

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**© 2020 г. Л. А. Агаловян^{1,*}, М. Л. Агаловян^{1,**}, Т. В. Закарян^{1,***}¹ *Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения*** e-mail: lagal@sci.am**** e-mail: mheraghalovyan@rambler.ru***** e-mail: zaqaryantatevik@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2019 г.

После доработки 22.10.2019 г.

Принята к публикации 31.10.2019 г.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача о вынужденных колебаниях ортотропной двухслойной пластинки при наличии в слоях внутреннего трения. Считается, что трение пропорционально скорости точек. На лицевых поверхностях двухслойного пакета заданы значения напряжений, которые изменяются во времени гармонически. Найдено общее асимптотическое решение внутренней задачи. Показано, что трение (диссипация) приводит к тому, что амплитуды колебаний всегда остаются конечными, в то время как при отсутствии внутреннего трения существуют частоты, при которых амплитуда превращается в бесконечность.

Ключевые слова: слоистая пластинка, вынужденные колебания, внутреннее трение, асимптотическое решение

DOI: 10.31857/S0032823520010038

Введение. Для решения динамических задач теории упругости использовались метод Фуре, интегральные преобразования, методы Винера–Хопфа и Смирнова–Соболева [1]. Для решения статических и динамических задач пластин и оболочек, в том числе слоистых, на основе классической и уточненных теорий эффективным оказался также численно-аналитический метод [2, 3]. Сравнительно мало работ, посвященных пространственным статическим и динамическим задачам пластин и оболочек. Для решения подобных задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Решению статических пространственных задач однослойных и многослойных пластин и оболочек посвящены монографии [4–6]. Некоторые классы динамических задач решены для анизотропных пластин [5, 7–9] и для оболочек [10]. Асимптотическим методом изучены локализованные колебания и волны в тонких телах [11–15]. Для изучения напряженно-деформированных состояний слоистых структур использован асимптотический метод [16–19]. Получено асимптотическое решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда [20], установлена асимптотика частот и мод собственных колебаний тонкой упругой прокладки между двумя абсолютно жесткими профилями [21].

В настоящей работе определено асимптотическое решение трехмерной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной двухслойной пластинки с учетом влияния трения в слоях. Считается, что трение пропорционально скорости точек [22].

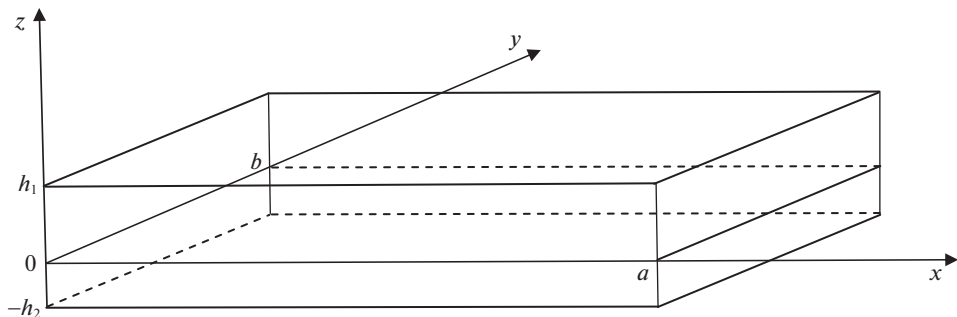


Рис. 1

1. Основные уравнения и постановка задачи. Требуется найти в области

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 = h \ll l\}$$

$$l = \min(a, b)\},$$

занятой двухслойной пластинкой, решение уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(m)}}{\partial z} - k_m \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial t^2}, \quad (x, y, z; u, v, w), \quad m = 1, 2 \quad (1.1)$$

и соотношений упругости ортотропного тела

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x} = a_{11}^{(m)} \sigma_{xx}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{yy}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{zz}^{(m)}, \quad (x, y, z; u, v, w; 1, 2, 3), \quad m = 1, 2$$

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = a_{66}^{(m)} \sigma_{xy}^{(m)}, \quad \frac{\partial w^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(m)}}{\partial z} = a_{55}^{(m)} \sigma_{xz}^{(m)} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial z} = a_{44}^{(m)} \sigma_{yz}^{(m)},$$

