

УДК 539.3

ПРОГИБ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

© 2019 г. В. Н. Федосеев^{1,*}, Д. А. Ягнятинский^{1,**}¹НИИ НПО “ЛУЧ”, Подольск, Россия

*e-mail: fvn@luch.com.ru

**e-mail: day@luch.com.ru

Поступила в редакцию 16.10.2018 г.

После доработки 29.01.2019 г.

Принята к публикации 19.03.2019 г.

Приведено аналитическое решение задачи о прогибе тонкой прямоугольной пластины со свободными краями под действием сосредоточенных сил со стороны упругих приводов, опирающихся на бесконечно жесткое основание. Решение основывается на применении интегральных преобразований и на учете кинематической связи между пластиной и приводами, деформируемыми по закону Гука.

Ключевые слова: тонкая прямоугольная пластина, прогиб, свободный край, сосредоточенная сила, привод, интегральные преобразования, кинематическая связь

DOI: 10.1134/S0032823519040052

Введение. Некоторые авторы отмечают, что аналитическое решение задачи о прогибе тонкой прямоугольной упругой изотропной пластины со свободными краями при действии на нее сосредоточенных сил [1] представляет собой значительную трудность [2], и вместо этого используют расчетные модели, построенные на основе метода конечных элементов. Тем не менее, аналитическое решение этой задачи может быть найдено.

Для задач адаптивной оптики о проектировании и использовании деформируемых зеркал важно уметь с допустимой точностью рассчитывать функции влияния приводов этих зеркал [3, 4]. Воздействие приводов на пластину зеркала в некоторых случаях моделируют силами, приложенными в дискретных точках [2].

В теории упругости пластины со свободными краями часто рассматривают покоящиеся на упругом (винклеровском) основании [5, 6]. Эта модель может быть применена для случая, когда пластина покоится на большом количестве приводов или упругих перечинах, равномерно распределенных на ее поверхности [7], однако в реальности число приводов ограничено, и модель с винклеровским основанием оказывается некорректной.

В данной работе предложен метод нахождения функций влияния приводов, действующих сосредоточенно на тонкую прямоугольную пластину со свободными краями. Метод основан на разложении решения в ряд по специальным функциям и применении интегральных преобразований; дополнительно учитываются условия кинематической связи. Приводы моделируются как упругие пружины, деформируемые по закону Гука. Одним концом приводы крепятся к пластине, а другим — опираются на бесконечно жесткое основание. В качестве управляющих элементов часто используют пьезопроводы, принцип действия которых основан на обратном пьезоэффекте. При

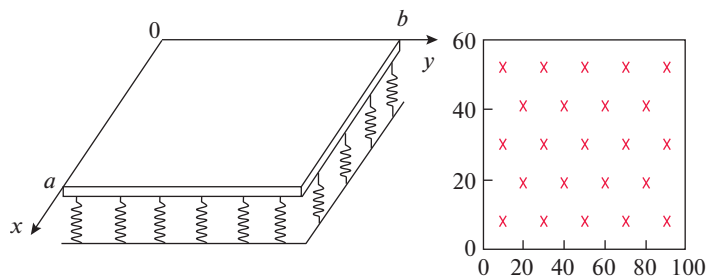


Рис. 1. Пластина с упругими приводами (слева) и план расположения приводов (справа).

подаче напряжения приводы растягиваются и сосредоточенно воздействуют на пластину с некоторой силой.

1. Постановка задачи. Нагрузку на поверхность упругой прямоугольной пластины толщиной h и изгибной жесткостью D представим в виде давления $q(x, y)$; тогда прогиб пластины в поперечном направлении $w(x, y)$ подчиняется неоднородному бигармоническому уравнению [1]

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1.1)$$

где x и y — координаты вдоль сторон пластины, длиной a и b соответственно (левая часть рис. 1), E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины.

В зависимости от геометрической формы пластины, типа нагрузки и граничных условий данное уравнение может быть решено разными методами. Известно, что в некоторых случаях решение уравнений в частных производных по двум координатам удастся свести к решению двух одномерных дифференциальных уравнений [8]. Для рассматриваемого случая это невозможно, так как перекрестный член уравнения не позволяет разделить переменные.

