ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 5–6, с. 817–822

УДК 531.36:534.1:539.3

О СТОЛКНОВЕНИИ ЧАСТИЦЫ С УПРУГОЙ ПЛЕНКОЙ

© 2019 г. А. П. Блинов[1,*]

[1] *Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия*
**e-mail: apbblinov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2017 г.
После доработки 25.02.2018 г.
Принята к публикации 27.03.2018 г.

Рассматривается задача о плоском движении частицы (материальной точки) после столкновения ее с упругой, невесомой пленкой, натянутой на жесткий плоский каркас в виде неподвижного кольца. Дается оценка снизу для перемещения частицы по нормали к плоскости кольца после центрального и косого столкновения с пленкой, и приближенно определяется траектория частицы при косом столкновении, когда опорный контур выпуклый и зеркально симметричный.

Ключевые слова: частица, упругая пленка, конус, траектория

DOI: 10.1134/S0032823519040040

Рассмотрим движение частицы единичной массы после столкновения ее с упругой, невесомой пленкой, натянутой на каркас в виде жесткого неподвижного кольца единичного радиуса. В начальный момент частица со скоростью $\mathbf{v}_0$ пересекает плоскость кольца (рис. 1).

Выберем неподвижную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ее начало совпало с центром кольца, ось z направлена по нормали к плоскости кольца в сторону начальной скорости частицы, а ось x – через точку столкновения $(x_0, 0, 0)$ $(0 < x \ll 1)$.

Если точка падения совпадает с центром кольца $x_0 = 0$, то ось x направлена в ту же сторону, что и проекция скорости частицы на плоскость кольца.

Предположим, что сила трения частицы на пленке, как и другие внешние силы, кроме силы упругой деформации пленки отсутствуют.

Приняв за единицу времени отношение радиуса кольца к скорости частицы в момент столкновения, уравнение ее движения будем считать безразмерным.

Ранее показано [1], что при центральном столкновении тела в форме диска с упругой пленкой, натянутой на кольцо, она принимает одну из двух возможных экстремальных форм в виде катеноида. Площадь его поверхности, в частности, меньше площади соответствующего описанного усеченного конуса и близка к площади последнего. Можно предположить, что при переходе от тела в форме диска к телу в форме шара весьма малого радиуса при малом отклонении точки падения (x_0) от центра пленки площадь боковой поверхности соответствующего описанного косого конуса будет близка к площади поверхности деформированной пленки (оставаясь бóльшей последней).

1. Площадь косого конуса с круглым опорным контуром. Для удобства временно введем еще систему координат $OXYZ$, которая получается из системы $oxyz$ сдвигом вдоль оси x на величину $\Delta \geq 0$, соответствующую проекции вершины косого конуса на

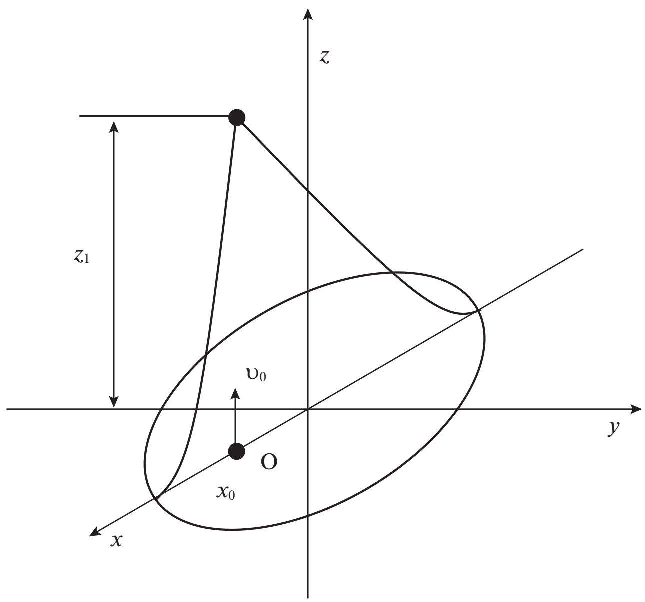

Рис. 1. Геометрия задачи.

ось x. Пусть Z_1 обозначает аппликату вершины конуса (в момент столкновения $\Delta = x_0$).

Точку O примем за начало полярной системы координат ρ, β, в которой угол β отсчитывается от оси X (или x), а ρ – расстояние от точки O до окружности радиуса единица с центром в точке o. В этих координатах уравнение окружности имеет вид

$$\rho^2 = 1 + \Delta^2 \cos 2\beta - 2\Delta \cos\beta\sqrt{1 - \Delta^2 \sin^2 \beta} \tag{1.1}$$

Элемент площади сектора $dS_c = \frac{1}{2}\rho^2 d\beta$ и элемент площади конуса, проектирующегося в этот сектор, связаны соотношением $dS_0 = dS_c / \cos\varphi$, где φ – угол между нормалью $\mathbf{N}$ к элементу dS_0 и осью Z.

