

УДК 533.6.011:697.4

**ЗАДАЧА НЬЮТОНА О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ
ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА. ИСТОРИЯ РЕШЕНИЯ¹**© 2019 г. А. Н. Крайко^{1,2,*}¹ *Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия*² *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия***e-mail: akraiko@ciam.ru*

Поступила в редакцию 04.09.2019 г.

После доработки 30.09.2019 г.

Принята к публикации 02.10.2019 г.

Рассматривается задача Ньютона о построении осесимметричной головной части минимального сопротивления. Решение этой задачи было дано, хотя и без каких-либо объяснений, самим Ньютоном в основном труде его жизни – “Математических началах натуральной философии”. Правда, готовое решение Ньютона не было понято аэродинамиками, обратившимися в середине XX века к решению задачи Ньютона и некоторых ее обобщений. На русский язык “Начала” Ньютона перевел А.Н. Крылов, давший подробные разъяснения многих утверждений Ньютона, в том числе, по обсуждаемой задаче. Более того, объяснив одно из таких утверждений, А.Н. Крылов сформулировал необходимое условие минимума сопротивления, мимо которого прошли все читавшие Ньютона, причем не только аэродинамики, но и такой авторитет вариационного исчисления как Лежандр. Однако и разъяснения А.Н. Крылова не помогли понять решение Ньютона единственным, кому они были доступны – советским аэродинамикам. Описание истории решения задачи Ньютона, в которой автору довелось участвовать, основная цель статьи.

Ключевые слова: формула Ньютона, головная часть осесимметричного тела, волновое сопротивление, условия Лежандра и Крылова

DOI: 10.1134/S0032823519050060

Введение. В середине XX века стали актуальны задачи построения оптимальных головных частей, которые, примыкая к заданному телу вращения, обладали бы минимальным сопротивлением при полете со сверх- и гиперзвуковыми скоростями. Взяв для определения давления на искомым головных частях весьма простую локальную формулу, предложенную еще Ньютоном, аэродинамики США и СССР попытались решить возникшие задачи при разных дополнительных ограничениях. Решение одной из таких задач (“задачи Ньютона”), отвечающей заданному удлинению головной части, в форме краткого “Поучения” из 30 строк и двух рисунков дано Ньютоном в его “Математических началах натуральной философии”. В России “Начала” в переводе с латыни А.Н. Крылова были изданы сначала в 1916 г., затем в 1936 г. в собрании сочинений А.Н. Крылова и только в 1989 г. в том же переводе – отдельным изданием. Несомненное достоинство крыловского перевода – подробные примечания и разъяснения, в том числе, упомянутого “Поучения”, многократно превышающие по объему

¹ В связи с юбилейной датой крупного специалиста в области газовой динамики и аэродинамики редакционная коллегия журнала публикует воспоминания А.Н. Крайко.

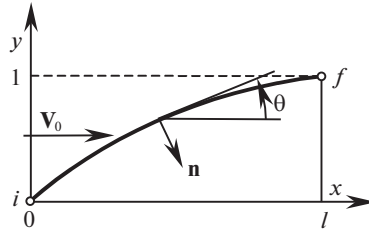


Рис. 1. К определению волнового сопротивления головной части заданного удлинения $l = L/Y$.

оригинальный текст Ньютона. Ничего подобного нет в зарубежных переводах “Начал”: у нас британского гения переводил русский гений.

Несмотря на наличие, казалось бы, готового решения (правда, без объяснений, зато с бесценными разъяснениями А.Н. Крылова), и задача Ньютона, и ее обобщения (например, с заменой заданного удлинения фиксированным объемом головной части) оказались не по зубам аэродинамикам середины XX века. Причина — их математическая подготовка, в которой место только входившей в жизнь “Математической теории оптимального управления” занимало “Вариационное исчисление” в основном с двусторонними экстремальями, определяемыми уравнением (или уравнениями) Эйлера. В обсуждаемых задачах для решения также нужны односторонние экстремали, место которых в “Началах” и в комментариях А.Н. Крылова заняли геометрические построения, эквивалентные, но непривычные и поэтому трудные для понимания читателям XX века.

Более полное описание сказанного выше, а также захватывающего (почти детективного) продолжения с середины XX до начала XXI века истории решения задачи построения оптимальных головных частей, в которой автору и его учителям Горимиру Горимировичу Черному и Юрию Дмитриевичу Шмыглевскому посчастливилось участвовать, — основной предмет данной статьи.

1. Задача Ньютона и проблемы с ее решением. В середине XX века выяснилось, что предложенная Ньютоном формула для давления p на поверхности тела с внутренней нормалью \mathbf{n} к его контуру:

$$p - p_0 = \rho_0 V_0^2 \alpha^2 = \rho_0 V_0^2 \sin^2 \theta, \quad \alpha = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0)/V_0 \tag{1.1}$$

неплохо работает при гиперзвуковых скоростях полета. Здесь ρ — плотность газа, \mathbf{V} — вектор его скорости, θ — угол касательной к контуру тела с осью x , а индексом 0 отмечены параметры набегающего потока. Формула (1.1) получается, если принять, что частицы газа движутся до поверхности тела, не изменяя своей начальной скорости \mathbf{V}_0 , а при соударении с телом, потеряв ее нормальную к поверхности составляющую, продолжают движение вдоль его поверхности. Тогда же аэродинамики, используя формулу (1.1), обратились к решению задачи Ньютона о построении контура if плоской симметричной или осесимметричной головной части минимального сопротивления при заданных длине L и полувысоте или радиусе основания Y для плоских и осесимметричных тел (рис. 1, декартовы или цилиндрические координаты x и y отнесены к Y , $l = L/Y$ — удлинение головной части) и ее обобщений и сразу столкнулись с неожиданными, на первый взгляд, трудностями. Поясним их суть.

