

УДК 532.546

**СТРУКТУРА ТЕМПЕРАТУРНОГО ФРОНТА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

© 2020 г. А. А. Афанасьев*

*Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*** e-mail: afanasyev@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.

После доработки 03.10.2019 г.

Принята к публикации 05.10.2019 г.

Исследована структура фронта температуры при неизотермической однофазной фильтрации в трещиновато-пористой среде с учетом неравновесных эффектов, обусловленных различными значениями температуры в трещинах и вмещающей их низкопроницаемой среде. В рамках модели двойной пористости даны оценки для толщины фронта и ограничены области значений параметров подобия, при которых она определяется процессами теплопроводности или неравновесным теплообменом в среде. Для различных пространственных масштабов неизотермического течения выделено три асимптотических случая распределения температуры в структуре фронта, описывающихся конечными соотношениями.

Ключевые слова: пористая среда, неизотермическая фильтрация, двойная пористость, сильный разрыв, автомодельное решение

DOI: 10.31857/S0032823520010026

1. Постановка задачи. При закачке нагретой жидкости в однородную холодную пористую среду, насыщенную той же самой жидкостью, образуется фронт температуры S . Предположим, что в одномерном течении он распространяется от границы $x = 0$ в область $x > 0$ (рис. 1). Перед фронтом сохраняется начальная температура T_- , а за ним пористая среда нагревается до температуры закачиваемой жидкости T_+ . Предполагая локальное тепловое равновесие и малость кондуктивного переноса тепла по сравнению с конвективным, фронт можно рассматривать как сильный разрыв, на котором температура скачком возрастает от T_- до T_+ (рис. 1, линия 1). Решения с такими разрывами, скорость которых выражается из конечного соотношения, рассматривались ранее (напр. [1, 2]). Если кондуктивный перенос тепла сопоставим с конвективным, то теплопроводность сглаживает разрывное распределение температуры. В результате фронт S представляет собой протяженную область, в которой температура непрерывно возрастает от T_- до T_+ (рис. 1, кривая 2). Фильтрация с подобными температурными слоями, протяженность которых растет со временем, t , как \sqrt{t} , рассматривалась в [3–5].

При высоких скоростях фильтрации течение осложняется отсутствием локального теплового равновесия между жидкостью и скелетом пористой среды. В этом случае время, за которое фронт проходит некоторое характерное расстояние, имеет тот же или больший порядок величины, что и время, за которое в элементарном объеме выравниваются температуры жидкости и скелета пористой среды. Подобные неравновесные эффекты, также как и теплопроводность, могут привести к образованию пере-

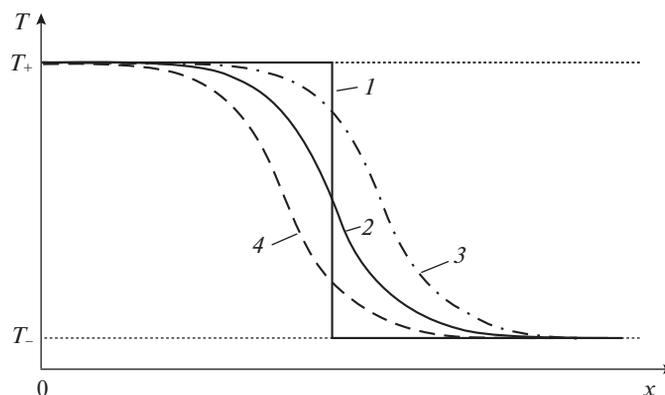


Рис. 1. Схема распределения температуры T в фронте S при локальном равновесии (кривые 1, 2), в случаях если конвективный поток тепла существенно больше кондуктивного потока (кривая 1) и если эти потоки сопоставимы (кривые 2–4). Разрывные линии 3 и 4 показывают распределения T в средах Φ_f и Φ_m при отсутствии локального теплового равновесия.

ходного слоя S конечной толщины, в котором температура непрерывна. Структура таких фронтов рассматривалась в работах [6, 7], в которых показано, что при характерных размерах зерен геологических пористых сред (10^0 – 10^4 мкм) подобные неравновесные эффекты несущественны для геофизических приложений теории фильтрации.

В настоящей работе рассмотрена структура температурного фронта при фильтрации в трещиновато-пористых средах, когда течение осложняется наличием двух различных масштабов пористости и проницаемости. Существуют высокопроницаемые трещины или каналы, между которыми располагаются низкопроницаемые пористые блоки. Для прогнозирования фильтрации в таких средах часто используют модель двойной пористости [8, 9]. В этой модели трещиновато-пористая среда рассматривается в виде двух взаимопроникающих континуумов (пористых сред) — трещин, Φ_f , и блоков, Φ_m , между которыми происходит теплообмен [8, 10]. В практических приложениях часто рассматривается предельный случай, когда Φ_f имеет малую пористость и высокую проницаемость, а Φ_m , наоборот, — высокую пористость и малую проницаемость [11–13]. В этом случае течение жидкости в основном происходит по трещинам, тогда как больший ее объем находится в блоках. В настоящей работе для общности исследования данных предположений о Φ_f и Φ_m не делается, а существенным для дальнейшего изложения является только наличие двух различных масштабов пористости проницаемости.