где k – коэффициент сопротивления, ρ – плотность. В уравнении (1.1) и далее обозначение типа $(x, y, z; u, v, w)$ означает, что есть еще два уравнения, которые можно получить из уравнения (1.1) циклической заменой переменных x на y , y на z , z на x ; аналогичная перестановка для функций u, v, w . Группы (x, y, z) , (u, v, w) разделяются точкой с запятой (;). Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям на лицевых поверхностях $z = h_1, -h_2$ пластинки:

$$\sigma_{\alpha z}^{(1)}(x, y, h_1, t) = \sigma_{\alpha z}^+(\xi, \eta) \cos \Omega t, \quad \alpha = x, y, z$$

$$\sigma_{\alpha z}^{(2)}(x, y, -h_2, t) = -\sigma_{\alpha z}^-(\xi, \eta) \cos \Omega t \quad (1.3)$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad l = \min(a, b),$$

где Ω – частота внешнего воздействия, а также условиям полного контакта между слоями пакета (рис. 1):

$$\sigma_{\alpha z}^{(1)}(x, y, 0, t) = \sigma_{\alpha z}^{(2)}(x, y, 0, t), \quad \alpha = x, y, z$$

$$u^{(1)}(x, y, 0, t) = u^{(2)}(x, y, 0, t), \quad (u, v, w) \quad (1.4)$$

и условиям на боковой поверхности, которые пока не будем конкретизировать.

2. Общий интеграл внутренней задачи. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(m)}(x, y, z, t) &= \sigma_{jkI}^{(m)}(x, y, z) \sin \Omega t + \sigma_{jkII}^{(m)}(x, y, z) \cos \Omega t, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad j, k = 1, 2, 3 \\ u^{(m)}(x, y, z, t) &= u_I^{(m)}(x, y, z) \sin \Omega t + u_{II}^{(m)}(x, y, z) \cos \Omega t, \quad (u, v, w), \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U_I = u_I/l, \quad U_{II} = u_{II}/l, \quad (u, v, w) \quad (2.2)$$

Получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11I}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m)}}{\partial \zeta} + k_m l^2 \Omega U_{II}^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 U_I^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\ \frac{\partial \sigma_{11II}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m)}}{\partial \zeta} - k_m l^2 \Omega U_I^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 U_{II}^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\ \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23I}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33I}^{(m)}}{\partial \zeta} + k_m l^2 \Omega W_{II}^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 W_I^{(m)}, \quad (I, II) \\ \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(m)} \sigma_{11I}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22I}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33I}^{(m)} \\ \frac{\partial U_{II}^{(m)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11I}^{(m)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22I}^{(m)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33I}^{(m)}$$

$$\frac{\partial V_I^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12I}^{(m)}, \quad (I, II)$$

$$\frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13I}^{(m)}, \quad \frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23I}^{(m)} \quad (I, II)$$

Решение I этой сингулярно возмущенной системы складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b):

$$I = I^{\text{int}} + I_b \quad (2.4)$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk\gamma}^{\text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk\gamma}^{(s)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad \gamma = I, II, \quad s = \overline{0, N} \\ (U_\gamma^{\text{int}}, V_\gamma^{\text{int}}, W_\gamma^{\text{int}}) &= \varepsilon^s (U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}, W_\gamma^{(s)}), \quad \gamma = I, II \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по нему (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям s от 0 до N .