Полагая края пластины свободными, граничные условия запишем в виде [1]

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0} = 0$$

$$(x \leftrightarrow y, a \leftrightarrow b)$$
(1.2)

Давление, производимое на пластину n_a сосредоточенными приводами, может быть записано в виде

$$q(x, y) = F_0 \delta(x - x_{j_0}, y - y_{j_0}) - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j \delta(x - x_j, y - y_j), \quad (1.3)$$

где F_0 — внутренняя растягивающая сила в активном приводе (на который подается электрическое напряжение и которому присвоен номер j_0), x_j, y_j — координаты j -го привода, K_j — его жесткость, $w_j = w(x_j, y_j)$ — прогиб пластины в месте расположения j -го привода и растяжение (или сжатие) j -го привода, δ — двумерная дельта-функция Дирака. Требуется определить функцию $w(x, y)$ при $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$.

Особенность предлагаемого подхода – учет зависимости величины $q(x, y)$ в уравнении (1.1) от заранее неизвестных перемещений w_j в точках размещения приводов (соотношение (1.3)).

2. Решение в виде ряда Фурье. Аналогично подходу Д.М. Ляхова [9], решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} f(X_m) f(Y_n); \quad X_m = k_m \frac{x}{a}, \quad Y_n = k_n \frac{y}{b}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} f(X_0) &= \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad f(X_1) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{12} \\ f(X_m) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left[-\frac{S_m^-(k_m)}{C_m^-(k_m)} C_m^+(X_m) + S_m^+(X_m) \right], \quad m \geq 2 \\ C_m^\pm(u_m) &= \operatorname{ch} u_m \pm \cos u_m, \quad S_m^\pm(u_m) = \operatorname{sh} u_m \pm \sin u_m \\ &(X, x, a, m \leftrightarrow Y, y, b, n) \end{aligned}$$

$k_m(k_n)$ – корни частотного уравнения, для $m \geq 2$ ($n \geq 2$) [10]:

$$\cos k \operatorname{ch} k = 1,$$

вычисленные с большой точностью по методу, который использовался ранее [9]; также следует положить: $k_0 = k_1 = 0$.

Выбранные базисные функции f удобны тем, что они представляют собой полную ортонормированную на множестве $[0, a] \times [0, b]$ систему функций, а также удовлетворяют граничным условиям (1.2). Требуется найти коэффициенты α_{mn} , ограничившись в сумме (2.1) максимальными значениями \bar{m} и \bar{n} для индексов m и n соответственно (эти два числа можно выбирать исходя из характерного количества приводов в каждом из направлений осей x и y ; как правило, на практике \bar{m} и \bar{n} не превосходят 15).

Для дальнейших выкладок введем обозначения $f_{xx}^\circ(X_m)$ и $f_{yy}^\circ(Y_n)$ – частные производные функции f второго порядка, в которых будут отсутствовать множители \hat{X}_m^2 и \hat{Y}_n^2 , где $\hat{X}_m = \frac{k_m}{a}$, $\hat{Y}_n = \frac{k_n}{b}$, возникающие при дифференцировании соответственно функций $f(X_m)$ и $f(Y_n)$. Например,

$$\begin{aligned} f_{xx}^\circ(X_0) &= f_{xx}^\circ(X_1) = 0 \\ f_{xx}^\circ(X_m) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left[-\frac{S_m^-(k_m)}{C_m^-(k_m)} C_m^-(X_m) + S_m^-(X_m) \right], \quad m \geq 2 \end{aligned}$$

Тогда при подстановке разложения (2.1) в уравнение (1.1) с учетом конечности сумм получим

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_{mn} (\hat{X}_m^4 + \hat{Y}_n^4) f(X_m) f(Y_n) + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_{mn} \hat{X}_m^2 \hat{Y}_n^2 f_{xx}^\circ(X_m) f_{yy}^\circ(Y_n) = \frac{q(x, y)}{D} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Умножим обе части уравнения (2.2) на один из базисных элементов частичной суммы ряда (2.1): $f(X_{m0})f(Y_{n0})$, где $m0 \in [0, \bar{m}]$, $n0 \in [0, \bar{n}]$. После этого подействуем на полученное уравнение оператором $\int_0^a \int_0^b dx dy$. В силу ортонормированности функций f получим

$$\alpha_{m0n0} (\hat{X}_{m0}^4 + \hat{Y}_{n0}^4) + \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_{mn} \gamma_{m0n0}(m, n) = Q_{m0n0}, \quad (2.3)$$