При фильтрации в трещиновато-пористой среде нагретая жидкость может переносить высокие значения температуры T_+ существенно быстрее по трещинам Φ_f , чем по блокам Φ_m (рис. 1, кривые 3 и 4). В результате локальное тепловое равновесие между Φ_f и Φ_m нарушается, а фронт S имеет конечную толщину. При этом в обоих взаимопроникающих континуумах возможен конвективный перенос тепла жидкостью, который в отличие от [6, 7, 14, 15] учитывается в настоящей работе. Так как характерный размер низкопроницаемых блоков в среде Φ_m (>1 м) существенно больше характерного размера зерен (10^0 – 10^4 мкм), то неравновесное распределение температуры в тре-

щиновато-пористых средах может развиваться в существенно большем диапазоне параметров течения, чем в случаях, рассмотренных ранее [6, 7]. Подобную неравновесность необходимо учитывать в геофизических приложениях, связанных с получением геотермальной энергии и природными процессами [11, 13].

2. Основные уравнения. Поровое пространство трещиновато-пористой среды охарактеризуем параметром $\gamma = V_f/V$ – относительным объемом среды Φ_f , где $V = V_f + V_m$ – полный элементарный объем среды, а $V_i, i = f, m$ – объем, относящийся к континууму Φ_i . Тогда относительный объем среды Φ_m равен $1 - \gamma = V_m/V$. Для каждого континуума зададим пористость $\phi_i = V_{\text{пор},i}/V_i$, абсолютную проницаемость K_i , и коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды λ_i , где $V_{\text{пор},i}$ – объем пустот, заполненных жидкостью в соответствующем континууме. Тогда поровые пространства в средах Φ_f и Φ_m занимают, соответственно, доли $\gamma\phi_f$ и $(1 - \gamma)\phi_m$ элементарного объема V .

Неизотермическая фильтрация несжимаемой жидкости в тонком горизонтальном слое трещиновато-пористой среды описывается системой уравнений [8, 11, 13, 16, 17]

$$\mathbf{u}_i = -\frac{K_i}{\mu} \nabla P_i, \quad i = f, m \quad (2.1)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = n_i v_{mf} \quad (2.2)$$

$$\partial_t(\rho e)_i + \nabla(\rho e_i \mathbf{u}_i) = -\nabla(P_i \mathbf{u}_i) + n_i v_{mf} P_i + \lambda_i \Delta T_i + n_i v_{mf} \rho C T_{mf} + n_i q_{mf} \quad (2.3)$$

$$v_{mf} = \sigma \frac{K_m}{\mu} (P_m - P_f), \quad q_{mf} = \sigma \lambda_m (T_m - T_f) \quad (2.4)$$

Здесь $\partial_t = \partial/\partial t$, \mathbf{u} – скорость фильтрации, $\mu = \text{const}$ – динамическая вязкость жидкости, P – давление, $\sigma = 12/(L_0^2)$ – параметр формы блоков в изотропной среде Φ_m , характеризующий форму и размер блоков и, следовательно, интенсивность теплообмена между трещинами и блоками [12], L_0 – характерный размер блоков, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости, а e – ее удельная внутренняя энергия, $(\rho e)_i$ – эффективная внутренняя энергия насыщенной пористой среды Φ_i , T – температура, v_{mf} и q_{mf} – потоки жидкости и энергии, передающейся посредством теплопроводности, из среды Φ_m в Φ_f , введены константы $n_f = 1$, $n_m = -1$, а индекс $i = m, f$ обозначает параметры, относящиеся к среде Φ_i .

Соотношение (2.1) – закон фильтрации Дарси, а (2.2) – уравнения неразрывности для каждого Φ_i . Закон сохранения энергии (2.3) основывается на предположении о малой скорости фильтрации \mathbf{u} , которое заведомо выполняется для широкого класса течений в пористых средах [16]. Тогда, считая \mathbf{u} малым, при записи баланса энергии можно пренебречь изменением кинетической энергии $E \sim \mathbf{u}^2$ и притоком тепла вследствие диссипации кинетической энергии $dQ^{**} \sim \mathbf{u}^2$. В результате закон сохранения энергии для каждого континуума Φ_i постулируем в виде

$$dU_i = dA_i^{(e)} + dQ_i^{(e)}, \quad (2.5)$$

где dU – изменение внутренней энергии, $dA^{(e)}$ – элементарная работа внешних сил, $dQ^{(e)}$ – элементарный приток тепла [18]. В сформулированной задаче массовые силы отсутствуют, поэтому член $dA^{(e)}$ содержит работу только поверхностных сил. Левые части уравнений (2.3) соответствуют приращению dU_i в законе (2.5). Члены $-\nabla(P_i \mathbf{u}_i)$

и $n_i P_i v_{mf}$ соответствуют работе внешних сил давления $dA_i^{(e)}$, приводящих к течению по средам Φ_i и между Φ_m и Φ_f , соответственно. Последние три члена в правой части (2.3), равны кондуктивному (т.е. из-за теплопроводности) притоку тепла $dQ_i^{(e)}$ по среде Φ_i , а также конвективному и кондуктивному перетоку тепла между Φ_m и Φ_f , соответственно.

Соотношения (2.4) задают переток жидкости и кондуктивный поток тепла между взаимопроницающими средами, согласно которым v_{mf} прямо пропорционально разности давлений $P_m - P_f$, а q_{mf} – температур $T_m - T_f$.

Температура T_{mf} жидкости во втором слагаемом в правой части уравнения (2.3), ответственном за конвективный перенос тепла между Φ_i , сносится против направления потока. Если течение происходит из Φ_m в Φ_f , т.е. при $P_m \geq P_f$, $v_{mf} \geq 0$, то $T_{mf} = T_m$, а если, наоборот, – из Φ_f в Φ_m , т.е. при $P_m < P_f$, $v_{mf} < 0$, то $T_{mf} = T_f$.