Подставив решение (2.5) в уравнения (2.3), для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{jk\gamma}^{(s)}, U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}, W_\gamma^{(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m,s)}}{\partial \zeta} + 2H_m \Omega U_{II}^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 U_I^{(m,s)} = 0, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{11II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - 2H_m \Omega U_I^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 U_{II}^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} + 2H_m \Omega W_{II}^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 W_{II}^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - 2H_m \Omega W_I^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial U_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\
& \frac{\partial U_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial V_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial V_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23II}^{(m,s)}, \quad 2H_m = k_m h^2, \quad \rho_m^2 = \rho^{(m)} h^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из системы (2.6) все компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{13\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \left(\frac{\partial U_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
\sigma_{23\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(m)}} \left(\frac{\partial V_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(m)}} \left(\frac{\partial U_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
 \sigma_{11\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left(-A_{23}^{(m)} \frac{\partial W_{\gamma}^{(m,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(m)} \frac{\partial U_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(m)} \frac{\partial V_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
 \sigma_{22n}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left(-A_{13}^{(m)} \frac{\partial W_{\gamma}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(m)} \frac{\partial U_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(m)} \frac{\partial V_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
 \sigma_{33\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left(A_{11}^{(m)} \frac{\partial W_{\gamma}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(m)} \frac{\partial U_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(m)} \frac{\partial V_{\gamma}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad m = 1, 2, \quad \gamma = I, II,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - (a_{12}^{(m)})^2 \\
 A_{12}^{(m)} &= a_{12}^{(m)} a_{33}^{(m)} - a_{23}^{(m)} a_{13}^{(m)} \\
 A_{13}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{23}^{(m)} - a_{13}^{(m)} a_{12}^{(m)} \\
 A_{22}^{(m)} &= a_{22}^{(m)} a_{33}^{(m)} - (a_{23}^{(m)})^2 \\
 A_{23}^{(m)} &= a_{13}^{(m)} a_{22}^{(m)} - a_{12}^{(m)} a_{23}^{(m)} \\
 A_{33}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{33}^{(m)} - (a_{13}^{(m)})^2 \\
 \Delta^{(m)} &= a_{11}^{(m)} A_{22}^{(m)} - a_{12}^{(m)} A_{12}^{(m)} - a_{13}^{(m)} A_{23}^{(m)}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

А для определения компонент вектора перемещения получим уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_m^2 \Omega^2 a_{55}^{(m)} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + (4H_m^2 + \rho_m^4 \Omega^2) \Omega^2 (a_{55}^{(m)})^2 U_I^{(m,s)} &= R_u^{(m,s)}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}) \\
 R_u^{(m,s)} &= a_{55}^{(m)} \left[2H_m \Omega a_{55}^{(m)} \left(\frac{\partial \sigma_{11II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 U_{I*}^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2H_m \Omega \frac{\partial^2 W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \rho_m^2 \Omega^2 a_{55}^{(m)} U_{I*}^{(m,s)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 U_{I*}^{(m,s)} &= \frac{\partial \sigma_{11I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}; \xi, \eta; 1, 2) \\
 \frac{\partial^4 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\rho_m^2 \Omega^2 \Delta_m}{A_{11}^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{(4H_m^2 + \rho_m^4 \Omega^2) \Omega^2 \Delta_m^2}{(A_{11}^{(m)})^2} W_I^{(m,s)} &= R_w^{(m,s)} \\
 R_w^{(m,s)} &= \frac{2H_m \Omega (\Delta^{(m)})^2}{A_{11}^2} \left[\frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left(A_{23}^{(m)} \frac{\partial^2 U_{II}^{(m,s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{12}^{(m)} \frac{\partial^2 V_{II}^{(m,s)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{\Delta^{(m)}}{A_{11}^{(m)}} \frac{\partial^2 W_{I*}^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\rho_m^2 \Omega^2 (\Delta^{(m)})^2}{(A_{11}^{(m)})^2} W_{I*}^{(m,s)} \\
 W_{I*}^{(m,s)} &= \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left(A_{23}^{(m)} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{12}^{(m)} \frac{\partial^2 V_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Остальные компоненты вектора перемещения определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned} U_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[\frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 U_I^{(m,s)} + U_{I*}^{(m,s)} \right] \\ V_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[\frac{1}{a_{44}^{(m)}} \frac{\partial^2 V_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 V_I^{(m,s)} + V_{I*}^{(m,s)} \right] \\ W_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[\frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,s)} + W_{I*}^{(m,s)} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решением уравнения (2.9) является функция

$$U_I^{(m,s)} = D_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1u}^{(m)}(\zeta) + D_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2u}^{(m)}(\zeta) + D_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3u}^{(m)}(\zeta) + D_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4u}^{(m)}(\zeta) + \bar{U}_I^{(m,s)}, \quad (2.12)$$

