\begin{aligned} \rho_1(u_1 - D) = \rho_2(u_2 - D), \quad p_1 + \rho_1(u_1 - D)(u_1 - u_2) = p_2 \\ 2h_1 + (u_1 - D)^2 = 2h_2 + (u_2 - D)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $F' = dF(x)/dx$, детонационная волна — плоская поверхность разрыва, нормальная оси x , D — ее скорость, а индекс 1 (2) метит параметры слева (справа) от разрыва.

В стационарном течении детонационная волна покоится ($D = 0$), а обыкновенные дифференциальные уравнения, получающиеся из системы (1.1), интегрируются и дают три конечных соотношения [6–8]

$$\rho u F = G = \text{const}, \quad 2h + u^2 = 2H = \text{const}, \quad s = s_{1,2} = \text{const}, \quad s_2 \neq s_1 \quad (1.3)$$

Постоянные G (расход) и H (полная энтальпия) в них на детонационной волне не изменяются в отличие от растущей удельной энтропии s и изменяющейся любой ее функции (“энтропийной функции”). Независимо от этого в силу интегралов (1.3) произведение ρu (“плотность тока”) — функция числа Маха $M = u/a$, где a — скорость звука, с максимумом при $M = 1$. Поэтому согласно первому равенству (1.3) стационарная ДВ_{СД}, за которой $M_2 = 1$, не может располагаться в сужающемся канале. Второе равенство (1.3) — условие сохранения полной энтальпии выполняется и на стационарных ударных волнах, в том числе, на косых скачках.

При стационарной ДВ_{СД} в некотором сечении расширяющегося участка канала для реализации сверхзвукового течения за ней давление в среде, в которую происходит ис-

течение (“внешнее давление” p_e), должно быть ниже некоторого. Напротив, при p_e , большем давления p_2 за ДВ_{СД}, к ней может примыкать дозвуковой поток. Разумеется, для реализации любой из перечисленных возможностей каждое стационарное течение должно быть устойчивым.

Для дальнейшего уравнения (1.1) запишем в характеристической форме

$$\begin{aligned} \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho u a^2 f = 0, \quad f = \frac{F'}{F} \\ \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial p}{\partial t} - (u-a) \frac{\partial p}{\partial x} - \rho u a^2 f = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Первое и второе из этих уравнений определяют изменение инвариантов Римана (для изэнтропических течений), из-за переменности площади поперечного сечения канала, вдоль C^+ - и C^- -характеристик, а третье – следствие сохранения энтропии на траекториях частиц (C^0 -характеристиках).

Для замыкания уравнений и условий (1.1)–(1.4) примем далее, что горючая смесь до детонационной волны ($k=1$) и продукты сгорания за ней ($k=2$) – совершенные газы с постоянными, но разными теплоемкостями и иными константами, т.е.

$$\begin{aligned} p\omega = R_k T, \quad R_k = c_{pk} - c_{vk} = \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} c_{pk}, \quad \gamma_k = \frac{c_{pk}}{c_{vk}}, \quad a^2 = \gamma_k p\omega \\ h = \frac{a^2}{\gamma_k - 1} + q_k, \quad q_1 = q, \quad q_2 = 0, \quad s(p, \rho) = \frac{p}{\rho^{\gamma_k}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\omega = 1/\rho$ – удельный объем, T – температура, R – газовая постоянная, c_p и c_v – удельные теплоемкости, γ – показатель адиабаты и q – удельная теплота сгорания горючей смеси. Для таких газов получающееся из условий (1.2) уравнение детонационной адиабаты принимает вид

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \frac{p_2 \omega_2}{p_1 \omega_1} - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} - \frac{p_2}{p_1} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2q}{p_1 \omega_1} \quad (1.6)$$

Если для уравнений состояния (1.5) к соотношениям (1.2), записанным для неподвижной детонационной волны ($D=0$), добавить равенство

$$u_2^2 = a_2^2 = \gamma_2 p_2 \omega_2,$$

то оно из всех точек адиабаты (1.6) определит две “точки Жуге”. Верхняя (в плоскости ωp) из них с $p_2 > p_1$ отвечает ДВ_{СД}, а нижняя с $p_2 < p_1$ – фронту дефлаграции. Продолав необходимые выкладки, для ДВ_{СД}, следуя известному подходу [6], найдем

$$\begin{aligned} M_J^2 \equiv \frac{u_1^2}{a_1^2} = \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - (\gamma_1 - 1)^2 \gamma_2^2}}{\gamma_1 (\gamma_1 - 1)} = 1 + \frac{\gamma + 1}{\psi} q^\circ + \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma + 1}{\psi} q^\circ\right)^2 - 1} \\ \chi = \gamma_1 \frac{\gamma_2^2 - 1}{\psi} q^\circ - \gamma_1 + \gamma_2^2, \quad \psi = \frac{T_1}{T_0}, \quad q^\circ = \frac{q}{c_{p1} T_0} \\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma_1 M_J^2}{\gamma_2 + 1} = \frac{1 + \gamma M_J^2}{\gamma + 1} \\ \frac{1}{M_J} \frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1 M_J^2)}{\gamma_1 (\gamma_2 + 1) M_J^2} = \frac{1 + \gamma M_J^2}{(\gamma + 1) M_J^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее T_0 – температура, фиксированная в данной задаче, а вторые выражения (последние звенья в цепочках равенств) справедливы для неизменных показателей адиабаты: $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$.

Согласно формулам (1.7), при $q^0 \rightarrow \infty$ число Маха M_J , а вместе с ним отношения давлений p_2/p_1 , скоростей звука a_2/a_1 и температур T_2/T_1 также растут неограниченно. В то же время, как и для ударных волн, отношения плотностей, удельных объемов и скоростей стремятся к конечным пределам

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} > \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \quad (1.8)$$

Хотя реальные значения q^0 не очень велики, эти формулы полезны для оценок входящих в них параметров. Так, согласно соотношению (1.8), удельный объем и скорость могут уменьшиться при переходе через ДВ_{СД} чуть меньше чем вдвое. С другой стороны, так как подкоренное выражение в формуле для M_J^2 не может быть отрицательным, то при $\gamma_2 < \gamma_1$ возникает ограничение

$$q^0 \geq \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}$$

В действительности, однако, различие показателей адиабаты связано с изменением химического состава при сгорании горючей смеси. Поэтому с уменьшением q^0 уменьшается разность $\gamma_1 - \gamma_2$ и происходит естественный переход в отношениях (1.7) к последнему равенству в цепочке равенств для M_J^2 без такого ограничения.