Эффективная плотность внутренней энергии $(\rho e)_i$ (и теплоемкость $(\rho C)_i$) бесконечно малого объема среды Φ_i записывается в виде суммы объемных энергий (и теплоемкостей) жидкости и скелета пористой среды:

$$\begin{aligned} (\rho y)_f &= \gamma(\phi_f \rho y_f + (1 - \phi_f) \rho_r y_{r,f}), \quad y = e, C \\ (\rho y)_m &= (1 - \gamma)(\phi_m \rho y_m + (1 - \phi_m) \rho_r y_{r,m}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\rho_r = \text{const}$ – плотность, а $e_{r,i}$ – удельная внутренняя энергия скелета пористой среды. Здесь предполагается, что $e_i = C T_i$ и $e_{r,i} = C_r T_i$, где C и C_r – теплоемкости.

3. Уравнения в безразмерной форме и предложения. Учитывая сформулированную задачу (рис. 1), определим безразмерные параметры в виде

$$x = x_* L, \quad t = t_* t_s, \quad u = u_* \Omega, \quad P = P_* P_s, \quad T = T_* T_s, \quad (3.1)$$

где звездочкой обозначены безразмерные переменные, а L , t_s , Ω , P_s и T_s – характерные масштабы длины, времени, скорости фильтрации, давления и температуры, соответственно. Далее предполагается, что введенные масштабы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} L &= \frac{\Omega t_s}{\bar{\phi}}, \quad \Omega = \frac{\bar{K} P_s}{\mu L}, \quad T_s = T_+ - T_- \\ \bar{\phi} &= \gamma \phi_f + (1 - \gamma) \phi_m, \quad \bar{K} = K_f + K_m, \quad \bar{\lambda} = \lambda_f + \lambda_m, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\bar{\phi}$, \bar{K} и $\bar{\lambda}$ – эффективные (т.е. осредненные по масштабам Φ_i) пористость, проницаемость и коэффициент теплопроводности. Согласно уравнениям (3.2), L есть перемещение за время t_s частицы жидкости в одномерном однофазном течении с истинной скоростью $\Omega/\bar{\phi}$ [16], а, согласно закону Дарси (2.1), P_s есть характерный перепад давления на масштабе L , обеспечивающий течение со скоростью фильтрации Ω . Безразмерные температуры нагнетаемой жидкости и ее значение при $t = 0$ равны 1 и 0, соответственно.

Подставляя соотношения (2.4)–(3.2) в уравнения (2.1)–(2.3) и всюду далее опуская символ звездочки у безразмерных величин, систему уравнений фильтрации в трещиновато-пористой среде представим в виде

$$\mathbf{u}_i = -\kappa_i \nabla P_i \quad (3.3)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = n_i \frac{\kappa_m}{B} (P_m - P_f) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sh}_i \partial_i T_i + \mathbf{u}_i \nabla T_i + \Upsilon \mathbf{u}_i \nabla P_i = \\ & = \frac{\Lambda_i}{\text{Pe}} \Delta T_i + n_i \frac{\kappa_m}{B} (P_m - P_f)(T_{mf} - T_i) + \frac{n_i \Lambda_m}{B \text{Pe}} (T_m - T_f), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где введены параметры подобия

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{K_i}{K}, & \Lambda_i &= \frac{\lambda_i}{\lambda}, & \text{Sh}_i &= \frac{(\rho C)_i}{\phi \rho C} \\ \Upsilon &= \frac{P_s}{\rho C T_s}, & B &= \frac{1}{\sigma L^2}, & \text{Pe} &= \frac{\rho C \Omega L}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как $\kappa_f + \kappa_m = 1$ и $\Lambda_f + \Lambda_m = 1$, то из параметров κ_i и Λ_i только κ_m и Λ_m независимые, а $\kappa_f = 1 - \kappa_m$, $\Lambda_f = 1 - \Lambda_m$.

Параметр подобия Υ характеризует влияние работы внешних поверхностных сил (давления) на распределение температуры. Для типичных параметров течения воды, рассматривающихся в данной работе ($\rho = 1000$ кг/м³, $C = 4200$ Дж/(кг К), $P_s = 10^5$ Па, $T_s \geq 1^\circ\text{C}$), выполняется условие $\Upsilon \ll 1$, поэтому всюду далее полагаем $\Upsilon \equiv 0$.

Параметр подобия B характеризует интенсивность тепломассообмена между Φ_i . Если $B \rightarrow 0$, то множители перед разностями давлений $P_m - P_f$ и температур $T_m - T_f$ в правых частях уравнений (3.4) и (3.5) стремятся к бесконечности, а, следовательно, эти разности стремятся к нулю. Это означает, что при $B \rightarrow 0$ P и T в средах Φ_i быстро выравниваются. Чем больше B , тем больше могут различаться давления P_i и температуры T_i , а локальное равновесие между средами нарушается. Таким образом, B есть мера неравновесности течения из-за различной динамики процессов в средах Φ_i .

В условиях локального теплового равновесия ($B = 0$) фильтрация описывается уравнениями, полученными попарным суммированием уравнений (3.3)–(3.5) при $i = f$ с $i = m$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= -\nabla P, & \nabla \bar{\mathbf{u}} &= 0, & \overline{\text{Sh}} \partial_i T + \bar{\mathbf{u}} \nabla T &= \frac{\Delta T}{\text{Pe}} \\ P &= P_f = P_m, & T &= T_f = T_m, & \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_m, & \overline{\text{Sh}} &= \text{Sh}_f + \text{Sh}_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что система уравнений (3.3)–(3.5) расщепляется на две подсистемы, которые можно решить последовательно одну за другой. Сначала достаточно решить уравнения (3.3), (3.4) относительно P_i и \mathbf{u}_i , а затем, используя полученные распределения давления и скорости, решить два уравнения на температуру (3.5).