При выборе полувысоты или радиуса основания в качестве линейного масштаба $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq 1$, и для головной части с образующей $x = x(y)$ в согласии с формулой (1.1) коэффициент волнового сопротивления имеет вид ($v = 0$ для плоских тел и $v = 1$ для осесимметричных)

$$c_x = (1 + \nu) \int_0^1 y^\nu \varphi(x') dy; \quad x' \equiv \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \theta, \quad \varphi(x') = \frac{1}{1 + x'^2}$$

Отсюда при малых варьированиях контура, т.е. при замене x и x' на $x + \delta x$ и $x' + \delta x'$ с точностью до квадратов вариаций для приращения c_x получим

$$\Delta c_x = (1 + \nu) \int_0^1 \left[-\frac{d(y^\nu \varphi_{x'})}{dy} \delta x + y^\nu \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy \quad (1.2)$$

Поэтому, если контур if реализует минимум c_x , то при малых δx и $\delta x'$ в силу выражения (1.2) условия оптимальности сведутся к равенству (необходимому условию экстремума c_x – уравнению Эйлера) и неравенству (необходимому условию минимума c_x – условию Лежандра)

$$\frac{d(y^\nu \varphi_{x'})}{dy} = 0, \quad \varphi_{x'x'} \geq 0, \quad 0 < y < 1 \quad (1.3)$$

Уравнение Эйлера интегрируется и дает интеграл

$$y^\nu \varphi_{x'} = \operatorname{const}, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.4)$$

В плоском случае отсюда следует, что

$$x' = \operatorname{const} = l,$$

т.е. оптимальный контур – прямая: $x = ly$ при $0 \leq y \leq 1$. Правда, возникает вопрос: при любых ли $x' = l$ будет выполняться условие Лежандра: $\varphi_{x'x'} \geq 0$ и что делать, если оно нарушится? Согласно формуле для $\varphi(x')$ имеем

$$\varphi_{x'}(x') = \frac{-2x'}{(1 + x'^2)^2}, \quad \varphi_{x'x'}(x') = 2 \frac{3x'^2 - 1}{(1 + x'^2)^3}, \quad (1.5)$$

и это условие в осесимметричном и в плоском случаях выполняется при

$$x' \geq 1/3^{1/2} \Leftrightarrow \theta \leq 60^\circ \quad (1.6)$$

Для плоской головной части $x' = l$, и при $l < 1/3^{1/2}$ условие Лежандра нарушается, т.е. найденное решение непригодно.

Еще хуже ситуация с осесимметричными головными частями, для которых в силу интеграла (1.4): $y \varphi_{x'} = \operatorname{const} = (y \varphi_{x'})_i = 0 \cdot (\varphi_{x'})_i = 0$. Отсюда в общем случае $\varphi_{x'} = 0$, а в силу формулы (1.5) $\varphi_{x'} = 0$ при $x' = 0$ и $x' = \infty$. Значению $x' = 0$ отвечают торцы: $x \equiv \operatorname{const}$, а $x' = \infty$ – цилиндрические участки: $y \equiv \operatorname{const}$. При $0 < l < \infty$ любая соединяющая точки i и f их ступеньчатая комбинация дает не минимум, а максимум $c_x = 1$.

С такими же проблемами столкнулись Г.Г. Черный и его аспирант А.Л. Гонор [1], которые попытались решить ту же задачу в рамках формулы (1.1), подправленной А. Буземаном (“закона сопротивления Ньютона–Буземана”). В результате они ограничились контурами тел вращения с протоком.

2. К решению задачи Ньютона в Советском Союзе. Немного предыстории. С осени 1956 г. автор – студент МФТИ (Московского физико-технического института) с базовой кафедрой в ЦИАМ (Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова) проходил практику в лаборатории “Газовой динамики” (лаб. № 4) этого института. Начальником лаб. № 4 был тогда 33-х летний Горимир Горимирович Черный, а руководителем автора – экспериментатор Владимир Васильевич Поляков.

По окончании в начале 1959 г. МФТИ автор стал постоянным сотрудником лаб. № 4, а с осени того же года по инициативе В.В. Полякова был командирован в Вычисли-

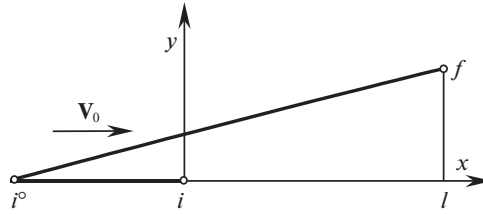


Рис. 2. Идея “мысленного эксперимента”, приведшего к решению задачи.

тельный центр (ВЦ) АН СССР для овладения численными методами газовой динамики и опытом работы на лучшей отечественной вычислительной технике. Там ему повезло сблизиться с Юрием Дмитриевичем Шмыглевским – признанным специалистом по вариационным задачам газовой динамики, заведующим лаборатории “Механики сплошной среды” ВЦ. Общение с ним оказалось весьма плодотворным, и вскоре после докладов на руководимом Г.Г. Черным семинаре в лаб. № 4 ЦИАМ автора также признали специалистом в указанной области.

Обсуждая с Ю.Д. Шмыглевским разные проблемы, автор, как и его новый коллега и учитель, всерьез интересовался оптимальным профилированием “в точной постановке” – в рамках полных уравнений газовой динамики идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Приближенные постановки с привлечением локальных формул для давления типа формулы Ньютона или Ньютона–Буземана интересовали его слегка (“для общего развития”). Так было и со статьей [1], прочитанной “по диагонали” без попыток разобраться, в чем дело.

Ситуация резко изменилась в конце осени – начале зимы 1962 г. В декабре того года фирма “Боинг” проводила в своей штаб-квартире в Сиэтле конференцию по оптимальным аэродинамическим формам. Из советских аэродинамиков на нее был приглашен Г.Г. Черный. Один из его докладов касался работы [1] и, естественно, описанной выше проблемы с осью симметрии, которую они с Александром Львовичем (тогда “Сашей”) Гонором не могли решить. Поэтому А.Л. Гонор, повстречав в ЦИАМ своего тезку и, вроде бы, специалиста, сказал: “Саша, подумай, вдруг, чего-нибудь сообразишь”.

Приехав в ВЦ, автор этой статьи взял в библиотеке “Основы вариационного исчисления” М.А. Лаврентьева и Л.А. Люстерника, вспомнил то, чему его учили в МФТИ, проделал необходимые выкладки, пришел к результатам, описанным в разд. 1, и, ничего не сообразив, пошел домой, чтобы утром проснуться с готовым решением.