2. Неустойчивость стационарного течения с детонационной волной Чепмена–Жуге в расширяющемся канале. Сжигание горючей смеси в стационарной ДВ_{СД}, стоящей в некотором сечении расширяющегося участка канала, интересно для ряда приложений. Построение таких течений реализуется в рамках конечных уравнений (1.3), описывающих стационарные течения в каналах переменной площади, уравнений состояния (1.5) и соотношений (1.6) и (1.7), выполняющихся на ДВ_{СД}.

При числе Маха полета летательного аппарата $M_0 > M_J$ поток в канале воздухозаборника, оставаясь сверхзвуковым, сначала тормозится до $M_m < M_J$ в минимальном сечении канала, а затем разгоняется в его расширяющейся части. При разгоне число Маха потока M_1 растет, его температура T_1 в силу условия сохранения полной энтальпии уменьшается, а обратная ей величина

$$\frac{1}{\psi} \equiv \frac{T_0}{T_1} = \frac{2 + (\gamma_1 - 1)M_1^2}{2 + (\gamma_1 - 1)M_0^2} \quad (2.1)$$

увеличивается. Поэтому согласно соотношениям (1.7), M_J также растет, но, как показано ниже, медленнее, чем M_1 и в некотором сечении расширяющегося канала выполнится равенство $M_J = M_1$. В такое сечение можно поставить ДВ_{СД}.

Правда, уже в воздухозаборнике к воздуху добавляется топливо, неучтенное в равенстве (2.1). До начала горения учет такой добавки сводится к некоторой коррекции входящих в это равенство величин. Обычно расход топлива много меньше расхода воздуха, и это может лишь слегка сказаться на результатах расчетов.

Сказанное выше поясняет рис. 1 со схемами двух прямоточных двигателей с горением в ДВ_{СД} и с примыкающими к ней соответственно сверхзвуковым и дозвуковым потоками. На рис. 1а цифры 1 и 2 метят потоки до и после детонационной волны, контур расширяющегося сопла первого двигателя – сплошная кривая cf , а пунктирная ломаная cf^0 – контур дозвуковой части и сопла Лавала (со скругляющей вблизи минимального сечения окружностью) второго двигателя. Горизонтальный отрезок cg пока-

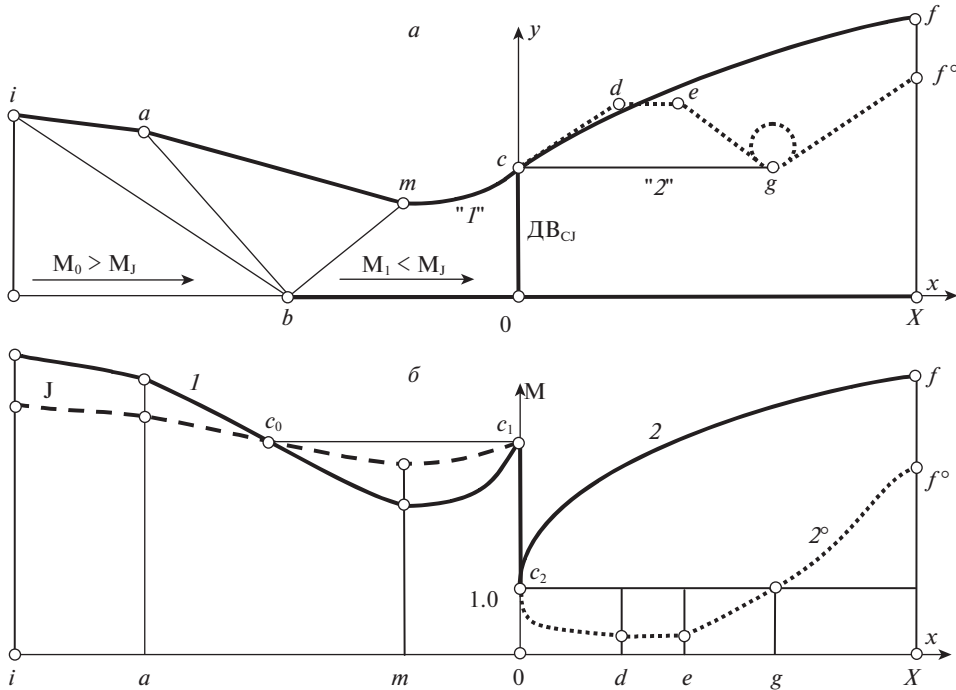


Рис. 1. Схемы двух прямооточных двигателей с горением в стационарной детонационной волне Чепмена–Жуге (а) и распределения чисел Маха в их воздухозаборнике, детонационных камерах и соплах (б).

зывает, что в рассматриваемом приближении минимальная площадь сопла Лавалья равна площади канала в сечении стационарного положения ДВ_{СЖ}.

На рис. 1б сплошная кривая 1 и штриховая J дают $M_1 = M_1(x)$ и $M_J = M_J(x)$ до детонационной волны, сплошная кривая 2 и пунктирная 2° дают распределения чисел Маха для двух двигателей за ДВ_{СЖ}, а вертикальный отрезок c_1c_2 – детонационную волну. Так как за ДВ_{СЖ} число Маха $M_2 = 1$ при производной $F' > 0$, то при $x = +0$ касательные к кривым 2 и 2° вертикальны. Горизонтальный отрезок c_0c_1 определяет точку c_0 , в которой, как и в точке c_1 , $M_J = M_1$ и скорость ДВ_{СЖ} равна скорости потока перед ней, однако такое положение волны невозможно из-за сужения канала. Везде, включая трехскачковый воздухозаборник, перечисленные кривые отвечают решениям уравнений одномерного приближения с единственным разрывом – ДВ_{СЖ}.

Анализ устойчивости стационарного течения с ДВ_{СЖ} начнем, допустив, следуя указанному ранее подходу [24], что при смещении $x_1 = x_1(t)$ ДВ_{СЖ} от стационарного положения $x_1 = 0$ она остается самоподдерживающейся. При сделанном допущении справедливы формулы (1.7) и (2.1) и их следствие $M_J^2 = M_J^2(M_1^2)$. Учтя, что $M_J^2 = M_1^2$ при $x_1 = 0$, найдем

$$M^2 \approx M_1^2 + \frac{dM_1^2}{dx} x_1, \quad M_J^2 \approx M_1^2 + \frac{dM_J^2}{dM_1^2} \frac{dM_1^2}{dx} x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a(M - M_j) = a \frac{M^2 - M_j^2}{M + M_j} \approx \lambda x_1, \quad \lambda = \frac{a_1}{2M_1} \left(1 - \frac{dM_j^2}{dM_1^2} \right) \frac{dM_1^2}{dx}$$

При сверхзвуковом течении в расширяющемся канале число Маха – растущая функция x и знак λ определяется знаком разности в скобке, т.е. величиной стоящей в ней производной. Пролодав необходимые выкладки, получим

$$\begin{aligned} \frac{dM_j^2}{dM_1^2} &= \frac{(\gamma_1 - 1)M_j^2}{2 + (\gamma_1 - 1)M_j^2} \left[1 + 2 \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_2^2 - 1} \left(\frac{\Psi}{\gamma_1 q^0} \right) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{\gamma_2^2 - 1} \left(\frac{\Psi}{\gamma_1 q^0} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{(\gamma - 1)M_j^2}{[2 + (\gamma - 1)M_j^2] \sqrt{1 + 2\Psi/[(\gamma + 1)q^0]}} < 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где, как и ранее, второе выражение отвечает $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$.