Далее ограничимся случаем, когда на границе $x = 0$ давления в средах равны, а объемы жидкости, закачиваемой в среды Φ_i , пропорциональны соответствующей проницаемости K_i , т.е. в безразмерных переменных заданы граничные условия

$$x = 0: \quad P_i = P_+, \quad T_i = 1, \quad u_m/u_f = \kappa_m/\kappa_f, \quad (3.8)$$

где $P_+ = \text{const}$. Учитывая (3.8), получим, что решение системы (3.3), (3.4) дается соотношениями

$$u_i = \kappa_i, \quad P_i = P_+ - x \quad (3.9)$$

Таким образом, давления в средах Φ_i равны друг другу во всей области $x > 0$ и, согласно соотношениям (2.4), переток жидкости между Φ_i равен нулю: $v_{mf} = 0$. Тогда второй

член в правой части уравнения (3.5) тождественно равен нулю, а уравнения на температуру упрощаются:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_i \partial_t T_i + \kappa_i \nabla T_i &= \Lambda_i \alpha \Delta T_i + n_i \Lambda_m \beta (T_m - T_f) \\ \alpha &= \frac{1}{\text{Pe}}, \quad \beta = \frac{1}{B \text{Pe}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Учитывая уравнения (3.7) и соотношения (2.5), получим, что температура в равновесном течении ($B = 0$) удовлетворяет уравнению

$$\overline{\text{Sh}} \partial_t T + \nabla T = \frac{\Delta T}{\text{Pe}} \quad (3.11)$$

4. Малые возмущения и сильные разрывы. При $\text{Pe} \rightarrow \infty$ система двух уравнений (1.16) на распределение температуры в неравновесном течении имеет две характеристические скорости [1]

$$c_i = \frac{\kappa_i}{\text{Sh}_i} = \text{const} \quad (4.1)$$

С характеристикой c_m (или c_f) в среде Φ_m (или Φ_f) переносятся малые возмущения температуры T_m (или T_f), а параметры в смежной среде Φ_f (или Φ_m) не изменяются. Таким образом, малые возмущения (4.1) описывают перенос возмущений T_i жидкостью в условиях пренебрежимо малой теплопроводности и отсутствия теплообмена между средами Φ_i .

Из интегральной формы записи законов сохранения (3.10) [18, 19] следует, что при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ и любом B возможны разрывы двух типов, S_f и S_m , распространяющихся со скоростями c_f и c_m . Разрывы S_f (и S_m) переносят возмущения T_f (и T_m), а температура T_m (и T_f) в них непрерывна. На каждом разрыве S_i выполняется два условия, соответствующие законам сохранения (3.10), поэтому для эволюционности разрыва S_i необходимо потребовать, чтобы от него уходила ровно одна характеристика [19]. Так как в среде Φ_i скорость разрыва равна c_i , то, в случае общего положения $c_f \neq c_m$, и от разрыва S_i уходит только одна характеристика другого типа c_j , $j \neq i$. Это означает, что любой разрыв S_i эволюционен.

При $\text{Pe} \rightarrow \infty$ уравнение (3.11) на распределение температуры в равновесном течении имеет одну характеристическую скорость

$$c = \frac{1}{\overline{\text{Sh}}} = \text{const}, \quad c < 1 \quad (4.2)$$

Заметим, что из выражения (4.2) ясен физический смысл параметра $\overline{\text{Sh}}$. Температурное число Струхала $\overline{\text{Sh}} > 1$ показывает во сколько раз в равновесном течении частица жидкости движется быстрее, чем распространяются возмущения температуры T , вызванные конвективным переносом тепла. Действительно, если частица нагретой жидкости догоняет S , то далее она в переходном слое отдает тепло скелету пористой среды, охлаждается и движется дальше, обгоняя S . Числа Sh_i характеризуют те же самые процессы в средах Φ_i при $B \rightarrow \infty$.

Из интегральной формы записи уравнения (3.11) следует, что в равновесном течении возможны разрывы только одного типа S , распространяющегося с характеристической скоростью c . При $B = 0$ на разрыве S выполняется одно условие, соответствующее закону сохранения (3.11), поэтому для эволюционности разрыва S необходимо

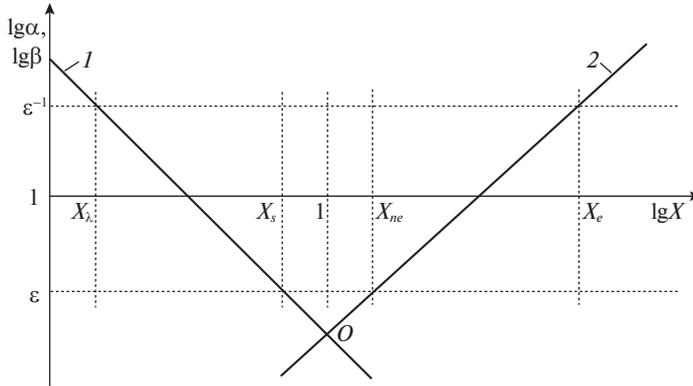


Рис. 2. Зависимость α и β от X в логарифмических осях – прямые 1 и 2 соответственно.

потребуется, чтобы характеристики (4.2) от него не уходили. Так как разрыв распространяется со скоростью c , то в равновесной модели разрыв S всегда эволюционен.