На следующее утро автор проделал такой мысленный эксперимент [2]. Ранее, как само собой разумеющееся, полагалось, что из точки i образующая if идет сразу вправо. А если не так? Составим ее из двух участков (рис. 2): идущего влево отрезка ii^0 оси x и наклонного участка i^0f . Для такой образующей в рамках формулы Ньютона (1.1) и без вариационного исчисления $c_x \rightarrow 0$ при $x_i \rightarrow -\infty$. Но – тут же спохватился экспериментатор – мы ведь задавали длину головной части, и потому нельзя вылезать за ось y ! Значит, оптимальный контур может содержать передний торец id (рис. 3), появляющийся из-за ограничения длины головной части как участок краевого экстремума (КЭ). На нем допустимые вариации $\delta x \geq 0$, и потому в отличие от участков двустороннего экстремума (ДЭ) с допустимыми δx любого знака на нем уравнение Эйлера выполняться не обязательно.

Правда, как установлено выше, на торце id – вертикальном участке КЭ уравнение Эйлера, тем не менее, выполняется, зато нарушается условие Лежандра. Однако это несущественно. Важно другое: по формуле Ньютона величину c_x уменьшают выемки

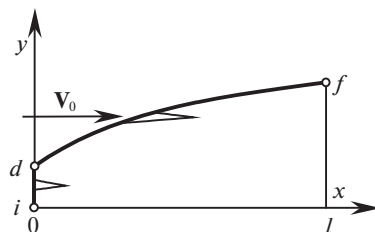


Рис. 3. Оптимальная осесимметричная головная часть заданного удлинения l и ее запрещенные вариации (“выемки”).

на любом участке образующей (рис. 3), и чем их больше, тем меньше c_x . Для контура в виде “ежа” с бесконечным числом таких выемок и выступов $c_x = 0$. Однако, несмотря на это, решение с передним торцом верно, поскольку торец – участок КЭ не только из-за ограничения по длине головной части, но и как граница применимости формулы Ньютона. Для головной части она справедлива, если $0 \leq \theta \leq \pi/2$, и передний торец – участок КЭ одновременно и по x , и по θ .

Итак, при решении задачи Ньютона и ее обобщений в рамках формулы (1.1) на искомом оптимальном контуре x , y и θ удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (2.1)$$

Любое равенство в них может приводить к появлению участка КЭ.

Решение любой задачи современной теории оптимального управления начинается с записи всех ограничений типа неравенств (2.1), и участки КЭ в ней столь же обычны, как и участки ДЭ. В классическом вариационном исчислении об участках КЭ вспоминали лишь в исключительных случаях. Современная теория оптимального управления в середине XX века только начинала свое развитие и обязательная запись ограничений типа (2.1) и появление вместе с ними участков КЭ были незнакомы аэродинамикам того времени. Притом, что участки КЭ столь же естественны, как значения функции на границах области изменения независимых переменных при поиске ее максимальной или минимальной величины.

Вооруженный знанием структуры искомого контура автор в то далекое время вернулся к решению заинтриговавшей его задачи. Если оптимальный контур содержит передний торец id_- и пологий участок d_+f , то при варьировании наряду с допустимыми в силу условий (2.1) вариациями $\delta x'$ и δx на id_- и d_+f появятся (рис. 4) приращения координат точки их стыковки Δy_d и Δx_d . Индексы $-$ и $+$ метят параметры до и после точки стыковки при движении по if' от точки i . На рис. 4 штрихами даны измененные участки контура и учтено, что в силу условий (2.1) на торце допустимые $\delta x' \geq 0$.

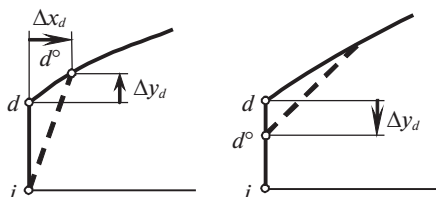


Рис. 4. Допустимые варьирования точки стыковки наклонного контура и торца – участка КЭ.

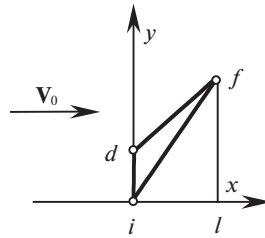


Рис. 5. Оптимальный (с торцом) и неоптимальный (без торца) контуры плоских симметричных головных частей при $0 \leq l < 1$.

Из-за варьирования координат точки d в выражении (1.2) для приращения c_x добавится слагаемое

$$\frac{\Delta c_x}{1 + v} = y_d^v x_{d+}' \frac{x_{d+}'(x_{d+}'^2 - 1)\Delta y_d + 2\Delta x_d}{(1 + x_{d+}'^2)^2} + \dots, \quad \Delta x_d = \int_i^d \delta x' dy, \quad \delta x' \geq 0 \quad (2.2)$$

Здесь многоточием обозначен интеграл из правой части равенства (1.2) от y_d до 1. Учтено, что на торце $x' = 0$, $\varphi_x(0) \equiv 0$, а в силу формулы для Δx_d интегральное слагаемое от 0 до y_d с $(\delta x')^2$ много меньше, чем Δx_d .

Как видно из рис. 4, в точке d допустимы приращения Δy_d любого знака при допустимых $\Delta x_d \geq 0$. Поэтому для оптимального контура

$$x_{d+}' = 1 \quad (2.3)$$

Положительность при $x_{d+}' = 1$ коэффициента при Δx_d в первом равенстве (2.2) показывает, что c_x при допустимых $\Delta x_d \geq 0$ растет, и передний торец – участок КЭ.

В силу сказанного выше, оптимальные контуры плоских головных частей при $l \geq 1$ – наклонные прямые, а при $l < 1$ – комбинация торца и отрезка прямой $x' = 1$ (рис. 5). Как показало прямое сравнение значений c_x , при $1/3^{1/2} \leq l < 1$ удовлетворяющие условию Лежандра наклонные прямые дают большее сопротивление, чем контуры с торцом.