где

$$\gamma_{m0n0}(m, n) = 2 \hat{X}_m^2 \hat{Y}_n^2 \int_0^a \int_0^b f_{xx}^\circ(X_m) f(X_{m0}) dx \int_0^b f_{yy}^\circ(Y_n) f(Y_{n0}) dy$$

$$Q_{m0n0} = \frac{F_0}{D} f(X_{m0j0}) f(Y_{n0j0}) - \sum_{j=1}^{n_a} \frac{K_j w_j}{D} f(X_{m0j}) f(Y_{n0j})$$

$$X_{m0j} = k_{m0} \frac{x_j}{a}, \quad Y_{n0j} = k_{n0} \frac{y_j}{b}$$

Далее используются обозначения (δ – символ Кронекера)

$$\begin{aligned} \text{ff}_{m0n0}(j) &= f(X_{m0j}) f(Y_{n0j}) \\ G_{m0n0}(m, n) &= \gamma_{m0n0}(m, n) + \delta_{mm0} \delta_{nn0} (\hat{X}_{m0}^4 + \hat{Y}_{n0}^4) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда уравнение (2.3) можно переписать в виде системы

$$\sum_{j=1}^{n_a} \frac{K_j}{D} \text{ff}_{m0n0}(j) w_j + \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} G_{m0n0}(m, n) \alpha_{mn} = \frac{F_0}{D} \text{ff}_{m0n0}(j_0), \quad (2.5)$$

представляющей собой $\bar{l} = (\bar{m} + 1)(\bar{n} + 1)$ линейных уравнений при разных значениях индексов $m0$ и $n0$ относительно столбца неизвестных

$$\text{WA} = (w_1 \dots w_{n_a} \alpha_{00} \alpha_{01} \dots \alpha_{\bar{m}(\bar{n}-1)} \alpha_{\bar{m}\bar{n}})^T$$

Для того чтобы дополнить эту систему недостающими n_a уравнениями, следует воспользоваться “самосогласованными условиями”, которые выражают кинематическую связь – равенство растяжения (или сжатия) j -го привода и поперечного прогиба пластины в точке его расположения. С учетом обозначения (2.4) и выбора конечных сумм в представлении (2.1) можно написать соотношение

$$w_j = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_{mn} \text{ff}_{mn}(j)$$

или

$$\sum_{l=1}^{n_a} \delta_{jl} w_l - \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_{mn} \text{ff}_{mn}(j) = 0 \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) и (2.5) вместе представляют систему $n_a + \bar{l}$ линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных WA.

В матричной форме система имеет вид

$$\text{MA} \cdot \text{WA} = \text{FD} \quad (2.7)$$

Матрицу MA и столбец свободных членов FD удобно представить в виде

$$MA = \begin{bmatrix} I_{n_a} & -FF_{n_a \times \bar{l}} \\ KF_{\bar{l} \times n_a} & GG_{\bar{l} \times \bar{l}} \end{bmatrix}, \quad FD = \begin{bmatrix} \theta_{n_a} \\ FD2_{\bar{l}} \end{bmatrix},$$

где I_{n_a} – единичная матрица размерности n_a ,

$$-FF_{n_a \times \bar{l}} = \begin{pmatrix} -ff_{00}(1) & -ff_{01}(1) & \dots & -ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(1) & -ff_{\bar{m}\bar{n}}(1) \\ -ff_{00}(2) & -ff_{01}(2) & \dots & -ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(2) & -ff_{\bar{m}\bar{n}}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -ff_{00}(n_a) & -ff_{01}(n_a) & \dots & -ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(n_a) & -ff_{\bar{m}\bar{n}}(n_a) \end{pmatrix}$$

$$KF_{\bar{l} \times n_a} = \begin{pmatrix} \frac{K_1}{D} ff_{00}(1) & \frac{K_2}{D} ff_{00}(2) & \dots & \frac{K_{n_a}}{D} ff_{00}(n_a) \\ \frac{K_1}{D} ff_{01}(1) & \frac{K_2}{D} ff_{01}(2) & \dots & \frac{K_{n_a}}{D} ff_{01}(n_a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{K_1}{D} ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(1) & \frac{K_2}{D} ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(2) & \dots & \frac{K_{n_a}}{D} ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(n_a) \\ \frac{K_1}{D} ff_{\bar{m}\bar{n}}(1) & \frac{K_2}{D} ff_{\bar{m}\bar{n}}(2) & \dots & \frac{K_{n_a}}{D} ff_{\bar{m}\bar{n}}(n_a) \end{pmatrix}$$