Согласно равенствам (2.2), при одинаковых показателях адиабаты указанная производная меньше единицы, $\lambda > 0$ и стационарное течение с ДВ_{СJ} неустойчиво. При разных показателях адиабаты исследование усложняется, однако и в этом случае анализ выражения в квадратной скобке в формуле (2.2) показывает, что при реальных значениях входящих в нее параметров ситуация не изменяется, т.е. положительная производная $dM_j^2/dM_1^2 < 1$. Кстати, именно это неравенство учтено при построении рис. 1б. На нем и при разгоне, и при торможении сверхзвукового потока M_j изменяется медленнее, чем M_1 .

Допущение возмущенной ДВ_{СJ} оставаться самоподдерживающейся предполагает бесконечно медленное изменение исследуемого течения, включая нулевую скорость сместившейся от своего стационарного положения детонационной волны. Однако при найденных положительных λ ее скорость λx_1 равна нулю только при $x_1 = 0$. Если же $x_1 \neq 0$, то скорость волны конечна, вопреки допущению о бесконечно медленной эволюции течения. С другой стороны, возмущенная ДВ_{СJ}, став пересжатой, будет при тех же параметрах набегающего потока иметь большую скорость, чем ДВ_{СJ}. При смещении ДВ_{СJ} вправо это может изменить вывод о неустойчивости исследуемого течения. Напротив, при смещении ДВ_{СJ} влево большая скорость пересжатой волны подтвердит правильность такого вывода, а этого более чем достаточно. Правда, тут же возникает вопрос о возмущениях, приходящих на пересжатую волну справа и весьма важных в похожих задачах с ударной волной [26–32]. В связи этим ниже анализ устойчивости стационарных течений с ДВ_{СJ} в расширяющемся канале проведен в более полной нестационарной постановке.

При произвольном малом возмущении ДВ_{СJ} становится пересжатой с числом Маха за ней M_2 чуть меньше единицы. Для варианта со сверхзвуковым потоком за стационарной ДВ_{СJ} возможный сценарий эволюции течения поясняет xt -диаграмма рис. 2. Начальные возмущения на ней приходят на детонационную волну (ДВ) только слева. В силу этого, пусть при $t = 0$ поток возмущен лишь на малом отрезке $i0$ оси x , причем так, что ДВ, став слегка пересжатой, начала двигаться влево. При $t = t_a$ отрезок ia S^+ -характеристики пересечется с ДВ, а течение станет возмущенным на отрезке ab , ограниченном справа S^+ -характеристикой, пришедшей из начала координат $x = t = 0$. Эта же характеристика ограничивает возмущенное течение справа, по крайней мере, до ее прихода к выходу из канала $x = X$. Слева возмущенное течение ограничивает движущаяся ДВ.

При $t > 0$ к слегка пересжатой ДВ станет примыкать вначале небольшая дозвуковая область, ограниченная снизу по потоку траекторией “звуковой линии” (ЗЛ), на кото-

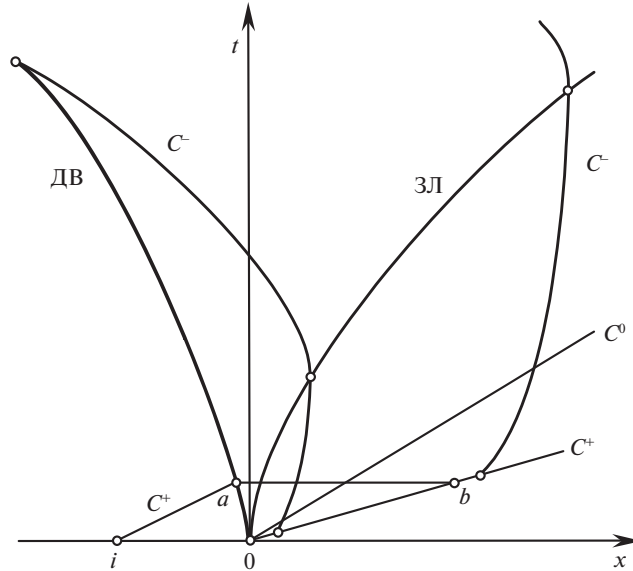


Рис. 2. xt -диаграмма течения за возмущенной (слегка пересжатой) детонационной волной Чепмена–Жуге.

рой $u = a$. Справа от ЗЛ течение сверхзвуковое и идущие против потока C^- -характеристики сносятся им вправо. На ЗЛ их скорость равна нулю (C^- -характеристики “останавливаются” с вертикальной касательной на xt -диаграмме), а после пересечения со ЗЛ C^- -характеристики начинают движение влево вдогонку ДВ. Из сказанного и из рис. 2 видно, что C^- -характеристики возмущенного течения – сильно искривленные кривые. Хотя все характеристики невозмущенных стационарных потоков до и за ДВ_{СД} также сильно искривлены (правда, без изменения направления движения), их форма определяется стационарным решением, т.е. известна заранее. При анализе устойчивости в задачах, рассмотренных ранее [26–34], все характеристики возмущенных и невозмущенных течений совпадают и потому также известны заранее.

В задаче с xt -диаграммой рис. 2 ситуация намного сложнее, чем в [26–34], не только из-за отличия возмущенных и невозмущенных характеристик, но и потому, что теперь возмущенное течение в целом не близко ни к какому известному. Исключение – значения параметров в той части примыкающей к ДВ дозвуковой области, где они близки к величинам за ДВ_{СД}. Приписав последним величинам звездочку и взяв за масштабы скорости, плотности и давления a_* , ρ_* и $\rho_* a_*^2$, будем иметь

$$u = 1 + \delta u, \quad a = 1 + \delta a, \quad \rho = 1 + \delta \rho, \quad p = \frac{1}{\gamma_2} + \delta p, \quad h = \frac{(1 + \delta a)^2}{\gamma_2 - 1} \quad (2.3)$$

с $(|\delta u|, |\delta a|, |\delta \rho|, |\delta p|) \ll 1$. В дополнение за масштабы площади, длины и времени возьмем $F(0)$, $l = 1/f(0)$ и l/a_* с функцией $f = f(x)$, введенной в уравнениях (1.4).