Следствия утреннего “эксперимента” были получены в тот же день. Рассказ же о них Ю.Д. Шмыглевскому вызвал бурю восторга: “Александр Николаевич, немедленно пишите статью” – его совет. У Александра Николаевича, однако, были естественные сомнения: “Неужели этого никто не знал?” – спрашивал он себя и с этим вопросом отправился в библиотеку соседнего с ВЦ Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.

Начав искать в картотеке Ньютона, был удивлен отсутствием его сочинений на русском языке. Стал искать на английском и нашел издание [3] с картинкой в примечаниях, эквивалентной рис. 3 (в “Началах” поток течет справа налево, иные обозначения точек и нет остроконечных “выемок”). С Ньютоном все стало ясно (“Наверняка, он знал изложенное выше”). А как с другими? Авторы отчета НАСА [4], столкнувшись в задаче Ньютона с “проблемой оси симметрии” для ее разрешения, “следуя Ньютону”, ввели передний торец без объяснения причин его появления. Почему появился торец у Ньютона, автора тогда не интересовало, ибо ничего отличного от его “эксперимента” он себе просто не представлял.

Через пару дней уже в ЦИАМ произошла встреча с А. Гонором. “Все это – чушь” сказал тот. “Но ведь то же самое – у Ньютона и американцев”. “И Ньютон, и американцы ничего не понимали” – окончательное резюме А. Гонора. “Ну что ж, пусть нас рассудит Учитель” – сказал автор и подал заявку на семинар Г.Г. Черного. Доклад на

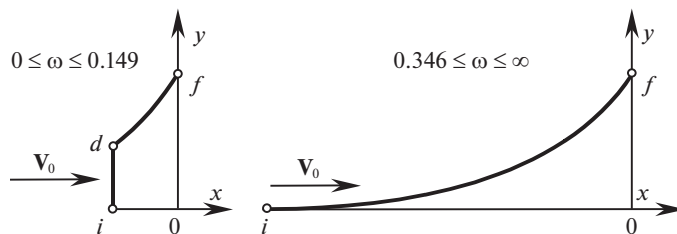


Рис. 6. “Оптимальные” по [4, 11] осесимметричные головные части заданного объема.

ближайшем семинаре вызвал уже описанную реакцию А. Гонора. Автор произносит “заключительное слово” и еще стоит у доски, когда руководитель семинара, ничего не объяснив (вопреки традиции, но ведь А. Гонор — его первый аспирант), объявляет: “Семинар окончен. Александр Николаевич и Александр Львович, оставайтесь”.

Остаются трое, и сразу вопрос Г.Г. Черного: “Александр Николаевич, где Вы это у Ньютона нашли?” То, что его искренний ответ: “В американском издании [3]” не соответствовал действительности, автор ничего не подозревая, узнал только через 40 лет, но об этом позже. Пока же заметим, что на самом деле, объяснения причин появления в решении торца не было ни в одном издании “Начал”, включая [3]. Несмотря на это, после вопроса Г.Г. Черного стало ясно, что Учитель признал правоту автора. С тех пор передний торец фигурирует как участок КЭ не только в рамках формулы Ньютона [5, 6], но и в приближении полных уравнений течения идеального газа [7–10].

Казалось бы, с оптимальными в рамках формулы Ньютона головными частями все стало ясно. Однако через 25 лет эта увлекательная история получила неожиданное развитие. В конце лета 1988 г. во время конференции, проходившей на озере Байкал, к автору обратилась аспирантка из Иркутска Ольга Гильман: “Александр Николаевич, я решила задачу, которую не смог решить Эггерс [11]. Об оптимальной головной части заданного объема Ω или $\omega = \Omega/(\pi l^3)$ вместо заданной длины L или удлинения l . Вы же должны знать об этой проблеме как один из переводчиков сборника докладов конференции в Сиэтле в 1962 году. Эггерс, а еще раньше он с коллегами [4], не сумели построить решение для всех возможных значений ω от 0 до ∞ . Я же, введя внутренний торец, его построила”.

Вернувшись в Москву, автор выяснил, что Эггерс с коллегами [4, 11] при малых ω , “следуя Ньютону”, искали решение с передним торцом (рис. 6, слева). Однако в задаче с заданным объемом и свободной длиной головной части тела он мог быть участком КЭ только по θ (в задаче Ньютона передний торец — участок КЭ и по θ , и по x), но, как сразу было установлено, он таковым не является (впрочем, как и внутренние торцы, введенные аспиранткой из Иркутска). Согласившись поэтому с оценкой А. Гонором работ американцев, напомним их “решение”.

Начнем с того, что тут, в отличие от задачи Ньютона, образующая df не выпуклая, а вогнутая, и при движении от точки d к точке f угол θ растет. В точке d по-прежнему $\theta_{d+} = 45^\circ$. Поэтому величина $\theta_f > 45^\circ$, причем она тем больше, чем больше ω , достигая 60° при $\omega = 0.149$. При еще больших ω из-за нарушения условия Лежандра (1.6) решения [4, 11] с передним торцом непригодны. Похожая ситуация с большими ω . Для них оптимальны остrokонечные головные части (рис. 6, справа), а θ_f растет с уменьшением ω , достигая 60° при $\omega = 0.346$. В результате был сделан [4, 11] ошибочный вывод: при $0.149 < \omega < 0.346$ “решение, если и существует, то не может быть получено в данной постановке”.

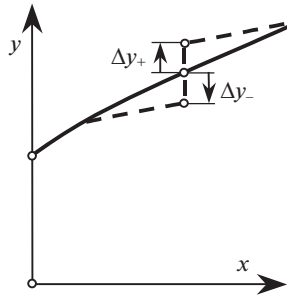


Рис. 7. Сильное варьирование наклонного участка контура.