Рассмотрим разрыв S в рамках более общей неравновесной модели (3.10), из которой в пределе $B = 0$ получено уравнение (3.11). В случае общего положения $c \neq c_i$, поэтому при $B \neq 0$ разрыв S неэволюционен, так как от него обязательно уходит одна характеристика c_m и одна c_f . Таким образом, имеется кажущееся противоречие, связанное с тем, что разрыв S эволюционен только в предельном случае $B = 0$ и неэволюционен при любом $B > 0$, несмотря на то, что уравнение (3.11) есть частный случай системы (3.10). Для разрешения противоречия рассмотрим структуру фронта разрыва S в неравновесном течении.

5. Характерные масштабы в температурном фронте. Введем переменную

$$X = L\sqrt{\sigma} = 1/\sqrt{12} \cdot L/L_0,$$

равную числу вовлеченных в неизотермическое течение блоков в среде Φ_m , умноженному на коэффициент $1/\sqrt{12}$. Таким образом, X характеризует пространственный масштаб течения, если за единицу длины взят размер одного блока. Тогда, согласно (3.2), возрастание X соответствует пропорциональному росту времени закачки нагретой жидкости t_s .

Используя переменную X , параметры α и β в уравнениях (3.10) представим в виде

$$\alpha = \frac{1}{\text{Pe}_0 X}, \quad \beta = \frac{X}{\text{Pe}_0}, \quad \text{Pe}_0 = \frac{\rho C \Omega}{\lambda \sqrt{\sigma}} \quad (5.1)$$

Здесь Pe_0 – число Пекле, если масштаб длины равен $1/\sqrt{\sigma} \sim L_0$. Таким образом, параметр α , пропорциональный кондуктивному переносу тепла внутри каждой среды Φ_i , убывает с X как X^{-1} , а параметр β , пропорциональный интенсивности теплообмена между средами, возрастает прямопропорционально X . Согласно (5.1), кривые $\alpha(X)$ и $\beta(X)$ на рис. 2 пересекаются в точке O с координатами $X = 1$, $\alpha = \beta = 1/\text{Pe}_0$.

Введем малую величину $\epsilon \ll 1$, такую что при $\alpha < \epsilon$ и $\beta < \epsilon$ можно пренебречь правой частью уравнения (3.10) по сравнению с конвективным членом $\kappa_i \nabla T_i$, имеющим

порядок единицы в силу выбранных единиц измерения (3.1), (3.2). Определим значения X_λ , X_s , X_{ne} и X_e так, чтобы выполнялись равенства (рис. 2)

$$\alpha(X_\lambda) = \varepsilon^{-1}, \quad \alpha(X_s) = \varepsilon, \quad \beta(X_{ne}) = \varepsilon, \quad \beta(X_e) = \varepsilon^{-1}$$

Тогда, согласно (5.1), получим

$$X_\lambda = \frac{\varepsilon}{\text{Pe}_0}, \quad X_s = \frac{1}{\varepsilon \text{Pe}_0}, \quad X_{ne} = \text{Pe}_0 \varepsilon, \quad X_e = \frac{\text{Pe}_0}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

В силу введенных определений, при $t \sim 1$ и $X \geq X_s$ ($\text{Pe} \gg 1$) влиянием теплопроводности на распределение параметров в пространстве можно пренебречь, а при $X < X_\lambda$ ($\text{Pe} \ll 1$) кондуктивный перенос тепла преобладает над конвективным. При $X_\lambda \leq X < X_s$ необходимо учитывать оба механизма переноса тепла внутри каждого континуума Φ_i . При $X \geq X_e$ ($B\text{Pe} \ll 1$) происходит течение близкое к локальному тепловому равновесию, т.е. $T_f \approx T_m$, а при $X < X_{ne}$ ($B\text{Pe} \gg 1$) теплообмен между средами пренебрежимо мал и, следовательно, распределения температур T_m и T_f не зависят друг от друга. При $X_{ne} \leq X < X_e$ существенны неравновесные эффекты из-за теплообмена между средами Φ_i .

Предположим, что $X_s < X_{ne}$, т.е., согласно обозначениям (5.2), $\text{Pe}_0 \gg 1$, а точка O на рис. 2 лежит ниже горизонтальной прямой с ординатой ε . Тогда выполняется следующая цепочка неравенств

$$X_\lambda \ll X_s < 1 < X_{ne} \ll X_e \quad (5.3)$$

Введем переменные

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{\frac{\text{ShPe}x}{t}}, \quad \xi = (\text{Sh}x - t) \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\text{Sh}t}}, \quad \eta = \frac{\text{Sh}x - t}{\text{Sh}t} \\ \xi &= \xi_0 - \sqrt{\frac{\text{Pe}_0 X t}{\text{Sh}}}, \quad \xi = \eta \sqrt{\text{ShPe}_0 X t} \end{aligned} \quad (5.4)$$

и далее рассмотрим распределения T_i на плоскостях $\{\xi, T\}$ и $\{\eta, T\}$. По определению (5.4) сильный разрыв S (при $\alpha, \beta \rightarrow 0$) расположен при $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Переменные ξ и η удобны для выделения распределений в структуре фронта разрыва S , в которых характерный масштаб длины Δx пропорционален \sqrt{t} и t , соответственно.