Вектор $\mathbf{N}$ определяется векторным произведением $\mathbf{N} = [\mathbf{m}\dot{\mathbf{m}}]$ [3], где вектор $\mathbf{m}$ лежит на образующей конуса: $\mathbf{m} = (-\rho\cos\beta, -\rho\sin\beta, Z_1)$, $(0, 0, Z_1)$ – координаты вершины конуса,

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{d\mathbf{m}}{d\beta} = (\rho\sin\beta - \dot{\rho}\cos\beta, -\rho\cos\beta - \dot{\rho}\sin\beta, 0)$$
$$\dot{\rho} = \frac{\Delta}{\rho}\left(\sin\beta\sqrt{1 - \Delta^2\sin^2\beta} - \Delta\sin 2\beta + \frac{1}{2}\Delta^2\frac{\cos\beta\sin 2\beta}{\sqrt{1 - \Delta^2\sin^2\beta}}\right) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{N} = \left(Z_1(\varphi\cos\beta + \rho\sin\beta), Z_1(\varphi\sin\beta - \rho\cos\beta), \rho^2\right) \tag{1.3}$$

$$\cos\varphi = \frac{\rho^2}{\sqrt{Z_1^2\left(\rho^2 + \dot{\rho}^2\right) + \rho^4}} \tag{1.4}$$

Таким образом, площадь поверхности косого конуса определяется формулой

$$S_0 = \int_0^{\pi} \sqrt{Z_1^2\left(\rho^2 + \dot{\rho}^2\right) + \rho^4}\,d\beta \tag{1.5}$$

Для случая, когда смещение $\Delta \ll 1$ приведем асимптотическое представление формулы (1.5). Учитывая, что $\rho^2 = 1 - 2\Delta\cos\beta + \Delta^2\cos 2\beta + \Delta^3\cos\beta + o\left(\Delta^3\right)$, с точностью до $o\left(\Delta^2\right)$ получаем

$$\rho = 1 - \Delta\cos\beta + \frac{1}{2}\Delta^2\sin\beta + o\left(\Delta^2\right) \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\dot{\rho} = \Delta\sin\beta - \Delta^2\sin 2\beta - \frac{1}{2}\Delta^3\left(\cos\beta\sin 2\beta + \sin^3\beta\right) + o\left(\Delta^3\right)\\ \dot{\rho}^2 = \Delta^2\sin^2\beta - \Delta^3\sin\beta\sin 2\beta + o\left(\Delta^3\right)\end{gathered} \tag{1.7}$$

Следовательно

$$S_0 = \int_0^{\pi}\Big[Z_1^2\left(1 - 2\Delta\cos\beta + \Delta^2\left(\cos 2\beta + \sin^2\beta\right)\right) + 1 -$$
$$- 4\Delta\cos\beta + 2\Delta^2\left(\cos 2\beta + 2\cos^2\beta\right)^{1/2}\Big]d\beta + o\left(\Delta^2\right)$$

или

$$S_0 = \pi\sqrt{Z_1^2 + 1} + \frac{\pi}{4}\Delta^2 Z_1^2\left(1 + Z_1^2\right)^{3/2} \tag{1.8}$$

2. Косое столкновение частицы с пленкой, натянутой на круглое кольцо. Вернемся к исходной системе координат $oxyz$. Заменяя Δ на x_0, Z на z запишем приближенное выражение приращения площади пленки по сравнению с исходным значением π

$$S = S_0 - \pi = \frac{\pi}{8}\left(4z^2 - z^4 + 2x^2z^2\right) + o\left(x^2, z^2\right) \tag{2.1}$$

Энергия U упругой пленки, имеющей некоторое предварительное натяжение на каркасе пропорциональна приращению ее площади после столкновения с частицей, т.е. $U = \mu S$ ($\mu = \mathrm{const}$ – коэффициент пропорциональности. В случае мыльной пленки μ – коэффициент поверхностного натяжения).

Для описания траектории частицы воспользуемся уравнением (2.2) [2], в котором координаты β, q, заменим на координаты плоскости x, z, соответственно. При этом коэффициенты первой квадратичной формы $E = G = 1$ и $V = -U = -\frac{\pi\mu}{8}(4z^2 - z^4 + 2x^2z^2) + o(x^4, z^4)$.