где $\bar{U}_I^{(m,s)}$ – частное решение уравнения (2.9), а также использованы обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{1u}^{(m)} &= \text{sh } c_u^{(m)} \zeta \sin d_u^{(m)} \zeta, & \varphi_{2u}^{(m)} &= \text{sh } c_u^{(m)} \zeta \cos d_u^{(m)} \zeta \\ \varphi_{3u}^{(m)} &= \text{ch } c_u^{(m)} \zeta \sin d_u^{(m)} \zeta, & \varphi_{4u}^{(m)} &= \text{ch } c_u^{(m)} \zeta \cos d_u^{(m)} \zeta \\ c_u^{(m)} &= \sqrt{\frac{\Omega a_{55}^{(m)}}{2} \sqrt{-\rho_m^2 \Omega + \sqrt{\rho_m^4 \Omega^2 + 4H_m^2}}} \\ d_u^{(m)} &= \sqrt{\frac{\Omega a_{55}^{(m)}}{2} \sqrt{\rho_m^2 \Omega + \sqrt{\rho_m^4 \Omega^2 + 4H_m^2}}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда, согласно соотношениям (2.7), (2.11), получим

$$\begin{aligned} U_{II}^{(m,s)} &= -D_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4u}^{(m)}(\zeta) + D_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3u}^{(m)}(\zeta) - D_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2u}^{(m)}(\zeta) + D_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1u}^{(m)}(\zeta) + \bar{U}_{II}^{(m,s)} \\ \sigma_{13I}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} [(c_u^{(m)}\varphi_{3u} + d_u^{(m)}\varphi_{2u})D_1^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{4u} - d_u^{(m)}\varphi_{1u})D_2^{(m,s)} + \\ &+ (c_u^{(m)}\varphi_{1u} + d_u^{(m)}\varphi_{4u})D_3^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{2u} - d_u^{(m)}\varphi_{3u})D_4^{(m,s)}] + \bar{\sigma}_{13I}^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{13II}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} [-(c_u^{(m)}\varphi_{2u} - d_u^{(m)}\varphi_{3u})D_1^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{1u} + d_u^{(m)}\varphi_{4u})D_2^{(m,s)} - \\ &- (c_u^{(m)}\varphi_{4u} - d_u^{(m)}\varphi_{1u})D_3^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{3u} + d_u^{(m)}\varphi_{2u})D_4^{(m,s)}] + \bar{\sigma}_{13II}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{U}_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left(\frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial^2 \bar{U}_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 \bar{U}_I^{(m,s)} + U_{I*}^{(m,s)} \right) \\ \bar{\sigma}_{13n}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \left(\frac{\partial \bar{U}_n^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_n^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad n = I, II \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решением уравнения (2.9) для перемещения V является функция

$$V_I^{(m,s)} = F_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1v}^{(m)}(\zeta) + F_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2v}^{(m)}(\zeta) + F_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3v}^{(m)}(\zeta) + F_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4v}^{(m)}(\zeta) + \bar{V}_I^{(m,s)}, \quad (2.15)$$

где функции $\varphi_{jv}^{(m)}(\zeta)$ определяются по формулам (2.13) в которых вместо U , a_{55} необходимо подставить V , a_{44} .

Аналогично, для уравнения (2.10) имеем решение

$$W_I^{(m,s)} = B_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1w}^{(m)}(\zeta) + B_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2w}^{(m)}(\zeta) + B_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3w}^{(m)}(\zeta) + B_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4w}^{(m)}(\zeta) + \bar{W}_I^{(m,s)}, \quad (2.16)$$

где $\varphi_{jw}^{(m)}(\zeta)$, c_w вычисляются по формулам (2.13) заменой $\varphi_{ju}^{(m)}(\zeta)$, c_u , a_{55} на $\varphi_{jw}^{(m)}(\zeta)$, c_w , Δ/A_{11} .

Удовлетворив граничным условиям (1.3) и условиям контакта (1.4), получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
 \sigma_{j3I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= 0, \quad \sigma_{j3II}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) = \sigma_{\alpha z}^{+(s)}(\xi, \eta), \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = x, y, z \\
 \sigma_{jz}^{+(0)} &= \varepsilon \sigma_{jz}^+, \quad \sigma_{jz}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \\
 \sigma_{j3I}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) &= 0, \quad \sigma_{j3II}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) = -\sigma_{\alpha z}^{-(s)}(\xi, \eta), \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = x, y, z \\
 \sigma_{jz}^{-(0)} &= \varepsilon \sigma_{jz}^-, \quad \sigma_{jz}^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0 \\
 \sigma_{j3m}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) &= \sigma_{j3m}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0), \quad j = 1, 2, 3, \quad m = I, II \\
 U_m^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) &= U_m^{(2,s)}(\xi, \eta, 0), \quad (U, V, W)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Алгебраическая система (2.17) распадается на три алгебраические системы относительно $D_j^{(m,s)}$, $F_j^{(m,s)}$ и $B_j^{(m,s)}$, где $j = 1, 2, 3, 4$, $m = I, II$.