При выбранных масштабах после подстановки представлений (2.3) в уравнения (1.4) и их линеаризации характеристические уравнения в таком (“околозвуковом”) приближении примут вид

$$\begin{aligned}
C^+: \quad \frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{d\delta u}{dt} + \frac{d\delta p}{dt} + \frac{1 + \delta u + \gamma_2 \delta p}{2} f = 0, \quad f = f(x), \quad f(0) = 1 \\
C^-: \quad \frac{dx}{dt} = \delta u - \delta a, \quad \frac{d\delta u}{dt} - \frac{d\delta p}{dt} - (1 + \delta u + \gamma_2 \delta p) f = 0 \\
C^0: \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d\delta p}{dt} - \frac{d\delta \rho}{dt} = 0
\end{aligned}$$

После введения инвариантов Римана (“правого” δR и “левого” δL) и “энтропийного” δS

$$2\delta R = \delta u + \delta p, \quad 2\delta L = \delta u - \delta p, \quad \delta S = \delta p - \delta \rho$$

характеристические уравнения переписутся в форме

$$\begin{aligned}
C^+: \quad \frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{d\delta R}{dt} + \frac{1 + (\gamma_2 + 1)\delta R - (\gamma_2 - 1)\delta L}{4} f = 0 \\
C^-: \quad \frac{dx}{dt} = \frac{(3 - \gamma_2)\delta R + (\gamma_2 + 1)\delta L - \delta S}{2}, \quad \frac{d\delta L}{dt} = \frac{1 + (\gamma_2 + 1)\delta R - (\gamma_2 - 1)\delta L}{2} f \\
C^0: \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d\delta S}{dt} = 0
\end{aligned} \quad (2.4)$$

В околосзвуковом приближении нестационарные возмущения параметров потока выражаются через введенные инварианты равенствами

$$\begin{aligned}
\delta u = \delta R + \delta L, \quad \delta p = \delta R - \delta L, \\
\delta \rho = \delta R - \delta L - \delta S, \quad \delta a = \frac{(\gamma_2 - 1)(\delta R - \delta L) + \delta S}{2}
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Для параметров за ДВ, пока ее отход от стационарного положения, т.е. ее координата еще мала: $|x_2(t)| = |x_1(t)| \ll 1$, справедливы представления (2.3) и равенства (2.5). При этом для $t > t_a$ сверхзвуковой стационарный поток перед ДВ невозмущен. Поэтому отличие $\delta\varphi_1$ любого параметра φ от его стационарного значения дается формулой: $\delta\varphi_1(t) = \varphi_1'(0)x_1(t)$, в которой, как и ранее, штрих означает дифференцирование по x соответствующего стационарного параметра. Если, учтя сказанное и то, что на стационарной ДВ_{СЖ} (при ее нулевой скорости $D = 0$) условия (1.2) выполняются, провести их линеаризацию, то это приведет к равенствам ($\delta D = dx_1/dt$ – скорость ДВ)

$$\begin{aligned}
(1 - \rho_1)\delta D - x_1 = 2\delta R_2 - \delta S_2 \\
\rho_1(1 - u_1)\delta D - (u_1 - 1)x_1 = 2\delta R_2 \\
(\gamma_2 - 1)(1 - u_1)\delta D = 2(\gamma_2 - 1)\delta R_2 + \delta S_2,
\end{aligned}$$

в которых нет левого инварианта δL_2 .

Отсутствие δL_2 в линеаризованных законах сохранения на ДВ означает, что в каждом из них коэффициенты при δL_2 , вычисленные при отбрасывании вторых слагаемых в соотношениях (2.3), равны нулю. Обнаруженная особенность ДВ, получающихся при возмущении стационарных течений с неподвижной ДВ_{СЖ}, указывает на то, что для таких течений при “линеаризации” уравнений

$$\begin{aligned}
(1 - \rho_1)\delta D - x_1 = \delta u_2 + \delta p_2 + \delta u_2 \delta p_2 \\
(\rho_1 - 1)\delta D - (u_1 - 1)x_1 = \delta u_2 + \delta p_2 \\
2(\gamma_2 - 1)(1 - u_1)\delta D = 4\delta a_2 + 2(\delta a_2)^2 + 2(\gamma_2 - 1)\delta u_2 + (\gamma_2 - 1)(\delta u_2)^2,
\end{aligned}$$

полученных из условий (1.2), нужно сохранять $(\delta L_2)^2$. Прделав необходимые выкладки, придем к разрешенным относительно δD , δR_2 и δS_2 равенствам

$$\begin{aligned} \delta D &= \frac{4(\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1)x_1 - (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} < 0 \\ \delta R_2 &= \frac{4[(\gamma_2 - 1)u_1 - \gamma_2]u_1 x_1 + (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{8[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} > 0 \\ \delta S_2 &= \frac{(\gamma_2 - 1)(u_1 - 1)u_1 x_1 - (\delta L_2)^2}{\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1} < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $t = t_a$ неравенства в формулах (2.6) – следствие того, что, во-первых, в этот момент x_1 отрицательно в силу выбора начальных возмущений (см. ниже), во-вторых, всегда $\rho_1 < \rho_2 = 1$ и $u_1 > u_2 = 1$, и в-третьих, максимально возможная величина u_1 определяется формулой (1.8) с $u_2 = 1$, как и $\rho_2 = 1$, в силу выбранных масштабов скорости и плотности. Итак, при $t = t_a$

$$\frac{dx_1}{dt} = \delta D = \frac{4(\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1)x_1 - (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} < 0 \quad (2.7)$$

Следовательно, отрицательная координата $x_1(t)$ движущейся влево детонационной волны будет продолжать уменьшаться, увеличивая модуль ее также отрицательной скорости δD . Через $(\delta L_2)^2$ независимо от знака $\delta L_2(t)$ разгону детонационной волны и ее удалению от стационарного положения $x = 0$ в большей или в меньшей степени будут способствовать и приходящие на нее справа отраженные акустические волны. Сказанное – доказательство неустойчивости стационарного течения с ДВ_{СЖ}, к которой в стационарном решении справа примыкал бы разгоняющийся сверхзвуковой поток.