На масштабах $X < X_\lambda$, $t \sim 1$ уравнения (3.10) сводятся к системе двух уравнений теплопроводности, решение которых зависит только от переменной ξ_0 :

$$\text{Sh}_i \partial_i T_i = \frac{\Lambda_i}{\text{Pe}} \Delta T_i, \quad T_i = 1 - \text{erf} \left(\frac{\xi_0}{2} \sqrt{\frac{\text{Sh}_i}{\text{Sh} \Lambda_i}} \right), \quad (5.5)$$

где $\text{erf}(x)$ — функция ошибок. Согласно выражениям (5.4), на начальных этапах закачки жидкости, т.е. при $Xt \rightarrow 0$, выполняется условие $\xi_0 \rightarrow \xi$, а в решении (5.5) можно заменить ξ_0 на ξ . Уравнения (5.5) описывают автомодельные температурные пограничные слои в средах Φ_i , образующиеся мгновенно при $Xt \rightarrow 0$ (рис. 3а, кривые 1, 2). Толщина этих слоев Δx_i дается оценкой

$$\Delta x_i \sim \sqrt{\frac{t \Lambda_i}{\text{Sh}_i \text{Pe}}} = \sqrt{\frac{\Lambda_i}{\text{Sh}_i \text{Pe}_0}} \left(\frac{t}{X} \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

При $X < X_\lambda$ и возрастании Xt кривые 1 и 2 на плоскости $\{\xi, T\}$ смещаются влево, так как переменная ξ убывает при $\xi_0 = \text{const}$ (рис. 3а). Решение (5.5) на плоскости $\{\eta, T\}$,

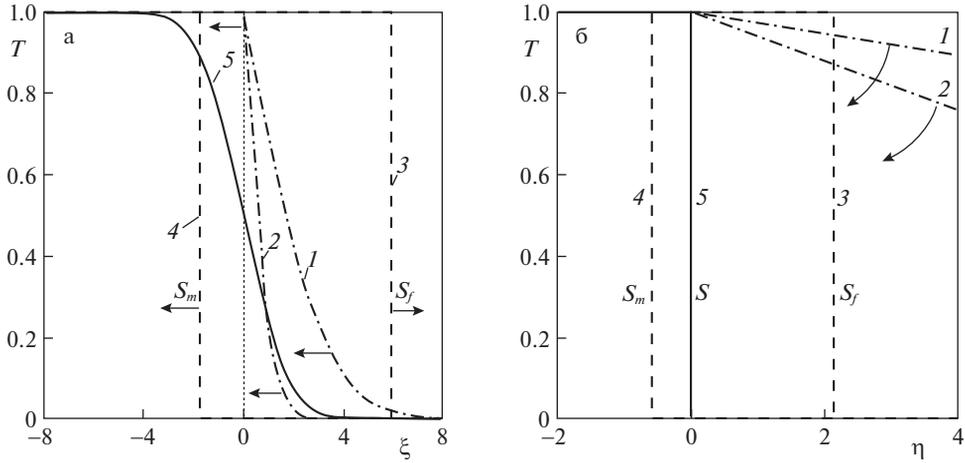


Рис. 3. Асимптотические случаи распределения T_i при $Sh_m = 1.86$, $Sh_f = 0.53$, $\kappa_m = \Lambda_m = 0.3$, $Re_0 = 18.3$. Кривые 1, 2 и 3 – распределения T_f , T_m при $X < X_\lambda$, $t \ll 1$ и $X_s \leq X < X_{ne}$, соответственно. Кривая 5 – равновесное распределение $T = T_f = T_m$ при $X \geq X_e$. Стрелки показывают направление смещения кривых при возрастании Xt .

$\eta \sim 1$ дает прямые линии (рис. 3б). В пределе $Xt \rightarrow 0$ они совпадают с горизонтальной прямой $T = 1$, а при возрастании Xt их наклон к оси η увеличивается.

На масштабах $X_\lambda < X < X_s$, $t \sim 1$, когда члены $\kappa_i \nabla T_i$ и $\Lambda_i \Delta T_i / Pe$ в уравнениях (3.10) сравнимы, а теплообмен между средами Φ_i еще пренебрежимо мал ($X < X_e$), распределение температуры описывается уравнениями

$$Sh_i \partial_i T_i + \kappa_i \nabla T_i = \frac{\Lambda_i}{Pe} \Delta T_i \quad (5.7)$$

Решение системы (5.7) имеет вид

$$T_i = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_i}{2}\right), \quad \xi_i = (Sh_i x - \kappa_i t) \sqrt{\frac{Pe}{\Lambda_i Sh_i t}} \quad (5.8)$$

Следовательно, температуры T_i имеют автомодельные распределения от различных переменных ξ_i . Решения (5.8) описывают постепенное формирование двух различных фронтов температуры S_i в средах Φ_i , для толщины которых Δx_i остается справедливой оценка (5.6). С возрастанием Xt толщины фронтов на плоскости $\{\xi, T\}$ уменьшаются и в результате переходных процессов при $X_\lambda \leq X < X_s$ распределения температуры непрерывным образом эволюционируют к следующему асимптотическому распределению при $X_s \leq X < X_{ne}$.