Алгебраическая система относительно $D_j^{(m,s)}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 b_{\alpha\beta} X_\beta^{(s)} &= a_\alpha^{(s)}, \quad \alpha = 1, \dots, 8, \quad \beta = 1, \dots, 8 \\
 X_j^{(s)} &= D_j^{(1,s)}, \quad X_{4+j}^{(s)} = D_j^{(2,s)}, \quad j = 1, \dots, 4,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b_{1u}^{(1)} & b_{2u}^{(1)} & b_{3u}^{(1)} & b_{4u}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1u}^{(2)} & b_{2u}^{(2)} & b_{3u}^{(2)} & b_{4u}^{(2)} \\ -b_{4u}^{(1)} & b_{3u}^{(1)} & -b_{2u}^{(1)} & b_{1u}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{4u}^{(2)} & b_{3u}^{(2)} & -b_{2u}^{(2)} & b_{1u}^{(2)} \\ 0 & c_u^{(1)} & d_u^{(1)} & 0 & 0 & -c_u^{(2)} & -d_u^{(2)} & 0 \\ 0 & d_u^{(1)} & -c_u^{(1)} & 0 & 0 & -d_u^{(2)} & c_u^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_{1u}^{(s)} \\ a_{2u}^{(s)} \\ a_{3u}^{(s)} \\ a_{4u}^{(s)} \\ a_{5u}^{(s)} \\ a_{6u}^{(s)} \\ a_{7u}^{(s)} \\ a_{8u}^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{3u}^{(1)}(\zeta_1) + d_u^{(1)} \varphi_{2u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{1u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{3u}^{(2)}(-\zeta_2) + d_u^{(2)} \varphi_{2u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{2u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{4u}^{(1)}(\zeta_1) - d_u^{(1)} \varphi_{1u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{2u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{4u}^{(2)}(-\zeta_2) - d_u^{(2)} \varphi_{1u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{3u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{1u}^{(1)}(\zeta_1) + d_u^{(1)} \varphi_{4u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{3u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{1u}^{(2)}(-\zeta_2) + d_u^{(2)} \varphi_{4u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{4u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{2u}^{(1)}(\zeta_1) - d_u^{(1)} \varphi_{3u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{4u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{2u}^{(2)}(-\zeta_2) - d_u^{(2)} \varphi_{3u}^{(2)}(-\zeta_2)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1u}^{(s)} &= -a_{55}^{(1)} \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), & a_{2u}^{(s)} &= -a_{55}^{(2)} \bar{\sigma}_{13I}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \\
 a_{3u}^{(s)} &= a_{55}^{(1)} (\sigma_{xz}^{+(s)} - \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)), & a_{4u}^{(s)} &= a_{55}^{(2)} (-\sigma_{xz}^{-(s)} - \bar{\sigma}_{13II}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2)) \\
 a_{5u}^{(s)} &= \bar{\sigma}_{13I}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0), & a_{6u}^{(s)} &= \bar{\sigma}_{13II}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{\sigma}_{13II}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) \\
 a_{7u}^{(s)} &= \bar{U}_I^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{U}_I^{(1,s)}(\xi, \eta, 0), & a_{8u}^{(s)} &= \bar{U}_{II}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{U}_{II}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0)
 \end{aligned}$$

Решением системы (2.18) по формуле Крамера является

$$X_\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \quad \Delta = |b_{\alpha\beta}|$$

Аналогичным образом определяются $F_j^{(m,s)}$, $B_j^{(m,s)}$ циклической заменой $\left(U, V, W; a_{55}^{(m)}, a_{44}^{(m)}, \frac{\Delta^{(m)}}{A_{11}^{(m)}} \right)$ в формулах (2.18), (2.19).

