ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 1, с. 85–90

УДК 539.3

НОВЫЙ КЛАСС ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ЭЛАСТОДИНАМИКИ

Н. Б. Расулова[1,*], М. Б. Расулов[1,]**

[1] *Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*

**e-mail: nazila.rasulova@imm.az*

***e-mail: rasulova@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.02.2019 г.
После доработки 09.09.2019 г.
Принята к публикации 16.09.2019 г.

Представлен новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова–Соболева волнового уравнения, которые могут быть использованы при решении многих однородных задач эластодинамики. Найденное решение обладает уникальным свойством: его двукратный прообраз Лапласа и Фурье с новым аргументом и коэффициентом совпадает с исходной функцией. Таким образом, это свойство позволяет получить удобную формулу обращения для двукратных интегральных преобразований. Метод получения формулы показан на примере решения задачи Лэмба для полуплоскости при переходе от изображения к оригиналу.

Ключевые слова: однородные решения, преобразования Лапласа и Фурье, задача Лэмба, волновое уравнение, решения Смирнова–Соболева

DOI: 10.31857/S0032823519050084

Введение. С целью разработки более удобного метода нахождения обратных двукратных интегральных преобразований некоторых плоских задач эластодинамики предложен новый вид функции-изображения, являющийся решением преобразованного волнового уравнения и одновременно обладающий очень удобным свойством: при переходе к оригиналу по двум операторам, эта функция, исключая ее коэффициент, как функция одного безразмерного параметра, сохраняет свой вид. При этом ее параметр заменяется другим безразмерным параметром, зависящим от реальных координат плоскости и времени.

Основываясь на этом свойстве найденного решения, легко и быстро решаются некоторые известные задачи, например, задача Броберга [2] и не менее знаменитая задача Лэмба для полуплоскости [3], до этого решенные весьма сложными и трудоемкими способами. В общем случае это свойство создает полезную формулу обращения для двукратных преобразований, которая позволяет представить значения какой-нибудь величины (компоненты скорости, напряжения и др.) в любой точке плоскости через их значения на границе полуплоскости. Кроме того, в решении большинства задач эластодинамики для неограниченных и полуограниченных областей, метод интегральных преобразований является мощнейшим, часто используемым математическим аппаратом. Но нахождение оригиналов во многих случаях сопровождается колоссальными трудностями, преодоление которых еще больше усложняется, если применены не одно-, а двукратные преобразования. Существует довольно много приближенных методов обращения, которые, естественно, не могут сравниться ни с одним точным аналитическим методом.

Новое решение будет представлено на примере решения задачи Лэмба для полуплоскости.

Задача Лэмба с момента своего появления привлекла внимание специалистов всего мира, решение этой задачи для полупространства до недавнего времени было единственным точным решением трехмерной задачи эластодинамики.

Обзоры постановок задач и методов их решения приведены в работах [4–6], в которых также показаны численные методы решения для несколько усложненных вариантов задач Лэмба. Тем не менее, основным методом решения этой задачи является метод интегральных преобразований, который впервые в динамике упругих сред был использован Лэмбом [1].

1. Задача Лэмба для полуплоскости и ее эффективное решение. Решение задачи об ударе сосредоточенной силой I в момент $t = 0$ в изотропной упругой полуплоскости $y < 0$, находящейся в покое при $t < 0$, дано в [3]. Эта задача была решена методом интегральных преобразований, и для нахождения оригиналов был использован трудоемкий способ с использованием метода Каньяра.

Ниже будет представлен новый, более удобный метод решения этой задачи. Уравнения движения среды, граничные и начальные условия в потенциалах ϕ и ψ, имеют следующий вид:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}(\psi\vec{e}_3) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c_1^2\Delta\phi; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c_2^2\Delta\psi \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{yy}(t,x,y) = -I\delta(x)\delta(t), \quad y = 0\\ \sigma_{xy} = \frac{c_{2\rho}^2}{2}\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = 0\,, \quad y = 0\\ \phi = \psi = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad t = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор перемещения, ρ – плотность среды, c_1 и c_2 скорости продольных и поперечных волн, соответственно, $\{\sigma\}$ – тензор напряжений, δ – дельта-функция Дирака. К компонентам вектора перемещения применяются преобразования Лапласа (по переменной t) и Фурье (по переменной x):

$$\bar{u}_j(p,x,y) = \int_0^\infty u_j(t,x,y)e^{-pt}dt; \quad \operatorname{Re}p > 0$$

$$\bar{u}_j^*(p,q,y) = \int_{-\infty}^\infty \bar{u}_j(p,x,y)e^{iqx}dx; \quad \operatorname{Im}q = 0$$

В результате компоненты перемещения представляются в виде [3]:

$$\overline{u}_x^* = \frac{Iqi}{\mu c_1^2 R(p,q)}\left[\left(\frac{p^2}{c_2^2}+2q^2\right)e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_1^2}+q^2}} - 2\sqrt{\left(\frac{p^2}{c_1^2}+q^2\right)\left(\frac{p^2}{c_2^2}+q^2\right)}e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_2^2}+q^2}}\right]$$

$$\overline{u}_y^* = \frac{I\sqrt{\frac{p^2}{c_1^2}+q^2}}{\mu c_1^2 R(p,q)}\left[\left(\frac{p^2}{c_2^2}+2q^2\right)e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_1^2}+q^2}} - 2q^2 e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_2^2}+q^2}}\right],$$

где $R(p,q) = \left(\frac{p^2}{c_2^2}+2q^2\right)^2 - 4q^2\sqrt{\left(\frac{p^2}{c_1^2}+q^2\right)\left(\frac{p^2}{c_2^2}+q^2\right)}$.