$$GG_{\bar{l} \times \bar{l}} = \begin{pmatrix} G_{00}(0,0) & G_{00}(0,1) & \dots & G_{00}(\bar{m}, \bar{n}-1) & G_{00}(\bar{m}, \bar{n}) \\ G_{01}(0,0) & G_{01}(0,1) & \dots & G_{01}(\bar{m}, \bar{n}-1) & G_{01}(\bar{m}, \bar{n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(0,0) & G_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(0,1) & \dots & G_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(\bar{m}, \bar{n}-1) & G_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(\bar{m}, \bar{n}) \\ G_{\bar{m}\bar{n}}(0,0) & G_{\bar{m}\bar{n}}(0,1) & \dots & G_{\bar{m}\bar{n}}(\bar{m}, \bar{n}-1) & G_{\bar{m}\bar{n}}(\bar{m}, \bar{n}) \end{pmatrix}$$

θ_{n_a} – нулевой столбец длины n_a ,

$$FD2_{\bar{l}} = \frac{F_0}{D} \begin{pmatrix} ff_{00}(j0) \\ ff_{01}(j0) \\ \vdots \\ ff_{\bar{m}(\bar{n}-1)}(j0) \\ ff_{\bar{m}\bar{n}}(j0) \end{pmatrix}$$

Решение системы (2.7) имеет вид

$$WA = MA^{-1} \cdot FD$$

3. Численные результаты – примеры функций влияния приводов. Для примера рассмотрим пластину и приводы со следующими значениями параметров:

$$a = 100 \text{ мм}, \quad b = 60 \text{ мм}, \quad h = 3 \text{ мм}, \quad E = 150 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.3,$$

$$n_a = 23, \quad K_j = 2 \times 10^7 \text{ Н / м}, \quad F_0 = 400 \text{ Н}$$

Приводы расположены в шахматном порядке (см. правую часть рис. 1). Единицы измерения по осям – мм. Левый нижний привод на схеме имеет в мм координаты (10,8), расстояние между приводами вдоль линии по горизонтали – 10 мм, по вертикали – 11 мм.

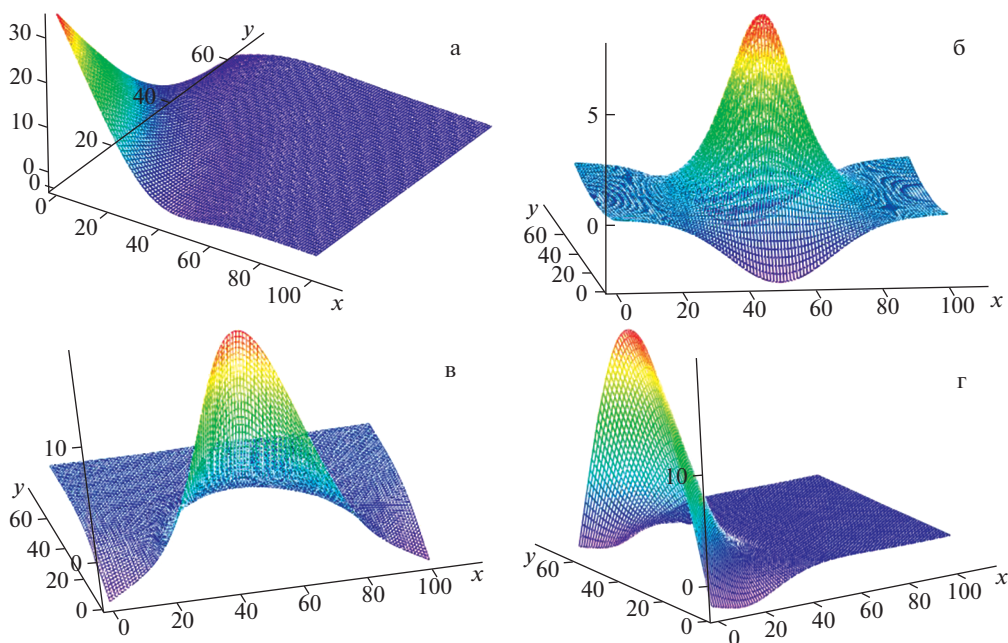


Рис. 2. Характерные функции влияния приводов: (а) – угловой привод, (б) – центральный привод, (в) – привод сбоку на середине стороны a , (г) – привод сбоку на середине стороны b . По горизонтальным осям x и y единицы измерения – мм, по вертикальной – мкм.