Случилось так, что построение правильного решения [12] совпало с выводом необходимого условия минимума c_x , более сильного, чем условие Лежандра. Для этого наряду с малыми (слабыми) вариациями $\delta x'$ в окрестности произвольной внутренней точки участка ДЭ вводится малая вертикальная ступенька (рис. 7) с $x' = 0$ и высотами $\Delta y_- \leq 0$ и $\Delta y_+ \geq 0$. В рассматриваемой задаче величины разнознаковых приращений Δy_- и Δy_+ близки по модулю (для сохранения объема), а в задаче Ньютона произвольны. Из-за такого (сильного) варьирования x' в выражении для приращения c_x добавится слагаемое

$$\frac{\Delta c_x}{1 + v} = y^v \frac{x'^2(x'^2 - 1)}{(1 + x'^2)^2} (\Delta y_+ - \Delta y_-) + \dots, \tag{2.4}$$

где многоточием обозначены вклады отличных от Δy_- и Δy_+ вариаций и приращений.

Согласно принятому способу сильного варьирования (рис. 7) во внутренних точках участка ДЭ допустимые $\Delta y_- \leq 0$, а $\Delta y_+ \geq 0$. Значит, в согласии с условием (2.4) на участке ДЭ должно выполняться необходимое условие минимума c_x

$$x' \geq 1 \Leftrightarrow \theta \leq 45^\circ, \tag{2.5}$$

более сильное, чем условие Лежандра (1.6). Все контуры с торцом и часть остроконечных рис. 6 (с $\theta_f > 45^\circ$) этому условию не удовлетворяют. При $l < 1$ нарушается оно и на прямолинейных образующих рис. 5. Как стало известно автору в начале XXI века (см. ниже), на 75 лет раньше его это условие в задаче Ньютона установил А.Н. Крылов. Поэтому, как и ранее [2], будем называть его “условием Крылова”.

Найденное автором тогда же, хотя и опубликованное с задержкой [12] решение обсуждаемой задачи поясняет рис. 8. Согласно ему и вопреки рис. 6 заостренная голов-

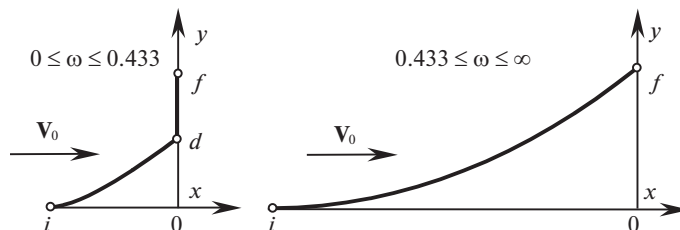


Рис. 8. Оптимальные в приближении формулы (1.1) осесимметричные головные части заданного объема.

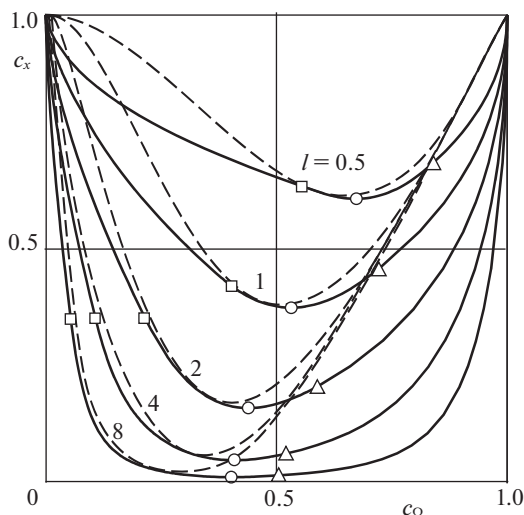


Рис. 9. Значения c_x оптимальных в приближении формулы (1.1) головных частей (сплошные кривые) и усеченных или заостренных конусов (штрихи).

ная часть оптимальна при $0.433 \leq \omega \leq \infty$. При $0 < \omega < 0.433$ в рамках формулы Ньютона (1.1) оптимальны головные части принципиально нового типа: острое, выступающее из заднего торца – участка КЭ, также появляющегося в силу ограничений (2.1) с тем отличием, что теперь начало координат лежит в основании головной части, и первое условие (2.1) заменяется на $x \leq 0$. В точке стыковки d острия и заднего торца аналогично задаче Ньютона $x'_d = 1$, однако образующая острия id вогнутая, что при $0 \leq y < y_d$ и обеспечивает выполнение условия Крылова.

В приближении формулы Ньютона в развитие ранее опубликованных результатов [6, 12] построены [13] головные части, оптимальные при заданных L , Y и Ω , точнее, $l = L/Y$ и $c_\Omega = \Omega/(\pi LY^2)$. При этом под заданием Y и l понималось задание габаритов. Так, при больших l и малых c_Ω отнесенная к Y длина головной части может быть меньше l . С другой стороны, при больших c_Ω понимаемое в этом смысле ограничение (2.1) величины y приводит к участку КЭ нового типа – цилиндрическому отрезку: $y = 1$. Результаты [13] суммирует рис. 9, сплошные кривые которого дают $c_x = c_x(c_\Omega, l)$ оптимальных головных частей тел вращения, построенных по формуле Ньютона (1.1). Крайние точки этих кривых отвечают минимально и максимально возможным объемам ($c_\Omega = 0$ и $c_\Omega = 1$). Для них по формуле (1.1) $c_x = 1$. Для каждого удлинения l кружок дает величину c_x головной части задачи Ньютона, которая для этого значения l минимальна. Между кружками и треугольниками оптимальные контуры состоят из переднего торца и выпуклого участка ДЭ. Треугольники отвечают предельно толстым головным частям такого типа с горизонтальной касательной в точке f . Справа от них оптимальны контуры, состоящие из переднего торца, выпуклого участка ДЭ и концевого участка КЭ: $y = 1$. Между кружками и квадратиками оптимальные контуры состоят из переднего торца и сначала выпуклых участков ДЭ. С уменьшением c_Ω на участках ДЭ появляются вогнутые участки, а начиная с квадратиков – задний торец. Штрихами даны рассчитанные по формуле Ньютона значения $c_x = c_x(c_\Omega, l)$ тупленых или ост-

рых конусов, удовлетворяющих тем же, что и оптимальные тела габаритным ограничениям.