На масштабах $X_s \leq X < X_{ne}$, $t \sim 1$ можно пренебречь как теплопроводностью ($X_s \leq X$), так и теплообменом между средами ($X < X_{ne}$), а (3.10) сводится к двум уравнениям переноса

$$Sh_i \partial_i T_i + \kappa_i \nabla T_i = 0 \quad (5.9)$$

Система (5.9) описывает разрывные распределения температуры в среде Φ_i , связанные с распространением со скоростями c_i (4.1) двух сильных разрывов S_i (рис. 3, кри-

вые 3, 4). В результате T_i в структуре фронта S имеют автомодельные распределения от переменной η

$$T_i = 1 - \theta(\eta), \quad (5.10)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Если эти решения построить на плоскости $\{\xi, T\}$, то график T_i имеет форму “ступеньки”, смещающейся в случае разрыва S_f (или S_m) в положительном (или отрицательном) направлении оси ξ (предполагается, что $c_m < c_f$). На плоскости $\{\eta, T\}$ распределения (5.10) при возрастании X не изменяются, т.е. при $X_s \leq X < X_{ne}$ реализуется автомодельное распределение температуры T_i от переменной η . Для толщины Δx фронта S , определяемой как расстояние от разрыва S_m до S_f , справедлива оценка

$$\Delta x \sim (c_f - c_m)t = \left(\frac{\kappa_f}{\text{Sh}_f} - \frac{\kappa_m}{\text{Sh}_m} \right) t \sim 1 \quad (5.11)$$

При этом разрывы S_i нужно понимать как узкие температурные подслои, имеющие толщины (5.6).

На промежуточных масштабах $X_{ne} \leq X < X_e$ температуры T_i непрерывным образом эволюционируют к следующему асимптотическому распределению при $X \geq X_e$. Здесь при возрастании Xt температуры T_i между разрывами S_m и S_f начинают выравниваться из-за теплообмена между средами Φ_i , сближаясь при $X \sim X_e$.

При $X > X_e$, $t \sim 1$ можно пренебречь как теплопроводностью ($X_s \leq X$), так и считать течение равновесным ($X > X_e$), происходящим при локально однородной температуре $T = T_i$. В этом случае уравнение на температуру (3.11) сводится к уравнению переноса ($\text{Pe} \gg 1$)

$$\overline{\text{Sh}} \partial_\eta T + \nabla T = 0, \quad (5.12)$$

которое описывает разрывное распределение T , связанное с распространением со скоростью c (4.2) сильного разрыва S (рис. 3б, линия 5):

$$T = 1 - \theta(\eta) \quad (5.13)$$

Для оценки толщины температурного слоя при $X \geq X_e$ заметим, что, в соответствии с (3.10), время установления локального теплового равновесия t_e пропорционально константе $B\text{Pe}$, т.е. $t_e \sim B\text{Pe}$. Следовательно, так как скорость разрыва S постоянна и равна c (4.2), то для протяженности переходного слоя Δx_e , определяющего только теплообменом между средами Φ_i ($B\text{Pe} \sim 1$, $\text{Pe} \rightarrow \infty$), получим оценку

$$\Delta x_{ne} \sim cB\text{Pe} = \frac{B\text{Pe}}{\text{Sh}} = \frac{\text{Pe}_0}{\sigma L_0^2 \text{Sh}} \frac{1}{X} \quad (5.14)$$

Если же пренебречь неравновесными эффектами, рассмотрев фронт, определяющийся только теплопроводностью ($B = 0$, $\text{Pe} \sim 1$), то, согласно (3.11), для его протяженности Δx_λ получим

$$\Delta x_\lambda \sim \sqrt{\frac{t}{\text{ShPe}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{ShPe}_0}} \left(\frac{t}{X} \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

Таким образом, согласно выражениям (3.6), (3.10) и (5.1), при $X > X_e$, $t \sim 1$ имеем $\Delta x_{ne} \sim X^{-1}$, $\Delta x_\lambda \sim X^{-1/2}$. Следовательно, при $X \gg 1$ выполняется неравенство

$\Delta x_\lambda > \Delta x_e$, а толщина фронта S определяется теплопроводностью. В этом случае T есть решение уравнения (3.11)

$$T = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(\xi)) \quad (5.16)$$

Соотношение (5.16) определяет кривую S на рис. 3а, которая с возрастанием Xt не перемещается на плоскости $\{\xi, T\}$. Заметим, что устремив в выражении для температуры (5.16) t к бесконечности и перейдя к переменной η , получим решение (5.13).

Таким образом, при $X < X_{ne}$ толщина Δx фронта S , в соответствии с соотношением (5.11), растет прямо пропорционально времени t . При этом фронт содержит два температурных подслоя, соответствующих разрывам S_i , толщины которых Δx_i растут как \sqrt{t} (см. (5.6)). При $X_{ne} \leq X < X_e$ Δx достигает значения $\Delta x \sim BPe/\sqrt{\text{Sh}}$ (см. (5.14)) и при $X > X_e$ растет как \sqrt{t} (см. (5.15)), а внутренние температурные подслои исчезают из-за теплообмена между средами Φ_i . Следовательно, неэволюционный в рамках неравновесной модели разрыв S всегда имеет структуру конечной протяженности. В рамках неравновесной модели на таких масштабах, что $B \ll 1$, фронт S нужно понимать не как сильный разрыв, а бесконечно узкий переходный слой.