Если функции $\sigma_{\alpha z}^+$, $\sigma_{\alpha z}^-$ являются многочленами от ξ , η , итерационный процесс обрывается, и в результате получим математически точное решение во внутренней задаче. В качестве иллюстрации приведем это решение для следующего случая:

$$\sigma_{zz}^+ = \text{const}, \quad \sigma_{zz}^- = 0, \quad \sigma_{xz}^\pm = 0, \quad \sigma_{yz}^\pm = 0$$

В этом случае итерация обрывается на исходном приближении, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} u^{(m)} = 0, \quad v^{(m)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(m)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(m)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(m)} = 0 \\ w^{(m)} = IW_I^{(m,0)} \sin \Omega t + IW_{II}^{(m,0)} \cos \Omega t \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{jjl}^{(m,0)} \sin \Omega t + \varepsilon^{-1} \sigma_{jjl}^{(m,0)} \cos \Omega t, \quad \alpha = x, y, z, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$W_I^{(m,0)} = B_1^{(m,0)}(\xi)\varphi_{1w}^{(m)}(\zeta) + B_2^{(m,0)}(\xi)\varphi_{2w}^{(m)}(\zeta) + B_3^{(m,0)}(\xi)\varphi_{3w}^{(m)}(\zeta) + B_4^{(m,0)}(\xi)\varphi_{4w}^{(m)}(\zeta)$$

$$W_{II}^{(m,0)} = -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[\frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,0)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,0)} \right]$$

$$\sigma_{11n}^{(m,0)} = -\frac{A_{23}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}, \quad n = I, II, \quad m = 1, 2$$

$$\sigma_{22n}^{(m,0)} = -\frac{A_{13}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{33n}^{(m,s)} = \frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}$$

$$B_i^{(1,s)} = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad B_i^{(2,s)} = \frac{|A_{i+4}|}{|A|}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$A = \begin{pmatrix} b_{1w}^{(1)} & b_{2w}^{(1)} & b_{3w}^{(1)} & b_{4w}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1w}^{(2)} & b_{2w}^{(2)} & b_{3w}^{(2)} & b_{4w}^{(2)} \\ -b_{4w}^{(1)} & b_{3w}^{(1)} & -b_{2w}^{(1)} & b_{1w}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{4w}^{(2)} & b_{3w}^{(2)} & -b_{2w}^{(2)} & b_{1w}^{(2)} \\ 0 & c_{wu}^{(1)} & d_{wu}^{(1)} & 0 & 0 & -c_w^{(2)} & -d_w^{(2)} & 0 \\ 0 & d_w^{(1)} & -c_w^{(1)} & 0 & 0 & -d_w^{(2)} & c_w^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \sigma_{zz}^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, представление (2.5) позволило найти общее решение внутренней задачи, а после удовлетворения граничных условий (1.3) и условий контакта (1.4), получить решение сформулированной внутренней задачи. Найденное решение (2.5), (2.7)–(2.19) внутренней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Это решение экспоненциально убывает при удалении от боковой поверхности вовнутрь пластинки. Решение для пограничного слоя и его сопряжение с решением внутренней задачи осуществляется описанным в [5] способом.

Было показано [23], что в однослойной пластинке при наличии внутреннего вязкого сопротивления амплитуды вынужденных колебаний всегда ограничены, в то время как при отсутствии вязкого сопротивления существуют частоты, при которых амплитуды колебаний становятся бесконечными. Очевидным образом, подобное имеет место и при вынужденных колебаниях двухслойных пластин, т.е. имеем $\Delta = |b_{\alpha\beta}| \neq 0$, $|A| \neq 0$ при наличии вязкого сопротивления. Для иллюстрации сказанного вычислены первые несколько корней соответствующего трансцендентного уравнения. Первый слой пакета – стеклопластик ортогонально-армированный в соотношении 2:1:

$$\rho^{(1)} = 1700 \text{ кг/м}^3, \quad E_1^{(1)} = 3.68 \times 10^{10} \text{ Па}$$

$$G_{13}^{(1)} = 0.44 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad h_1 = 1 \text{ м}, \quad k_1 = 0.5$$

Второй слой – резина:

$$\rho^{(2)} = 1500 \text{ кг/м}^3, \quad E^{(2)} = 0.5 \times 10^7 \text{ Па}, \quad G^{(2)} = 0.15 \times 10^7 \text{ Па}, \quad h_2 = 0.5 \text{ м}, \quad k_2 = 0.7$$

Первые корни имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} &198.538 + 0.00023320i, \quad 397.07 + 0.00023321i, \quad 595.593 + 0.00023318i \\ &992.577 + 0.00023314i, \quad 1191.015 + 0.00023319i, \quad 1389.388 + 0.00023308i \\ &1785.723 + 0.00023341i, \quad 1983.384 + 0.00023319i, \end{aligned}$$

где i – мнимая единица. Следовательно, амплитуды колебаний конечны.