Определенные интегрированием уравнений течения идеального газа значения c_x головных частей [14], оптимальных в приближении формулы Ньютона, подтвердили преимущества выпуклых оптимальных контуров. В противоположность этому значения c_x головных частей с вогнутыми участками, а тем более с задним торцом, как правило, получались больше значений c_x эквивалентных конусов. В тех же примерах, где преимущество сохранялось, оно было заметно меньше, найденного по формуле Ньютона. Следствие этих результатов – изменение постановки задачи. На практике задание объема головной части обусловлено размещением в ней полезного груза заданного объема Ω^m . Объем же головной части должен удовлетворять неравенству $\Omega \geq \Omega^m$. Если Ω_{PN} отвечает решению задачи Ньютона с тем же значением l и со свободным объемом, и $\Omega_{PN} \geq \Omega^m$, то именно оно со значением $c_x = c_{xPN}$, минимальным для заданного l , дает решение задачи. Согласно рис. 9 при этом возможно значительное (при $l \geq \geq 1$ – в разы) уменьшение c_x . С математической точки зрения, такая головная часть – пустотелый обтекатель с располагающимся внутри него (если $\Omega_{PN} = \Omega^m$, то толщина его стенок нулевая) полезным объемом Ω^m . Итак, оптимальные в рамках формулы Ньютона головные части, отвечающие на рис. 9 участкам кривых слева от кружков (с $c_\Omega < c_{\Omega PN}$), не представляют интереса.

3. Возвращение к Ньютону в переводе А.Н. Крылова. История с задачей Ньютона получила неожиданное продолжение в 2002 г. В январе 2003 г. предстоял 80-летний юбилей Г.Г. Черного, который решили отметить выпуском сборника ранее опубликованных работ Учителя, его учеников и ближайших коллег “Механика жидкости и газа. Избранное”. Ответственным редактором этого ретроспективного юбилейного сборника [15] стал автор.

Мировую славу Г.Г. Черному принес его метод аналитического расчета обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях. С учетом этого редакторы-составители сборника решили включить в него первый отчет ЦИАМ [16] с описанием метода Черного. Работая с указанным отчетом, ответственный редактор обнаружил заключительный § 4. “О теле с наименьшим сопротивлением и о теореме Ньютона, относящейся к нахождению тела с наименьшим сопротивлением” и ссылку на “Начала” Ньютона в VII томе вышедшего в 1936 г. собрания сочинений переводившего “Начала” с латыни на русский язык академика Алексея Николаевича Крылова. К стыду автора это было его первое знакомство с трудами ученого, гениальность которого еще предстояло оценить, но “лучше поздно, чем никогда”.

Стало ясно, что § 4 отчета [16] – предшественник статьи [1] и знакомство с А.Н. Крыловым могло состояться на 40 лет раньше. Однако тогда (в 1962 г.) после ознакомления с американским изданием “Начал” Ньютона [3] “с Ньютоном все было понятно”, и он ни на каком языке не интересовал автора. Теперь же причина появления торца в решении Ньютона стала интересна, но том VII собрания сочинений А.Н. Крылова в библиотеке ЦИАМ оказался утерян. Зато нашлось издание “Начал” Ньютона [17] в том же переводе А.Н. Крылова, вышедшее в СССР в 1989 г. Остается позавидовать автору – так много нового и интересного он узнал.

Итак, вместе с ним вернемся к труду Ньютона в переводе А.Н. Крылова. Замечательная особенность перевода А.Н. Крылова – разъяснение всех, как правило, постулируемых без доказательств и объяснений утверждений Ньютона, что видно и по обсуждаемой задаче. Как уже отмечалось, у Ньютона к ней имеют отношение лишь несколько кратких (в американском издании “Начал” [3] – чуть больше страницы с 2-мя рисунками), приведенных без доказательств утверждений, составивших одно “Почучение”. Последнее включает три темы.

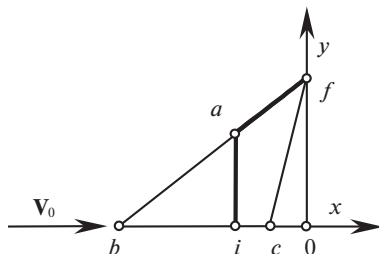


Рис. 10. Построение по Ньютону усеченного конуса минимального сопротивления.

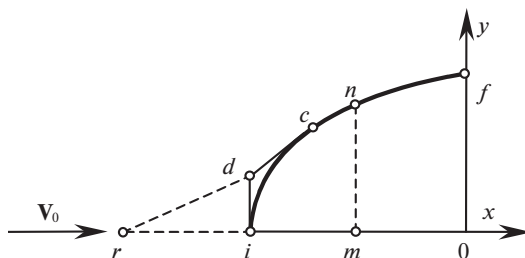


Рис. 11. Уменьшение сопротивления гладкого тела вращения по второй теме “Поучения” Ньютона. Длины штриховых отрезков входят в формулу третьей темы.

1. О построении при заданных длине L и радиусе основания Y усеченного конуса, реализующего в рамках формулы (1.1) минимум сопротивления;
2. Об уменьшении сопротивления тела вращения при замене прилегающего к носу овольного участка пересекающимися отрезками прямых с углами наклона к оси вращения 90° и 45° ;
3. О примыкающем к переднему торцу выпуклом участке оптимального контура, определяемого словесным равенством, в которое входят длины четырех связанных с этим участком отрезков прямых.

По первой теме Ньютон дает такой способ построения. На составленном из отрезков прямых рис. 10: $x_c = x_i/2 = -L/2$, $y_f = Y$, и длины отрезков bc и cf равны. Тогда прямой отрезок bf определяет контур оптимального усеченного конуса – ломаную iaf .

Вторую тему “Поучения” Ньютона поясняет рис. 11. Речь идет о замене начального участка ic контура осесимметричного тела (у Ньютона “образованного вращением эллипса или овала”) двумя отрезками прямых – вертикальным id и наклонным dc . Наклонный отрезок касается исходного контура в точке c , в которой касательная образует с осью x угол $\theta_c = 45^\circ$. Согласно “Поучению” при большем объеме новое тело имеет меньшее сопротивление. Заканчивает Ньютон вторую тему словами: “Я считаю, что это предложение может быть бесполезно при построении судов”.