В заключение отметим, что если не выполняется условие $Re_0 \gg 1$, то $X_s > X_{ne}$, а цепочка неравенств (5.3) нарушается. При $Re_0 \sim 1$ сразу после образования температурных слоев в средах Φ_i при $X < X_\lambda$ может становиться существенным теплообмен между средами Φ_i , а промежуточный асимптотический этап $X_s \leq X < X_{ne}$, на котором фронт ограничен сильными разрывами S_i , не реализуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (МД-3567.2018.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев А.А. Исследование эволюционности разрывов при фильтрации бинарной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 90–102.
2. Афанасьев А.А., Султанова Т.В. Исследование гидродинамической неустойчивости фронта вытеснения при закачке углекислого газа в водонасыщенный пласт // Изв. РАН МЖГ. 2016. № 4. С. 85–96.
3. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
4. Шагапов В.Ш., Ильясов У.Р., Насырова Л.А. Об инжекции воды в геотермальный пласт // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 4. С. 127–138.
5. Афанасьев А.А., Бармин А.А. Нестационарные одномерные фильтрационные течения воды и пара с учетом фазовых переходов // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 134–143.
6. Gandomkar A., Gray K.E. Local thermal non-equilibrium in porous media with heat conduction // Int. J. Heat Mass Trans. 2018. V. 124. P. 1212–1216.
7. Gelet R., Loret B., Khalili N. The significance of local thermal non-equilibrium in simulations of enhanced geothermal recovery // 14th IACMAG, Kyoto, Japan. 2014. P. 1713–1718.
8. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.
9. Warren J.E., Root P.J. The behavior of naturally fractured reservoirs // SPE J. 1963. V. 3. № 3. P. 245–255.
10. Нугматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
11. Pruess K., Narasimhan T.N. A practical method for modelling fluid and heat flow in fractured porous media // SPE. J. 1985 V. 25. № 1. P. 14–26.

12. *Kazemi H., Merrill L.S., Porterfield K.L., Zeman P.R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // SPE J. 1976. V. 16. № 6. P. 317–326.
13. *Afanasyev A.* Reservoir simulation with MUFITS code: Extension for double porosity reservoirs and flows in horizontal wells // Energy Proc. 2017. V. 125. P. 596–603.
14. *Lu W., Xiang Y.* Analysis of the instantaneous local thermal equilibrium assumption for heat exchange between rock matrix and fracture water // Adv. Mater. Res. 2012. V. 594–597. P. 2430–2437.
15. *Nield D.A.* A note on local thermal non-equilibrium in porous media near boundaries and interfaces // Transp. Porous Media. 2012. V. 95. P. 581–584.
16. *Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
17. *Афанасьев А.А.* Об одном представлении уравнений многокомпонентной многофазной фильтрации // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 265–274.
18. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
19. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.

The Structure of Temperature Front in a Fractured Porous Medium

A. A. Afanasyev[#]

Institute of Mechanics of Moscow State University, Moscow, Russia

[#] e-mail: afanasyev@imec.msu.ru

We investigate the structure of a temperature front propagating through a fractured-porous medium with account for break down of local thermal equilibrium between fractures and low-permeability matrix in which the fractures are embedded. Using the dual porosity model, we estimate the front thickness and constrain the similarity parameters for which it is determined by either heat conduction or non-equilibrium heat transfer in the medium. We show that three asymptotic cases for the temperature distribution in the front exist for different space and time scales. The temperature distribution in these cases is described with analytical relationships.

Keywords: porous medium, non-isothermal flow, dual porosity, shock wave, self-similar solution

REFERENCES

1. *Afanasyev A.A.* Investigation of the evolutionarity of discontinuities in binary mixture flows through a porous medium // Fluid Dyn., 2014, vol. 49, no. 1, pp. 77–87.
2. *Afanasyev A.A., Sultanova T.V.* Investigation of hydrodynamic instability of CO₂ injection into an aquifer // Fluid Dyn., 2016, vol. 51, no. 4, pp. 513–523.
3. *Barmin A.A., Tsytkin G.G.* Mathematical model of water injection into a steam-saturated geothermal reservoir // Fluid Dyn., 1996, vol. 31, no. 6, pp. 874–879.
4. *Shagapov V.Sh., Il'yasov U.R., Nasyrova L.A.* Water injection into a geothermal reservoir // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2002, vol. 43, no. 4, pp. 593–602.
5. *Afanas'ev A.A., Barmin A.A.* unsteady one-dimensional water and steam flows through a porous medium with allowance for phase transitions // Fluid Dyn., 2007, vol. 42, no. 4, pp. 627–636.
6. *Gandomkar A., Gray K.E.* Local thermal non-equilibrium in porous media with heat conduction // Int. J. Heat Mass Trans., 2018, vol. 124, pp. 1212–1216.
7. *Gelet R., Loret B., Khalili N.* The significance of local thermal non-equilibrium in simulations of enhanced geothermal recovery // 2014. 14th IACMAG, Kyoto, Japan. pp. 1713–1718.
8. *Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // JAMM, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
9. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // SPE J., 1963, vol. 3, no. 3, pp. 245–255.

10. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1, 2. N.Y.: Hemisphere; 1990. 507 p.
11. *Pruess K., Narasimhan T.N.* A practical method for modelling fluid and heat flow in fractured porous media // SPE J., 1985, vol. 25, no. 1, pp. 14–26.
12. *Kazemi H., Merrill L.S., Porterfield K.L., Zeman P.R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // SPE J., 1976, vol. 16, no. 6, pp. 317–326.
13. *Afanasyev A.* Reservoir simulation with MUFITS code: Extension for double porosity reservoirs and flows in horizontal wells // Energy Proc., 2017, vol. 125, pp. 596–603.
14. *Lu W., Xiang Y.* Analysis of the instantaneous local thermal equilibrium assumption for heat exchange between rock matrix and fracture water // Adv. Mater. Res., 2012, vol. 594–597, pp. 2430–2437.
15. *Nield D.A.* A note on local thermal non-equilibrium in porous media near boundaries and interfaces // Transp. Porous Media 2012, vol. 95, pp. 581–584.
16. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Motion of Liquids and Gases in Natural Formations. Moscow: Nedra, 1984. 208 p. (in Russian)
17. *Afanas'ev A.A.* A Representation of the equations of multicomponent multiphase seepage // JAMM, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 192–198.
18. *Sedov L.I.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Reading MA: Addison-Wesley, 1965.
19. *Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I.* Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton FL: CRC Press; 1995.