Уравнения (2.6) и (2.7) и неравенства в них в согласии со способом их получения справедливы и для дозвукового варианта, изображенного на рис. 1. Его xt -диаграмма проще представленной на рис. 2. Действительно, теперь вновь возникшая дозвуковая область, примыкающая к возмущенной слегка пересжатой детонационной волне всего лишь расширяет существовавшую до этого большую дозвуковую область. В плоскости xt правая граница дозвуковой области в отличие от заранее неизменной звуковой линии (ЗЛ) рис. 2 – вертикаль $x = x_m$ с постоянной координатой x_m минимального сечения сопла Лавала. Наконец, теперь возмущенное течение почти везде при малых t близко к стационарному потоку. Существенно, однако, то, что и здесь для сместившейся влево детонационной волны (при $x_2(t) = x_1(t) < 0$) такой близости по-прежнему нет справа от нее. Поэтому, поступая так же, как в предыдущем варианте, придем к равенствам (2.6) и (2.7) и к выводу о неустойчивости течения с дозвуковым потоком за стационарной ДВ_{СЖ}.

3. О смещении детонационной волны возмущениями, пришедшими по потоку. Рассмотрим ключевой для выполненного выше анализа вопрос о смещении детонационной волны начальными возмущениями (рис. 2), принесенными характеристиками набегающего на волну сверхзвукового потока с отрезка $l0$ оси x . В противоположность потоку за ДВ_{СЖ} течение перед ней независимо от направления смещения волны при малых нестационарных возмущениях близко к стационарному сверхзвуковому потоку. Поэтому для него при прежнем выборе масштабов вместо представлений (2.3) имеем

$$\begin{aligned} u &= u_1(x) + \delta u, \quad a = a_1(x) + \delta a, \quad \rho = \rho_1(x) + \delta \rho, \quad p = p_1(x) + \delta p \\ h &= h_1(x) + \frac{2a_1(x)}{\gamma_1 - 1} \delta a, \quad p_1(x) = \frac{1}{\gamma_1} \rho_1(x) a_1^2(x), \quad h_1(x) = \frac{a_1^2(x)}{\gamma_1 - 1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где переменные с индексом 1 удовлетворяют конечным равенствам (1.3), описывающим стационарное течение, или обыкновенным дифференциальным уравнениям (как и выше, штрих означает дифференцирование по x)

$$(\rho_1 u_1)' + \rho_1 u_1 f = 0, \quad p_1' + \rho_1 u_1 u_1' = 0, \quad h_1' + u_1 u_1' = 0, \quad f = F'/F$$

Подстановка представлений (3.1) в уравнения (1.4) приводит к характеристической системе для нестационарных добавок

$$\begin{aligned} & \rho_1 a_1 \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t} + (u_1 \pm a_1) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] \pm \frac{\partial \delta p}{\partial t} \pm (u_1 \pm a_1) \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \\ & + \rho_1 a_1 (u_1 \pm a_1) \left[\left(\frac{\delta \rho}{\rho_1} + \frac{\delta a}{a_1} \right) u_1' \pm \left(\frac{\delta \rho}{\rho_1} + \frac{a_1}{u_1 \pm a_1} \frac{\delta u}{u_1} + \frac{2u_1 \pm a_1}{u_1 \pm a_1} \frac{\delta a}{a_1} \right) \frac{u_1 a_1 f}{u_1 \pm a_1} \right] = 0 \\ & \frac{\partial \delta p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \delta p}{\partial x} - a_1^2 \left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \right) - 2u_1 a_1 \rho_1' \delta a = 0, \end{aligned}$$

где верхние (нижние) знаки отвечают C^+ (C^-)-характеристикам. При использовании этих уравнений вблизи волны (при $|x| \ll 1$) все величины с индексом 1 можно заменить их значениями при $x = 0$.

Введя с учетом последнего замечания инварианты δR , δL и δS

$$2\delta R = \rho_1 a_1 \delta u + \delta p, \quad 2\delta L = \rho_1 a_1 \delta u - \delta p, \quad \delta S = \delta p - a_1^2 \delta \rho$$

запишем уравнения, определяющие их при $|x| \ll 1$, в виде

$$\begin{aligned} C^\pm: \quad & \frac{dx}{dt} = u_1 \pm a_1 \\ \frac{d\delta R}{dt} = & -\rho_1 a_1 (u_1 \pm a_1) \left[\left(\frac{\delta \rho}{\rho_1} + \frac{\delta a}{a_1} \right) u_1' \pm \left(\frac{\delta \rho}{\rho_1} + \frac{a_1}{u_1 \pm a_1} \frac{\delta u}{u_1} + \frac{2u_1 \pm a_1}{u_1 \pm a_1} \frac{\delta a}{a_1} \right) \frac{u_1 a_1 f}{u_1 \pm a_1} \right] \\ C^0: \quad & \frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{d\delta S}{dt} = 2u_1 a_1 \rho_1' \delta a \end{aligned} \quad (3.2)$$

Правые части каждого второго из этих уравнений – линейные комбинации δR , δL и δS , ибо согласно определениям инвариантов

$$\begin{aligned} \delta u = \frac{\delta R + \delta L}{\rho_1 a_1}, \quad \delta p = \delta R - \delta L, \quad \delta \rho = \frac{\delta R - \delta L - \delta S}{a_1^2} \\ \delta a = \frac{(\gamma_1 - 1)(\delta R - \delta L) + \delta S}{2\rho_1 a_1} \end{aligned}$$

Поэтому заданные на отрезке $i0$ малые ненулевые значения инвариантов приносятся на малый начальный отрезок $0a$ возмущенной детонационной волны, практически не изменяясь вдоль своих характеристик.

Построим пример начальных возмущений на отрезке $i0$ оси x , которые к моменту $t = t_a$ сместят детонационную волну влево. Для этого, допустив отличные от нуля нестационарные возмущения параметров набегающего сверхзвукового потока и выразив их вблизи волны (в треугольнике $i0a$) через инварианты с индексом 1, подставим их в дополнение к δD , x_1 , δR_2 , δS_2 и δL_2 в выполняющиеся на волне законы сохранения (1.2). Прделав необходимые выкладки, придем к выражению для скорости детонационной волны

$$\begin{aligned} \delta D = & \frac{4(\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1) x_1 - (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} + \frac{[1 - (\gamma_2 - 1)a_1^2/(\gamma_1 - 1)]\mu_1 \delta S_1}{(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]a_1^2} + \\ & + \frac{[1 - (\gamma_2 - 1)u_1 a_1](u_1 - a_1)\delta L_1 - [1 + (\gamma_2 - 1)u_1 a_1](u_1 + a_1)\delta R_1}{(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]a_1^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

из-за возмущений, приходящих на волну слева (с индексом “1”) и справа (δL_2), и ее смещения (x_1). Коэффициенты перед всеми возмущениями – константы.