На рис. 2 изображены характерные функции влияния приводов.

Заключение. Показано, что полученное решение задачи о прогибе тонкой пластины со свободными краями, на которую сосредоточенно воздействуют деформируемые по закону Гука упругие приводы, при устремлении длины одной из сторон пластины к нулю совпадает с решением задачи о прогибе тонкой балки с теми же физическими параметрами. Проверено, что для рассчитанных функций влияния отсутствует “ошибка совместного действия” (*pinning error* [3]): если жесткости всех приводов одинаковы и в каждом из них, в отдельности, развивается одинаковая растягивающая сила, то суммы всех их функций влияния дадут прогиб в виде параллельного сдвига плоскости пластины на величину, получающуюся из закона Гука для деформации одного привода под действием этой внутренней растягивающей силы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Канев Ф.Ю., Лукин В.П. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования. Томск: Изд. Инст. оптики атмосферы СО РАН, 2005.
3. Tyson R.K. Principles of Adaptive Optics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.
4. Lemaître G.R. Astronomical Optics and Elasticity Theory – Active Optics Methods. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
5. Li R., Zhong Y., Li M. Analytic bending solutions of free rectangular thin plates resting on elastic foundations by a new symplectic superposition method // Proc. R. Soc. Ser. A. 2013. P. 469–486.
6. Li R., Tian B., Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading // Meccanica. 2013. V. 48. P. 2497–2510.
7. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наук. думка, 1972. 508 с.

8. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд. МГУ–Наука, 2004.
9. *Ляхов Д.М.* Оптимальное размещение приводов для квадратных зеркал со свободными краями // *Автометрия*. 2016. Вып. 1 (52). С. 70–78.
10. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967, 444 с.

Deflection of a Thin Rectangular Plate with Free Edges under Concentrated Loads

V. N. Fedoseyev^{a,#} and D. A. Yagnyatinskiy^{a,##}

^aFSUE “SRI SIA “LUCH”, Podolsk, Russia

[#]e-mail: fyn@luch.com.ru

^{##}e-mail: day@luch.com.ru

The analytical solution for the deflection of a thin rectangular plate with free edges under concentrated loads from actuators that lean on infinitely rigid foundation is presented. The solution is based on the application of the integral transform and takes into consideration the kinematic pairs of the plate and each actuator, which is being deformed according to Hooke’s law.

Keywords: thin rectangular plate, deflection, free edge, concentrated load, actuator, integral transform, kinematic pairs

REFERENCES

1. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. N.Y.: McGraw-Hill, 1959. 580 p.
2. *Kanev F.Yu., Lukin V.P.* Adaptive Optics. Numerical and Experimental Researches. (Adaptivnaya optika. chislennyye i eksperimentalnyye issledovaniya) Tomsk: Publ. House of IAO SB RAS, 2005. (in Russian). 2005.
3. *Tyson R.K.* Principles of Adaptive Optics. Boca Raton: CRC Press, 2015.
4. *Lemaitre G.R.* Astronomical Optics and Elasticity Theory – Active Optics Methods. Berlin: Springer, 2009.
5. *Li R., Zhong Y., Li M.* Analytic bending solutions of free rectangular thin plates resting on elastic foundations by a new symplectic superposition method // *Proc. R. Soc. Ser. A*, 2013, pp. 469–486.
6. *Li R., Tian B., Zhong Y.* Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading // *Meccanica*, 2013, vol. 48, pp. 2497–2510.
7. *Timoshenko S.P.* A course in the theory of elasticity. (Kurs Teorii Uprugosti) Nauk. dumka, 1972. 508 p. (in Russian).
8. *Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V.* Lectures on mathematical physics. (Lektsii po matematicheskoy fizike) Moscow: MSU Press–Nauka, 2004. (in Russian).
9. *Lyakhov D.M.* Optimal arrangement of actuators for square mirrors with free edges, *Optoelectronics // Instrumentation and Data Processing*, 2016 vol. 52 (1), pp. 57–64.
10. *Timoshenko S.P.* Vibration Problems in Engineering. Toronto: D. Van Nostrand, 1955. 468 p.