По объему разъяснения А.Н. Крылова к двум первым темам “Поучения” более чем вдвое превышают текст Ньютона, но не это главное. Главное в том, что именно здесь А.Н. Крыловым выведено необходимое условие минимума сопротивления (2.5), названное ранее [2] его именем. Приведем рассуждения А.Н. Крылова со ссылками на рис. 10 и на рис. 12, эквивалентный добавленному им в переводе, и с непринципиальной коррекцией.

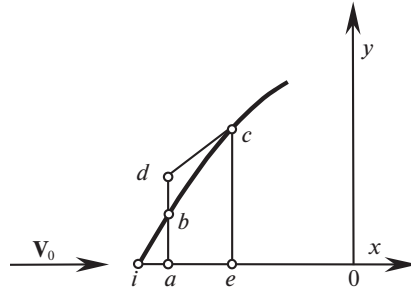


Рис. 12. К доказательству А.Н. Крыловым необходимого условия минимума сопротивления – “условия Крылова” ($\theta \leq 45^\circ$).

Далее почти цитата: “Прежде всего заметим (рис. 10), что, когда длина усеченного конуса L приближается к нулю, то угол наклона отрезка af приближается к 45° . Таким образом, если (см. рис. 12) вблизи точки контура с $\theta > 45^\circ$ взять бесконечно тонкий оптимальный усеченный конус $adce$, то при большем объеме тело с контуром adc будет испытывать меньшее сопротивление, нежели тело с контуром abc также усеченного, но неоптимального конуса. Отсюда следует также, что сопротивление конической поверхности bc больше суммы сопротивлений конической поверхности dc и кольцевой поверхности bd . Следовательно, если имеется какая-либо поверхность вращения, касательная к контуру которой в какой-либо точке составляет с осью угол, больший 45° , то, взяв поверхность, образованную вращением ломаной $cdbi$, элемент cd которой составляет 45° с осью, получим тело, объем которого больше объема первоначального тела, сопротивление же меньше. Значит, наименьшим сопротивлением будет обладать в этом случае такое тело, для которого ни в одной точке вышеуказанной замены сделать нельзя ...”.

Очевидно, что в приведенном абзаце А.Н. Крылов, опираясь на две первые темы “Поучения” Ньютона, доказал необходимое условие минимума сопротивления (2.5), более сильное, чем условие Лежандра. Выделенные в приведенной цитате курсивом слова “в этом случае” и опущенная заключительная часть цитаты (многоточие) не умаляют заслуг гениального переводчика. Ведь кроме него никто, включая Лежандра, специально изучавшего то же “Поучение” и получившего для задачи Ньютона свое, более слабое условие, не сделал этого.

Заключительная третья тема “Поучения” (из восьми строк) – инструкция по построению осесимметричной головной части минимального сопротивления. В XVII веке решения записывались в геометрической форме – в виде равенств из комбинаций длин разных отрезков. Чтобы сформулировать завершающее инструкцию словесное равенство, Ньютон вводит в рисунок второй темы дополнительные отрезки прямых, изображенные на рис. 11 штрихами. Точка n – произвольная точка выпуклого участка, а наклон отрезка rd равен наклону касательной в точке n . Наряду с длинами штриховых отрезков в приведенное равенство входит радиус торца y_d . Сформулированное Ньютоном равенство определяет форму выпуклого участка контура оптимальной головной части и условие его стыковки ($\theta_{d+} = 45^\circ$) с торцом. Согласно примечанию А.Н. Крылова (на трех страницах!), “геометрическое” решение Ньютона эквивалентно интегралу (1.4) уравнения Эйлера (1.3) и условию (2.3) стыковки участка ДЭ с участком КЭ.

И Ньютон, и А.Н. Крылов нигде не пишут о торце как об участке КЭ. Однако в свете двух первых тем обсуждаемого “Поучения” и их следствия для усеченного конуса

малой длины в этом и не было особой необходимости. Нужно было лишь помнить об ограничениях на допустимые x и θ , а о них оба гения забыть не могли.

Заключение. История решения задачи об оптимальной головной части тела вращения при больших скоростях полета, ставшей актуальной в середине XX века, может заинтересовать не только аэродинамиков. Не аэродинамик и не специалист в вариационном исчислении А.Н. Крылов перевел “Начала” Ньютона с решением этой задачи еще в 1914 г. Тем поразительней уровень проявленного им понимания отнюдь не близких ему проблем.

Автор признателен А.Г. Терентьеву, только благодаря настойчивости которого появилась эта статья, опубликованная первоначально [18] в трудах конференции “Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение” (Чебоксары, 24–29 июня 2018 г.), посвященной 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00126).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонор А.Л., Черный Г.Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // Изв. АН СССР. ОТН 1957. № 7. С. 89–93.
2. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.
3. *Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy* / Пер. с латин. Э. Мотта, 1729; пересмотренное издание Ф. Кэджори. Berkeley, CA: Univ. of California Press, 1947. P. 333–334, 657–661.
4. *Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds* // NASA. Report № 1306. 1957.
5. Гонор А.Л., Черный Г.Г. Формы нетонких тел минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Пер. с англ. под ред. А.Л. Гонора. М.: Мир, 1969. 507 с. С. 379–395.
6. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.
7. Гонор А.Л., Крайко А.Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Теория оптимальных аэродинамических форм / Пер. с англ. под ред. А.Л. Гонора. М.: Мир, 1969. 507 с. С. 455–492.
8. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
9. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
10. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
11. Эггерс А. Нетонкие тела вращения минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Пер. с англ. под ред. А.Л. Гонора. М.: Мир, 1969. 507 с. С. 260–274.
12. Крайко А.Н. Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388.
13. Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С. Осесимметричная головная часть минимального волнового сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 723–741.
14. Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Таковицкий С.А. Построение в рамках уравнений Эйлера головной части минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 1017–1030.
15. Механика жидкости и газа. Избранное. Ред.-сост.: А.Н. Крайко и др. М.: Физматлит, 2003. 752 с.