Пусть i^0a и i^-a – отрезки C^0 - и C^- -характеристик, которые (см. рис. 2), как и отрезок C^+ -характеристики ia , приходят с оси x в точку a . Тогда начальные возмущения, т.е. величины δR_1 , δS_1 и δL_1 отличны от нуля только на отрезках i^0 , i^00 и i^-0 , а согласно уравнениям для dx/dt из (3.2) $x_i < x_{i^0} < x_{i^-}$. Воспользовавшись произволом в выборе δR_1 , δS_1 и δL_1 , зададим их постоянными одного порядка $\varepsilon^2 \ll 1$ с отрицательным суммарным вкладом ($-\varepsilon^2$) в правую часть равенства (3.3). Для таких возмущений, учтя сказанное выше, придем к справедливому на отрезке $0a$ возмущенной детонационной волны уравнению

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1 - \varepsilon^2 - K(\delta L_2)^2 \tag{3.4}$$

$$k = \frac{\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1}{(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} > 0, \quad K = \frac{5 - \gamma_2^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} > 0$$

Последнее слагаемое в полученном уравнении неизвестно. Однако оно, как и в уравнении (2.7), при любых отличных от нуля отраженных возмущениях уменьшает координату волны x_1 . Проинтегрировав уравнение (3.4) без этого слагаемого при начальном условии $x_1(0) = 0$, убедимся в отрицательном знаке требуемого смещения возмущенной детонационной волны

$$x_{1a} \equiv x_1(t_a) = \frac{\varepsilon^2}{k}(1 - e^{kt_a}) < 0$$

Заключение. Отметим несколько моментов, проявившихся при выполнении данного исследования. Начиная с заведомо неверного допущения о том, что малые возмущения ДВ_{СД} оставляют ее самоподдерживающейся. По этой причине приведенный к выражениям (2.2) почти элементарный подход может также показаться неверным. Строго говоря, это так, но сделанный в результате вывод о неустойчивости стационарного течения с ДВ_{СД} в расширяющемся канале оказывается верным благодаря двум дополнительным соображениям. Очевидно, что при одинаковых параметрах перед ДВ скорость ставшей слегка пересжатой ДВ больше скорости ДВ_{СД}. Далее нужно ограничиться смещениями ДВ против потока. Для них важен лишь сам факт большей скорости пересжатой ДВ без знания ее величины. Для смещений ДВ по потоку нужна дополнительная информация, которую элементарный подход дать не может. Поскольку, однако, смещения ДВ против потока ведут к неустойчивости, то знать, что будет при смещениях ДВ по потоку и не требуется.

Казалось бы, все ясно, но тут возникает вопрос об “игре возмущений” в дозвуковых областях, примыкающих к пересжатой ДВ. В похожих задачах с ударными волнами без выяснения особенностей таких игр обойтись невозможно. Здесь же уже первое знакомство с проблемой (см. рис. 2) пугает казалось бы неразрешимыми трудностями. Все, однако, получается и проще, и интереснее. Главная особенность возникшей проблемы – отсутствие в линеаризованных законах сохранения на возмущенной ДВ_{СД} первой степени инварианта, приносимого C^- -характеристиками на слегка пересжатую ДВ справа. В результате влияние отраженных акустических волн проявляется через квадрат этого инварианта, не завися от его знака. При этом, как и в элементарном подходе, ограничение возмущениями, смещающими ДВ_{СД} против потока, приводит к выводу о неустойчивости исследуемого течения.

Автор признателен Н.И. Тилляевой за обсуждения, А.Г. Куликовскому за полезный совет, П.С. Уткину за библиографию и Х.Ф. Валиеву за расчеты, предварившие данное исследование.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-01-00126).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б. К теории распространения детонационных волн в газообразных системах // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. Вып. 5. С. 542–569.
2. von Neumann J. Progress report on theory of detonation waves // OSRD Rep., 1942. № 549.
3. Döring W. Über den Detonationsvorgang in Gasen // Ann. Physic. 1943. Bd. 43. S. 421–436.
4. Chapman D.L. On the rate of explosions in gases // Phil. Mag. 1899. V. 47. 5th Ser. № 284. P. 90–104.
5. Jouguet E. Sur la propagation des reactions chimiques dans les gaz // J. Maths. Pures Appl. 6^e ser. 1905. T. 1. V. 60. Fasc. 4. P. 347–425; 1906. T. 2. V. 61. Fasc. 1. P. 5–86.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 733 с.
7. Черный Г.Г. Газовая динамика. Москва: Наука, 1988. 424 с.
8. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. Москва: Торус пресс, 2010. 440 с.
9. Зайдель Р.М. Об устойчивости детонационных волн в газовых смесях // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 5. С. 1142–1145.
10. Erpenbeck J.J. Stability of steady-state equilibrium detonations // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 5. P. 604–614.
11. Пухначев В.В. Об устойчивости детонации Чепмена–Жуге // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 4. С. 798–801.
12. Зайдель Р.М., Зельдович Я.Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации // ПМТФ. 1964. № 6. С. 59–65.
13. Шелкин К.И. Об одномерной неустойчивости детонации // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 5. С. 1144–1146.
14. Шелкин К.И. Избранные труды. Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ, 2011. 268 с.
15. Fickett W., Wood W.W. Flow calculations for pulsating one-dimensional detonations // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 5. P. 903–916.
16. Lee H.I., Stewart D.S. Calculation of linear detonation instability: one-dimensional instability of plane detonation // J. Fluid Mech. 1990. V. 216. P. 103–132.
17. Bourlioux A., Majda A.J., Roytburd V. Theoretical and numerical structure for unstable one-dimensional detonations // SIAM J. Appl. Math. 1991. V. 51. № 2. P. 303–343.
18. Sharpe G.J., Falle S.A.E.G. One-dimensional numerical simulations of idealized detonations // Proc. R. Soc. A. 1999. V. 455. P. 1203–1214.
19. Daimon Yu., Matsuo A. Detailed features of one-dimensional detonations // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 1. P. 112–122.
20. Kasimov A.R., Stewart D.S. On the dynamics of self-sustained one-dimensional detonations: a numerical study in the shock-attached frame // Phys. Fluids. 2004. V. 16. № 10. P. 3566–3578.
21. Зельдович Я.Б. К вопросу об энергетическом использовании детонационного горения // ЖТФ. 1940. Т. 10. Вып. 17. С. 1453–1461.
22. Zeldovich Ya.B. To the question of energy use of detonation combustion // J. Propuls. Power. 2006. V. 22. № 3. P. 588–592.
23. Александров В.Г., Крайко А.Н., Реент К.С. Определение характеристик сверхзвукового пульсирующего детонационного прямооточного двигателя (СПДПД) // Аэромеханика и газовая динамика. 2001. № 2. С. 3–15.
24. Крайко А.Н. Теоретическое и экспериментальное обоснование концепции пульсирующего двигателя с детонационной волной, движущейся против сверхзвукового потока. Импульсные детонационные двигатели / Под ред. С.М. Фролова. Москва: Торус пресс, 2006. С. 569–590.
25. Kraiko A.N., Egoryan A.D. Comparison of thermodynamic efficiency and thrust characteristics of air-breathing jet engines with subsonic combustion and burning in stationary and nonstationary detonation waves, AIP Conf. Proc. V. 2027: Proc. of the 19th Intern. Conf. on the Methods of Aero-physical Research (ICMAR 2018) / Ed. by V. Fomin, AIP, 2018. P. 020006-1–020006-5.
26. Черный Г.Г. Неустойчивые движения газа в каналах с проницаемыми стенками. Об устойчивости скачка уплотнения в каналах // Тр. ЦИАМ. 1953. № 244. 12 с. = Черный Г.Г. Неустойчивые движения газа в каналах. Устойчивость замыкающего скачка // Газовая