С учетом того, что имеется следующая простая связь

$$\left(\frac{p^2}{q^2c_1^2}+1\right) = \frac{c_2^2}{c_1^2}\left(\frac{p^2}{q^2c_2^2}+1\right)+\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right),$$

приведенные выше решения могут быть представлены через функции определенного вида:

$$\overline{u}_k^* = \frac{I}{\mu c_1^2} e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_k^2}+q^2}} \frac{1}{q} f\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2c_k^2}+1}\right)$$

Их можно преобразовать к следующему виду:

$$\overline{u}_k^* = \frac{Ic_k}{\mu c_1^2}\frac{e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_k^2}+q^2}}}{\sqrt{p^2+c_k^2q^2}}\left[\sqrt{\frac{p^2}{q^2c_k^2}+1}\right] f\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2c_k^2}+1}\right) \tag{1.4}$$

Используя формулу обращения:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} e^{-\tau\sqrt{p^2+\alpha^2}} \div \mathrm{J}_0(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})H(t-\tau),$$

где знак $\div$ обозначает переход от изображения к оригиналу и наоборот.

Применим формулу Эфроса для определения оригинала Лапласа функции (1.4),

$$u_k^* = \frac{Ic_k}{\mu c_1^2}\int_0^\infty \Omega^*(t,q,y,\tau)\,d\tau, \tag{1.5}$$

где

$$\Omega^*(t,q,y,\tau) = \begin{cases} F(\tau)\,\mathrm{J}_0\left(\sqrt{c_k^2t^2q^2-\left(\frac{\tau}{q}-y\right)^2q^2}\right)H\left(c_kt-\left(\frac{\tau}{q}-y\right)\right), & q>0 \\ \overline{F}(\tau)\,\mathrm{J}_0\left(\sqrt{c_k^2t^2q^2-\left(\frac{\tau}{q}+y\right)^2q^2}\right)H\left(c_kt-\left|\frac{\tau}{q}+y\right|\right), & q<0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь $F(t)$ – является оригиналом функции-изображения $pf(p)$:

$$F(t) \div L^{-1}[pf(p)]$$

и обозначен $\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$, H – функция Хэвисайда. Преобразуем выражение (1.6) к виду:

$$\Omega^*(t,q,y,\tau) = \begin{cases} F(\tau)\, J_0(\sqrt{c_k^2t^2 - y^2}\sqrt{(q-\alpha)^2 - \beta^2})H[|q-\alpha| - \beta], & q > 0 \\ \bar{F}(\tau)\, J_0(\sqrt{c_k^2t^2 - y^2}\sqrt{(q+\alpha)^2 - \beta^2})H[|q+\alpha| - \beta], & q < 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\tau y}{c_k^2t^2 - y^2}, \quad \beta = \frac{t\tau c_k}{c_k^2t^2 - y^2}$$

С помощью таблиц, приведенных в [7], можно определить оригинал функции $\Omega^*(t,q,y,\tau)$ по преобразованию Фурье:

$$\Omega(t,x,y,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}\Omega^*(t,q,y,\tau) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}[e^{-i\alpha x}F(\tau) + e^{i\alpha x}\bar{F}(\tau)]\dfrac{1}{\sqrt{c_k^2t^2 - x^2 - y^2}}e^{-\beta\sqrt{c_k^2t^2 - x^2 - y^2}}, \\ \text{при} \quad |x| < \sqrt{c_k^2t^2 - y^2} \\ \dfrac{1}{2\pi}[e^{-i\alpha x}F(\tau) + e^{i\alpha x}\bar{F}(\tau)]\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2t^2}}\sin[\beta\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2t^2}] + \\ + i[e^{-i\alpha x}F(\tau) + e^{i\alpha x}\bar{F}(\tau)]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2t^2}}\cos[\beta\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2t^2}], \\ \text{при} \quad |x| > \sqrt{c_k^2t^2 - y^2} \end{cases}$$

В итоге получим:

$$\Omega(t,x,y,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Re}(e^{-\tau s_k}F(\tau))}{\sqrt{t^2c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{если} \quad |x| < \sqrt{t^2c_k^2 - y^2} \\ -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Im}(e^{-\tau s_k^*}F(\tau))}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2c_k^2}}; & \text{если} \quad |x| > \sqrt{t^2c_k^2 - y^2} \end{cases} \tag{1.7}$$