16. Черный Г.Г., Гонор А.Л., Иванова Е.Л. Обтекание тел идеальным газом при большой сверхзвуковой скорости // Техн. отчет ЦИАМ. № 2794. 1956. 36 с. = [15]. С. 37–52.
17. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. с латин. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
18. Крайко А.Н. Задача Ньютона о головной части минимального сопротивления с разъяснениями А.Н. Крылова и продолжение истории ее решения в XX и в начале XXI века // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение. Сб. трудов Международной летней научной школы-конференции, посвященной 155-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова. Чебоксары: Изд-во Чуваши. гос. ун-та, 2018. 268 с. С. 47–56.

Newton's Problem on the Optimal Head Part of the Body in a Flow. History of the Solution

A. N. Kraiko^{a,b,#}

^a Baranov Central Institute of Aviation Motors, Moscow, Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: akraiko@ciam.ru

Newton's problem of design an axisymmetric head of the minimum wave drag is considered. The solution of this problem was given, though without any explanation, by Newton himself in the main work of his life, "Mathematical Principles of Natural Philosophy". However, Newton's ready-made solution was not understood by aerodynamics, which noticed in the mid-twentieth century to the solution of Newton's problem and some of its generalizations. "Principles" of Newton translated in Russian A.N. Krylov, who made a detailed comments of many of Newton's statements, including on the problem under discussion. Moreover, explaining one of these statements, A.N. Krylov formulated a necessary condition for the minimum drag, which passed by all who read Newton, not only aerodynamics, but also such an authority of variations calculus as Legendre. However, even A.N. Krylov's commentaries did not help to understand the Newton's solution to the only one they were available – Soviet aerodynamicist. Description of the story of solving Newton's problem, in which the author had a chance to participate, is the main goal of the article.

Keywords: Newton's formula, the head part of the axisymmetric body, wave drag, Legendre and Krylov's conditions

REFERENCES

1. Gonor A.L., Chernyi G.G. Bodies of minimum drag at high supersonic velocities // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk*, 1957, no. 7, pp. 89–93. (in Russian)
2. Kraiko A.N. *Theoretical Gas Dynamics: Classics and Topics. (Teoreticheskaya gazovaya dinamika: klassika i sovremennost')* Moscow: Torus Press, 2010. 440 p. (in Russian)
3. *Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)* / Transl. from the Latin by E. Motta, 1793; revised edition by F. Cajori. CA, Berkeley: Univ. of California, 1947, pp. 333–334, 657–661.
4. Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds // *NACA. Rep. no. 1306*, 1957.
5. Chernyi G.G., Gonor A.L. Nonslender shapes of minimum pressure drag // *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes* / Ed. by A. Miele. N.Y.; L.: Acad. Press, 1965. pp. 373–385.
6. Kraiko A.N. The determination of minimal drag bodies by Newton's and Buzemann's drag laws // *JAMM*, 1963, vol. 27, no. 3, pp. 723–739.
7. Gonor A.L., Kraiko A.N. Some Results of the Optimal Forms Study For Super- and Hypersonic Velocities // *Teoriya optimal'nykh aerodinamicheskikh form* / Transl. from Engl. ed. by A.L. Gonor. Moscow: Mir, 1969, 507 p., pp. 455–492. (in Russian)
8. Kraiko A.N. *Variational Problems of Gas Dynamics (Variatsionnye zadachi gazovoi dinamiki)*. Moscow: Nauka, 1979. 447 p. (in Russian)

9. *Shmyglevskii Yu.D.* Analytical Investigation of Fluid Dynamics. (Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i ghidkosti) Moscow: Editorial URSS, 1999, 231 p. (in Russian)
10. *Kraiko A.N., Pudovikov D.E., P'yankov K.S., Tillyaeva N.I.* Axisymmetric nose shapes of specified aspect ratio, optimum or close to optimum with respect to wave drag // JAMM, 2003, vol. 67, no. 5, pp. 703–730.
11. *Eggers A.* Minimum wave drag non-slender bodies of revolution // Teoriya optimal'nykh aerodinamicheskikh form / Transl. from Engl. ed. by *A.L. Gonor*. Moscow: Mir, 1969, 507 p., pp. 260–274. (in Russian)
12. *Kraiko A.N.* The front end of a given volume having optimum pressure drag in the approximation of Newton's law of resistance // JAMM, 1991, vol. 55, no. 3, pp. 310–315.
13. *Yefremov N.L., Kraiko A.N., P'yankov K.S.* The axisymmetric nose shape of minimum wave drag for given size and volume // JAMM, 2005, vol. 69, no. 5, pp. 649–664.
14. *Efremov N.L., Kraiko A.N., P'yankov K.S., Takovitskii S.A.* The construction of a nose shape of minimum drag for specified external dimensions and volume using Euler equations // JAMM, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 912–923.
15. Fluid mechanics. Selected (Mekhanika zhidkosti i gaza. Izbrannoye) / Ed. by *A.N. Kraiko*, et al. Moscow: Fizmatlit, 2003, 752 p. (in Russian)
16. *Chernyi G.G., Gonor A.L., Ivanova E.L.* Ideal gas flows around bodies at high supersonic velocity // TsIAM. Technical Report, no. 2794, 1956, 36 p. = [15], pp. 37–52. (in Russian)
17. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy (Matematicheskie nachala natural'noi filosofii) / Translated from the Latin with a commentary by *A.N. Krylov*. Moscow: Nauka, 1989, 688 p. (in Russian)
18. *Kraiko A.N.* Newton's problem on the head part of the minimum drag with A.N. Krylov's commentaries and continuation of its solving history in the XX and early XXI century (Zadacha N'yutona o golovnoi chasti minimal'nogo soprotivleniya s raz'yasneniyami A.N. Krylova i prodolghenie istorii eyo resheniya v XX i v nachale XXI veka) // High-speed hydrodynamics and shipbuilding (Gidrodinamika bol'shikh skorostei i korablestroenie): Proc. Intern. summer scientific school-conference dedicated to the 155th anniversary of academician A.N. Krylov. Cheboksary: Chuwash. State Univ., 2018, 268 p., pp. 47–56. (in Russian)