При отсутствии вязкого сопротивления условие $|b_{\alpha\beta}| = 0$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &(\rho_1 \sqrt{a_{55}^{(1)}} + \rho_2 \sqrt{a_{55}^{(2)}}) \sin(\rho_1 \Omega \sqrt{a_{55}^{(1)}} \zeta_1 + \rho_2 \Omega \sqrt{a_{55}^{(2)}} \zeta_2) + \\ &+ (\rho_1 \sqrt{a_{55}^{(1)}} - \rho_2 \sqrt{a_{55}^{(2)}}) \sin(\rho_1 \Omega \sqrt{a_{55}^{(1)}} \zeta_1 - \rho_2 \Omega \sqrt{a_{55}^{(2)}} \zeta_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

левая часть которого при определенных частотах обращается в нуль, т.е., возникает резонанс.

Заключение. Асимптотическим методом изучены вынужденные колебания двухслойных ортотропных пластин при наличии внутреннего вязкого сопротивления. Найдено общее асимптотическое решение задачи. Показано, что наличие сопротивления приводит к тому, что амплитуды колебаний всегда ограничены. При отсутствии же вязкого сопротивления существуют частоты (резонансные), при которых амплитуды становятся бесконечно большими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение // В кн.: Современ. пробл. мех. Киев: ЛиТеча ЛТД, 2017. Т. 2. С. 311–378.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочечных систем при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. 2017. № 5. С. 3–65.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1976. 512 с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн НАН РА, 2005. 468 с.
7. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин // Изв. вузов РФ. Сев.-Кавказск. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8–11.

8. *Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L.* Asymptotics of free vibrations of anisotropic plates fastened with an absolutely rigid base // *Modern Probl. Deform. Bodies Mech.* Yerevan: Gitutyun NAS RA. 2005. V. 1. P. 8–19.
9. *Агаловян М.Л., Закарян Т.В.* Асимптотическое решение первой трехмерной динамической задачи теории упругости о вынужденных колебаниях трехслойной пластинки несимметричной структуры // *Мех. композ. матер.* 2019. Т. 55. № 1. С. 3–18.
10. *Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.* К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек // *Уч. зап. Армянского госпединститута им. Х. Абовяна.* 2012. № 2 (17). С. 29–42.
11. *Kaplanov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
12. *Михасев Г.И., Товстук П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292 с.
13. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
14. *Prikazchikova L., Kaplanov J. et al.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // *Math. Mech. Solids.* 2018. <https://doi.org/10.1177/1081286518790804>
15. *Kaplanov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // *Intern. J. Solids Struct.* 2017. V. 113. P. 169–179.
16. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer // *ZAMM-J. Appl. Math. Mech. Zeitsch. Ange. Mathe. Mech.* 2015. V. 95. № 10. P. 1004–1011.
17. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore: Springer, 2018. 470 p.
18. *Boutin C.* Linear pantographic sheets. Asymptotic micro-macro models identification // *Math. Mech. Compl. Syst.* 2017. V. 5. № 2. P. 127–162.
19. *Boutin C., Soubestre J.* Generalized inner bending continua for linear fiber reinforced materials // *Int. J. Solids Struct.* 2011. V. 48. № 3–4. P. 517–534.
20. *Панков С.О.* Асимптотически точное решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 109–125.
21. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных колебаний тонкой упругой прокладки между абсолютно жесткими профилями // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 824–838.
22. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
23. *Закарян Т.В.* К решению первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления // *Изв. НАН РА. Механика.* 2012. Т. 65. № 2. С. 5–13.

Asymptotic Analysis of Forced Vibrations of Double-Layer Plates under Viscous Resistance

L. A. Aghalovyan^{a,‡}, M. L. Aghalovyan^{a,‡,‡‡}, and T. V. Zakaryan^{a,‡‡‡}

^a Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia

[‡] e-mail: lagal@sci.am

^{‡‡} e-mail: mheraghalovyan@rambler.ru

^{‡‡‡} e-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

The three-dimensional dynamic problem of forced oscillations of an orthotropic two-layer plate in the presence of internal friction in layers is solved by the asymptotic method. It is assumed that the friction is proportional to the velocity of the points. On the front surfaces of a double-layer package, stress values are given. These values vary in time harmonically. The general asymptotic solution of the internal problem is found. It is shown that friction (dissipation) leads to the fact that the amplitudes of oscillations always remain finite, while, in the absence of internal friction, there are frequencies at which the amplitude becomes infinite.