Окончательное выражение для компонентов перемещения получается из интеграла (1.5), который в данном случае представляет собой обычную формулу обращения Лапласа

$$u_k = \frac{Ic_k}{\mu c_1^2}\int_0^{\infty}\Omega(t,x,y,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{Ic_k}{\mu c_1^2}\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Re} s_k f(s_k)}{\sqrt{t^2c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{при} \quad |x| < \sqrt{t^2c_k^2 - y^2} \\ -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Im} s_k^* f(s_k^*)}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2c_k^2}}; & \text{при} \quad |x| > \sqrt{t^2c_k^2 - y^2} \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$s_k = \frac{tc_k\sqrt{t^2c_k^2 - x^2 - y^2} + ixy}{t^2c_k^2 - y^2}, \quad s_k^* = \frac{tc_k\sqrt{x^2 + y^2 - t^2c_k^2} + xy}{t^2c_k^2 - y^2}i$$

Функция $pf(p)$, фигурирующая в формуле преобразования, теперь появляется и в функции оригинала с новым аргументом и коэффициентом. Этот результат позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. Функция вида

$$f_k(x,y,t) = A\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Re}F(s_k)}{\sqrt{t^2c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{при} \quad |x| < \sqrt{t^2c_k^2 - y^2} \\ -\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{Im}F(s_k^*)}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2c_k^2}}; & \text{при} \quad |x| > \sqrt{t^2c_k^2 - y^2}\end{cases} \tag{1.9}$$

является решением волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_k^2\Delta u; \tag{1.10}$$

кроме того, она является прообразом функции двукратного преобразования (Лапласа и Фурье) следующего вида:

$$\bar{f}_k^*(q,y,p) = A\frac{e^{y\sqrt{\frac{p^2}{c_k^2}+q^2}}}{\sqrt{p^2 + c_k^2q^2}}F\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2c_k^2} + 1}\right), \quad y \le 0,$$

где A – постоянная задачи.

Как показывает простое вычисление, функции вида $\operatorname{Re}F(s_k)$ и $\operatorname{Im}F(s_k^*)$ с нулевыми порядками также удовлетворяют волновому уравнению (1.10). Это свидетельствует о том, что они образуют совершенно новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова–Соболева и, соответственно, обладают всеми свойствами этих решений [8]. При этом функции (1.9) на фронте волны $\sqrt{x^2 + y^2} = tc_k$, имея особенность степени 1/2, являются решениями порядка (–1) этого же семейства. Необходимо отметить, что данное однородное решение этого порядка обнаружено впервые, и что решение задачи Лэмба, полученное на основе представленной выше теоремы, полностью совпадает с решением, приведенным в [3].

Заключение. Найден новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова-Соболева для волновых уравнений. Эти решения обладают свойством сохранения своего вида при переходе к двукратным интегральным преобразованиям Лапласа и Фурье. Благодаря данному свойству, полученные решения могут быть использованы в решении многих задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1904. V. A203. P. 1–42.
2. Broberg K.B. Cracks and Fracture. London: Acad. Press, 1999. 705 p.
3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986, 328 с.
4. *Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. № 6. P. 952–959.
5. Il'yasov Kh.Kh., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. Exterior 3D Lamb problem: harmonic load distributed over a surface // Mech. Solids. 2016. V. 51. № 1. P. 39–45.
6. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 3. P. 356–367.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционные исчисления. М.: Наука, 1961. 524 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. 672 с.

A New Class of Homogeneous Solutions for Flat Elastodynamics Problems

N. B. Rasulova[a,#] and M. B. Rasulov[a,##]

[a] *Institute of Mathematics and Mechanics of the NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*
[#]*e-mail: nazila.rasulova@imm.az*
[##]*e-mail: rasulova@gmail.com*

The article presents a new type of functionally invariant Smirnov–Sobolev solutions for the wave equation, which can be used for solving many homogeneous problems of elastodynamics. The derived solution has a unique property: the double pre-image of Laplace and Fourier transforms of this function with a new argument and coefficient is identical to function itself. Thus, this property creates a new formula for double transformation. The method of obtaining this formula has been demonstrated when solving the Lamb problem for a half-plane, in the process of transition from image to original.

Keywords: homogeneous solutions, Laplace and Fourier transformations, Lamb's problem, wave equation, Smirnov–Sobolev solution

REFERENCES

1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. R. Soc., 1904, vol. A203, pp. 1–42.
2. *Broberg K.B.* Cracks and Fracture. London: Academic Press, 1999. 705 p.
3. *Poruchikov V.A.* Methods of the dynamic theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1986, 328 p.
4. *Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 952–959.
5. *Il'yasov Kh.Kh., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Exterior 3D Lamb problem: harmonic load distributed over a surface // Mech. Solids, 2016, vol. 51, no. 1, pp. 39–45.
6. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O.* Planar internal Lamb problem: waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys., 2015, vol. 61, no. 3, pp. 356–367.
7. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Integral Transformations and Operational Calculus. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 524 p. (in Russian)
8. *Smirnov V.I.* The Course of Higher Mathematics. Moscow: Nauka, 1974. 672 p. (in Russian)