- динамика. Избранное. Издание второе исправленное. В 2-х т. Т. 1. Ред.-сост.: А.Н. Крайко. Москва: Физматлит, 2005. С. 590–609.
27. *Бабицкий А.Б.* Отражение малых возмущений от поверхности скачка и устойчивость скачка в канале переменного сечения при $T_{01} \neq T_{02}$. Королев: ЦНИИМаш, 1963. 19 с.
 28. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 473–484.
 29. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 469–478.
 30. *Крайко А.Н., Широносков В.А.* Исследование устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при околосзвуковой скорости потока // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 579–586.
 31. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Широносков В.А.* Анализ устойчивости одномерного течения в канале при произвольном изменении параметров стационарного потока между сечением замыкающего скачка и выходом из канала // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 637–645.
 32. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Широносков В.А.* Исследование устойчивости течения идеального газа в каналах с замыкающим скачком уплотнения // Тр. ЦИАМ. 1982. № 1020. С. 6–21.
 33. *Галин Г.Я., Куликовский А.Г.* Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 95–102.
 34. *Галин Г.Я., Куликовский А.Г.* Об устойчивости одномерных течений газа в расширяющихся областях // Изв. АН СССР МЖГ. 1981. № 2. С. 112–119.

The Instability of Steady-State Flows with the Chapman–Jouguet Detonation Wave in a Channel of Variable Cross-Section

A. N. Kraiko^{a,b,#}

^a *Baranov Central Institute of Aviation Motors, Moscow, Russia*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

[#] *e-mail: akraiko@ciam.ru*

The stability of steady flows of ideal (inviscid and non-conductive) gas in the channels of variable cross-section, in the diverging part of which the Chapman–Jouguet (DV_{CJ}) detonation wave is located, is investigated. The steady and unsteady flows are described by the equations in one-dimensional approximation with the detonation wave represented by a flat break surface, normal to the channel axis. The combustible mixture before the detonation wave and the combustion products behind it are perfect gases with constant heat capacities, which, like additive constants in terms of the internal energy and enthalpy, are different before and after the wave. Since the Mach number behind DV_{CJ} is equal to unity, it can stand only in the diverging part of the channel in the steady flow. Moreover, depending on the conditions at the channel exit, the flow behind it can be either super- or subsonic. In the first case, the initial disturbance can come to DV_{CJ} only from the left (the gas moves from left to right), and, in the second case it can come from both sides. When stability is investigated it is assumed, at first, that after initial disturbance the detonation wave, slightly shifted, continues to be the DV_{CJ} . In this case, the stability analysis is reduced to calculating the DV_{CJ} Mach number derivative by the Mach number of the steady flow before the wave. In the formulation accepted, the derivative value is always such that the flow under consideration is unstable. In fact, the small perturbations of DV_{SJ} make it become slightly over-compressed. However, even taking this into account, the steady flow with DV_{CJ} in the diverging channel is always unstable.

Keywords: flow stability, channel of variable cross-section, Chapman–Jouguet detonation wave, slightly overcompressed detonation wave, invariants of linearized equations, singularities of linearized relations for the Chapman – Jouguet detonation wave