Keywords: layered plate, forced oscillations, internal friction, asymptotic solution

REFERENCES

1. *Poruchikov V.B.* Methods of Dynamic Theory of Elasticity. (Metody dinamicheskoy teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1986. 328 p. (in Russian)
2. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Problems of statics and dynamics for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution // *Modern Problems Mech.* Kiev: LiTecha LTD, 2017. no. 2, pp. 31–378. (in Russian)
3. *Lugovoi P.Z., Meysht V.F.* Dynamics of inhomogeneous shell systems under non-stationary loading // *Appl. Mech.*, 2017, no. 5, pp. 3–65. (in Russian)
4. *Gol'denveizer A.L.* Theory of Elastic Thin Shells. (Teoria Uprugikh Tonkikh Obolochek) Moscow: Fizmatlit, 1976. 512 p. (in Russian)
5. *Aghalovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore: World Sci. Publ., 2015. 376 p.
6. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S.* Nonclassical Boundary-Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells. Yerevan: Gitutyun NAS RA, 2005. 468 p.
7. *Aghalovyan L.A.* On an asymptotic method for solution of dynamic mixed boundary value problems for anisotropic strips and plates // *Proc. Inst. Russian Federation. North Cauc. Reg. Nat. Sci.*, 2000, no. 3, pp. 8–11. (in Russian)
8. *Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L.* Asymptotics of free vibrations of anisotropic plates fastened with an absolutely rigid base // *Modern Probl. Deform. Bodies Mech.* Yerevan: Gitutyun NAS RA, 2005, vol. 1, pp. 8–19.
9. *Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V.* Asymptotic solution of the first 3D dynamic elasticity theory problem on forced vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure // *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 3–18. (in Russian)
10. *Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G.* About defining solutions of a class of dynamic space problems of mathematical theory of elasticity for orthotropic shells // *Sci News. ASPV after Kh. Abovyan*, 2012, no. 2 (17), pp. 29–42. (in Russian)
11. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
12. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic Methods. (Lokalizovannye kolebania i volny v tonkikh obolochkakh. Asimptoticheskie metody) Moscow: Fizmatlit, 2009. 292 p. (in Russian).
13. *Vil'de M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu.* Boundary and Interfacial Resonant Phenomena in Elastic Bodies (Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavlenia v uprugikh telakh) Moscow: Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian)
14. *Prikazchikova L., Kaplunov J. et al.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // *Math. Mech. Solids*, 2018, DOI: 10.1177/1081286518790804.
15. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // *Intern. J. Solids Struct.* 2017, vol. 113, pp. 169–179.
16. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer // *ZAMM-J. Appl. Math. Mech. Zeitsch. Ange. Mathe. Mech.*, 2015, vol. 95, no. 10, P. 1004–1011.
17. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore: Springer, 2018. 470 p.
18. *Boutin C.* Linear pantographic sheets. Asymptotic micro-macro models identification // *Math. Mech. Compl. Syst.*, 2017, vol. 5, no. 2, pp. 127–162.
19. *Boutin C., Soubestre J.* Generalized inner bending continua for linear fiber reinforced materials // *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, no. 3–4, pp. 517–534.
20. *Papkov S.O.* Asymptotically exact solution of the problem of harmonic vibrations of an elastic parallelepiped // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6. pp. 686–699.
21. *Nazarov S.A.* Asymptotics of the natural oscillations of a thin elastic gasket between absolutely rigid profiles // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 577–586.
22. *Panovko Ya.G.* Internal Friction under Oscillations of Elastic Systems. (Vnutrennee trenie pri kolebaniakh uprugikh sistem) Moscow: Fizmatgiz, 1960, 193 p. (in Russian)
23. *Zakaryan T.V.* Solution of a first boundary value problem of elasticity theory of forced vibrations of orthotropic plates with viscous resistance // *Proc. NAS Armenia. Mech.*, 2012, vol. 65, no. 2, pp. 5–13. (in Russian)