Это уравнение здесь имеет вид

$$z'' = -\frac{1}{2}\left(1 + z'^2\right)\frac{V_x' z' - V_Z'}{V + h}, \tag{2.2}$$

где h – полная энергия системы частица-пленка $h = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) + U$, $z' = dz/dx$, $\dot{z} = dz/dt$. $V_x' = -\frac{1}{2}\pi\mu x z^2$, $V_z' = -\frac{1}{2}\pi\mu\left(2z - z^3 + x^2 z\right)$.

Таким образом, уравнение траектории принимает вид:

$$Z'' = -\frac{\pi\mu}{4}\left(1 + Z'^2\right)\frac{-xz^2z' + 2z - z^3 + x^2z}{h - \frac{\pi\mu}{8}\left(4z^2 - z^4 + 2x^2z^2\right)} \tag{2.3}$$

Если в числителе оставить слагаемые не выше первого порядка малости относительно координат и их производных, а в знаменателе – не выше второго порядка, и, если частица падает на пленку не по нормали к последней, то приближенно

$$z'' = -\frac{1}{2}\frac{\pi\mu z}{h - \frac{1}{2}\pi\mu z^2} \tag{2.4}$$

После интегрирования (2.4) получим

$$z = \sqrt{\frac{2hc_0}{\pi\mu}}\sin\left(\pm\sqrt{\frac{\pi\mu}{2h}}(x - x_0)\right), \tag{2.5}$$

где $c_0 = z'$ при $x = x_0$.

При этом скорость частицы в каждой точке траектории определяется из интеграла энергии h.

Если горизонтальная составляющая скорости падения частицы направлена к центру ($x < x_0$), то в (2.5) выбираем знак минус и максимальное значение прогиба пленки $\sqrt{2hc_1/\pi\mu}$ достигаются при $\sqrt{\pi\mu/2h}(x - x_0) = -\frac{\pi}{2}$, а точка отделения частицы от пленки x_0 определяется из соотношения $\sqrt{\pi\mu/2h}\left(x_\rho - x_0\right) = -\pi$ и наоборот.

Заметим, что траектория частицы, определенная уравнением (2.3) лежит несколько ниже реальной траектории, так как площадь конуса всегда больше площади деформации пленки.

3. Скольжение частицы с учетом трения. Влияние сухого трения (как наиболее важного здесь фактора диссипации энергии) на скольжение частицы в плоскости x, z выясним исходя из модели кулоновского трения $|\mathbf{F}| = \nu|\mathbf{Q}|$, где $\mathbf{F}$ – сила трения, направленная по касательной к траектории частицы, $\mathbf{Q}$ – сила давления частицы на пленку $|\mathbf{Q}| = \mu\sqrt{(\partial S/\partial x)^2 + (\partial S/\partial z)^2}$, ν – коэффициент трения

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cong -\frac{\pi}{2}xz^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial Z} \cong \frac{\pi}{2}\left(2 + z^2 - x^2\right)z$$

$$|\mathbf{Q}| = \frac{1}{2}\mu\pi z\sqrt{x^2z^2 + \left(2 + z^2\right)^2 - 2x^2\left(2 + z^2\right) + x^4} + O\left(x^4, z^4\right)$$

Пусть γ обозначает острый угол между касательной к траектории и осью x. Тогда $F_x = -\nu|\mathbf{Q}|\cos\gamma$, $F_z = -\nu|\mathbf{Q}|\sin\gamma$, $\gamma = \operatorname{arctg}(z/|x|)$.

В процессе скольжения частицы знак x, (а значит и знак F_x) может меняться. Однако, в рассматриваемом (типичном) случае будем считать, что от начала движения и до размыкания контакта частицы и пленки знак $\dot{x}$ совпадает со знаком $\dot{x}(o) > 0$. Тогда $F_x \le 0$ и $F_z \le 0$. (В противном случае надо следить за сменой знака $\dot{x}$ и менять знак F_x.)

Присутствие в уравнениях движения угла γ как функции x существенно усложняет эти уравнения. Для упрощения задачи воспользуемся ее решением без учета трения в разд. 2 с прежними начальными условиями. Таким образом, приближенное решение будет определяться из лагранжевой системы уравнений

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\pi\mu x z^2 = F_x, \quad \ddot{z} - \frac{1}{2}\pi\mu\left(2 + z^2 - x^2\right)z = F_z$$

4. Площадь конуса с произвольным опорным контуром. Пусть вершина конуса лежит на оси z, а опорный контур L описывается уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\beta)$. Тогда, как следует из предыдущего, площадь конуса определяется интегралом

$$S_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{\cos\varphi}d\beta,$$

где $\mathbf{N} = [\mathbf{m}\dot{\mathbf{m}}] = \left(z_1(\rho\cos\beta - \dot{\rho}\sin\beta), z_1(\rho\sin\beta - \dot{\rho}\cos\beta), \rho^2\right)$, $\cos\varphi = \mathbf{kN}/|\mathbf{N}|$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, z_1 — аппликата вершины конуса.