REFERENCES

1. *Zeldovich Ya.B.* On the theory of detonation wave propagation in gaseous systems (K teorii rasprostraneniya detonatsionnih voln v gazoobraznykh sistemakh) // *ZhTF (Techn. Phys.)*, 1940, vol. 10, no. 5, pp. 542–569. (in Russian)
2. *von Neumann J.* Progress report on theory of detonation waves // *OSRD Rep*, 1942, no. 549.
3. *Döring W.* Über den Detonationsvorgang in Gasen, *Ann. Physik. Bd.*, 1943, vol. 43, s. 421–436.
4. *Chapman D.L.* On the rate of explosions in gases // *Phil. Mag.*, 1899, vol. 47, 5th ser, no. 284, pp. 90–104.
5. *Jouguet E.* Sur la propagation des reactions chimiques dans les gaz // *J. Maths. Pures Appl.* 6^e ser., 1905, T. 1, vol. 60, Fasc. 4, pp. 347–425; 1906, T. 2, vol. 61, Fasc. 1, pp. 5–86.
6. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987.
7. *Chernyi G.G.* Gas Dynamics (Gazovaya dinamika). Moscow: Nauka, 1988. 424 p. (in Russian)
8. *Kraiko A.N.* Theoretical Gas Dynamics: Classics and Topics (Teoreticheskaya gazovaya dinamika: klassika i sovremennost'), Moscow: Torus Press, 2010. 440 p. (in Russian)
9. *Zaidel' P.M.* On the stability of detonation waves in gas mixtures (Ob ustoychivosti detonatsionnih voln v gazovih smesyah) // *Dokl. AN SSSR*, 1961, vol. 136, no. 5, pp. 1142–1145. (in Russian)
10. *Erpenbeck J.J.* Stability of steady-state equilibrium detonations // *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, no. 5, pp. 604–614.
11. *Pukhnachev V.V.* The stability of Ghapmen–Jouguet detonation // *Sov. Phys. Dokl.*, 1963, vol. 8, no. 4, pp. 338–340.
12. *Zaidel' R.M., Zeldovich Ya.B.* One-dimensional instability and attenuation of detonation (Odnomernaya neustoychivost' i zatuhaniye detonatsii) // *PMTF*, 1964, no. 6, pp. 59–65. (in Russian)
13. *Shchelkin K.I.* On the one-dimensional instability of detonation (Ob odnomeroy neustoychivosti detonatsii) // *Dokl. AN USSR*, 1965, vol. 160, no. 5, pp. 1144–1146. (in Russian)
14. *Shchelkin K.I.* Selected Works (Izbranniye trudy). Snezhinsk: RFNC–VNIITF, 2011. 268 p. (in Russian).
15. *Fickett W., Wood W.W.* Flow calculations for pulsating one-dimensional detonations // *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, no. 5, pp. 903–916.
16. *Lee H.I., Stewart D.S.* Calculation of linear detonation instability: one-dimensional instability of plane detonation // *J. Fluid Mech.*, 1990, vol. 216, pp. 103–132.
17. *Bourlioux A., Majda A.J., Roytburd V.* Theoretical and numerical structure for unstable one-dimensional detonations // *SIAM J. Appl. Math.*, 1991, vol. 51, no. 2, pp. 303–343.
18. *Sharpe G.J., Falle S.A.E.G.* One-dimensional numerical simulations of idealized detonations // *Proc. R. Soc. A*, 1999, vol. 455, pp. 1203–1214.
19. *Daimon Yu., Matsuo A.* Detailed features of one-dimensional detonations // *Phys. Fluids*, 2003, vol. 15, no. 1, pp. 112–122.
20. *Kasimov A.R., Stewart D.S.* On the dynamics of self-sustained one-dimensional detonations: a numerical study in the shock-attached frame // *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no. 10, pp. 3566–3578.
21. *Zeldovich Ya.B.* To the question of energy use of detonation combustion (K voprosu ob energeticheskoy ispol'zovanii detonatsionnogo goreniya) // *ZhTF*, 1940, vol. 10, no. 17, pp. 1453–1461. (in Russian)
22. *Zeldovich Ya.B.* To the question of energy use of detonation combustion // *J. Propuls. Power*, 2006, vol. 22, no. 3, pp. 588–592.
23. *Alexandrov V.G., Kraiko F.N., Reent K.S.* Determining of characteristics of a supersonic pulsed detonation ramjet engine – SPDRE (Opredeleniye harakteristik sverkhzvukovogo pul'siruyushchego detonatsionnogo pryamotochnogo dvigatelya – SPDPD) // *Airmech. Gas Dyn. (Aeromehanika i gazovaya dinamika)*, 2001, no. 2, pp. 3–15. (in Russian)
24. *Kraiko A.N.* Theoretical and experimental justification of the concept of a pulse engine with a detonation wave moving against a supersonic flow (Teoreticheskoye i eksperimentalnoye obosnovaniye konceptcii pul'siruyushchego dvigatelya s detonatsionnoy volnoy, dvizhushchysya protiv sverkhzvukovogo potoka) // *Pulse Detonation Engines (Impul'snyye detonatsionniye dvigateli)* / Ed. by S. Frolov, Moscow: Torus press, 2006, pp. 569–590. (in Russian)
25. *Kraiko A.N., Egoryan A.D.* Comparison of thermodynamic efficiency and thrust characteristics of air-breathing jet engines with subsonic combustion and burning in stationary and nonstationary detonation waves // *AIP Conf. Proc.*, Vol. 2027: Proc. of the 19th Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) / Ed. by V. Fomin, AIP, 2018, pp. 020006-1–020006-5.

26. *Chernyi G.G.* Nonsteady gas flows in channels with permeable wall. on the stability of the shock wave in the channels (Neustanovivshiyesya dvizheniya gaza v kanalah s pronitcayemyimi stenkami. Ob ustoychivosti skachka uplotneniya v kanalah) // Trudy CIAM, 1953, no. 244. 12 p. = *Chernyi G.G.*, The Unsteady Gas Flows in the Channels. Stability of Closing Shock Wave (Neustanovivshiyesya dvizheniya gaza v kanalah. Ustoychivost' zamikayushhego skachka). Gas Dynamics. Selected (Gazovaya dinamika. Izbrannoye). Vol. 1 / Ed. by A. Kraiko, Moscow: Phyzmatlit, 2005, pp. 590–609. (in Russian)
27. *Babitskii A.B.* The Reflection of Small Disturbances from the Surface of Shock Wave and the Stability of a Shock in the Channel of Variable Cross Section when $T_{01} \neq T_{02}$ (Otrajeniye malih vozmusheniy ot poverhnosti skachka i ustoychivost' skachka v kanale peremennogo secheniya pri $T_{01} \neq T_{02}$), Korolev: CNIIIMash, 1963. 19 p. (in Russian)
28. *Grin' V.T., Kraiko A.N., Tilliaeva N.I.* Investigation of the stability of perfect gas flow in a quasi-cylindrical channel // JAMM, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 449–460.
29. *Grin' V.T., Kraiko A.N., Tilliaeva N.I.* On the stability of flow of perfect gas in a channel with a closing compression shock and simultaneous reflection of acoustic and entropy waves from the outlet cross section // JAMM, 1976, vol. 40, no. 3, pp. 426–435.
30. *Kraiko A.N., Shironosov V.A.* Investigation of flow stability in a channel with a closing shock at transonic flow velocity // JAMM, 1976, vol. 40, no. 4, pp. 533–541.
31. *Grin' V.T., Kraiko A.N., Tilliaeva N.I., Shironosov V.A.* Analysis of one-dimensional flow stability in a channel with arbitrary variation of stationary flow parameters between the closing shock cross section and channel outlet // JAMM, 1977, vol. 41, no. 4, pp. 651–659.
32. *Grin' V.T., Kraiko A.N., Tilliaeva N.I., Shironosov V.A.* Investigation of stability of ideal gas flow in channels with closing shock wave (Issledovaniye ustoychivosti techeniya ideal'nogo gaza v kanalah s zamikayushim skachkom uplotneniya) // Trudy CIAM, 1982, no. 1020, pp. 6–21. (in Russian)
33. *Galin G.Ia., Kulikovskii A.G.* On the stability of flows appearing at the disintegration of an arbitrary discontinuity // JAMM, 1975, vol. 39, no. 1, pp. 85–92.
34. *Galin G.Ia., Kulikovskii A.G.* Stability of one-dimensional gas flows in expanding regions // Fluid Dyn., 1981, no. 1, pp. 246–252.