Таким образом, в случае произвольного гладкого контура L площадь конуса определяется интегралом

$$S_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^4 + Z_1^2\left(\rho^2 + \dot{\rho}^2 - 2\rho\dot{\rho}\sin 2\beta\right)}d\beta \tag{4.1}$$

5. О движении частицы в более общих случаях. Если опорный контур имеет центр симметрии, то при падении частицы на пленку по нормали в этот центр, частица будет продолжать двигаться по этой нормали (по оси z).

Перемещению частицы z можно дать оценку снизу, если контур L заменим некоторым выпуклым симметричным контуром L_0, вписанным в контур L. В качестве контура L_0 можно взять, например, окружность или замкнутую линию, состоящую из двух полуокружностей, раздвинутых по направлению нормали к разрезу окружности. (В последнем случае площадь конической поверхности будет состоять из площадей пары треугольников с основаниями равными величине раздвижения полуокружностей с общей вершиной на оси z и — пары кусков площадей косых конусов, опирающихся на дуги полуокружностей.)

В более общих случаях параметр $\rho(\beta)$ можно представить в виде конечной суммы ряда Фурье по косинусам $\beta \in [0, \pi]$. Тогда подкоренное выражение в интеграле (4.1) с известной точностью можно представить так же в виде конечной суммы ряда Фурье

$$A_0 + a_0 + \sum_{n=1}^{m}\left[\left(A_n + a_n z_1^2\right)\cos n\beta + \left(B_n + b_n z_1^2\right)\sin n\beta\right] + o\left(z_1^2\right)$$

(m_1, m_2 — определяются заданной точностью вычислений).

Для краткости последнее выражение обозначим как $f_1(\beta) + f_2(\beta)z_1^2$.

Для приближенного вычисления интеграла (4.1) или интеграла

$$S_0 = \int_0^{\pi}\sqrt{f_1(\beta) + f_2(\beta)z_1^2}\,d\beta \tag{5.1}$$

Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского

$$\int_0^{\pi}\sqrt{f_1(\beta) + f_2(\beta)z_1^2}\,d\beta \le \pi\sqrt{\int_0^{\pi}\left[f_1(\beta) + f_2(\beta)z_1^2\right]d\beta}, \quad f_1(\beta) > 0 \tag{5.2}$$

Это неравенство усиливает оценку деформации снизу, то есть со стороны перехода к более жесткой упругой системе.

В случае малых деформаций ($z_1 \ll 1$) получим

$$S_0 \cong \pi\left(A + Bz_1^2\right) + o\left(z_1^2\right), \tag{5.3}$$

где $A = \left[\int_0^\pi [f_1(\beta)\, d\beta]\right]^{1/2} > 0$,

$$S = S_0 - \pi A \approx \pi B Z_1^2 \tag{5.4}$$

Следовательно, движение частицы после столкновения с пленкой будет приближенно описываться одним дифференциальным уравнением второго порядка относительно z_1 с постоянными коэффициентами.

Замечание 1. В случае зеркальной симметрии опорного контура с учетом формулы (4.1) решается задача о плоском движении частицы при косом столкновении как в разд. 2.

Замечание 2. Наличие иных потенциальных сил, кроме сил упругости, например, силы тяжести частицы, не исключает применение формулы траектории [1]. При этом формулы разд. 2 и 5 несколько усложнятся.

Рассмотренная задача может быть полезной при разработке аварийных гасителей скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блинов А.П.* О столкновении тела с упругой пленкой // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 541–547.
2. *Блинов А.П.* О движении материальной точки на поверхности // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С. 23–28.
3. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.

The Collision of a Point Particle with an Elastic Film

A. P. Blinov[a,#]

[a] *Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: apbblinov@yandex.ru*

It is considered the problem of the plane motion of a particle (material point) after its collision with an elastic, weightless film stretched on a rigid flat frame in the form of a fixed ring. A lower estimate is given for the displacement of the particle along the normal to the plane of the ring after its central and oblique collisions with the film, and the particle's trajectory is approximately determined for oblique collisions when the support contour is convex and mirror symmetric.

Keywords: particle, elastic film, cone, trajectory

REFERENCES

1. *Blinov A.P.* Collision of a body with an elastic membrane // JAMM, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 381–386.
2. *Blinov A.P.* On the motion of a mass point on a surface // Mech. Solids, 2007, vol. 42, no. 1, pp. 19–23.
3. *Norden A.P.* A Short Course in Differential Geometry (Kratkii kurs differentsial'noi geometrii). Moscow: Fizmatgiz, 1958. 244 p. (in Russian)