УДК 531

О ФОРМИРОВАНИИ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

В. Ф. Журавлёв*

Институт проблем механики РАН, Москва, Россия

** e-mail: Zhurav@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 23.09.2019 г.
После доработки 28.11.2019 г.
Принята к публикации 02.12.2019 г.

Рассматриваются вопросы формирования обратных связей эффективности управления колебаниями осциллятора Ван-дер-Поля. Под эффективностью управления понимается выбор таких законов формирования обратных связей, которые обеспечивают наискорейший выход осциллятора на стационарный режим.
Изучаются два типа осциллятора – классический, с одной степенью свободы, совершающий прямолинейные колебания, и двумерный, совершающий плоские колебания [1]. Модель двумерного осциллятора Ван-дер-Поля используется обычно для изучения работы волнового твердотельного гироскопа (кварцевого полусферического резонатора).

Ключевые слова: пространственный осциллятор Ван-дер-Поля, постоянная Ляпунова, предельный цикл, волновой твердотельный гироскоп

DOI: 10.31857/S0032823520010105

1. Случай одномерного осциллятора с обратной связью по амплитуде. Будем рассматривать уравнение осциллятора в следующей размерной форме:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\omega(x_0^k - |x|^k)\dot{x}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

В отличие от обычных записей уравнения Ван-дер-Поля (см., напр. [2]) обратная связь здесь выбрана в более общем виде. Найдем такое $k \in (0, 1, \ldots)$, чтобы стационарное, асимптотически устойчивое решение уравнения (1.1) отвечало максимальному по модулю отрицательному показателю Ляпунова. Приведем уравнение (1.1) к нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 + \varepsilon\omega(x_0^k - |x|^k)y \end{aligned} \tag{1.2}$$

и сделаем замену переменных

$$(x, y) \to (r, \varphi): \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\omega\sin\varphi \tag{1.3}$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon\left(x_0^k - r^k\,|\cos\varphi|^k\right) r\sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} &= -\omega + \varepsilon\left(x_0^k - r^k\,|\cos\varphi|^k\right) r\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.4}$$

Полагая ε малым параметром, приходим к системе с одной быстрой (φ) и одной медленной (r) переменной. Выполним осреднение системы (1.4) по быстрой переменной [3]:

$$\begin{gathered}\dot{r} = \frac{\varepsilon}{2}(x_0^k - M(k)r^k)r \\ \dot{\varphi} = -\omega,\end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$M(k) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos\varphi|^k \sin^2\varphi d\varphi & k = 2n+1 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^k\varphi \sin^2\varphi d\varphi & k = 2n+2 \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1.6}$$

Вычисления по формуле (1.6) дают

k	1	2	3	4	5	6
$M(k)$	0.424	0.25	0.17	0.125	0.098	0.078

Асимптотика $M(k)$ при $k \to \infty$ может быть получена для четных k при помощи формулы (см., например, [3]):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{2}{4^n}\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2(n+1))!}{(2(n+1)!)^2}\right], \tag{1.7}$$

в которой для асимптотики $n!$ используется формула Стирлинга (см. напр. [4]):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.8}$$

В результате получаем:

$$M(k) = M(2n) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \tag{1.9}$$

Стационарное решение уравнения (1.5) имеет вид

$$r = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}}, \tag{1.10}$$

соответствующее решение уравнения (1.1) в силу (1.3) таково

$$x = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}}\cos(\omega t - \varphi_0) = A\cos(\omega t - \varphi_0), \quad A = \frac{x_0}{\sqrt[k]{M(k)}} \tag{1.11}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного решения (1.11), проварьировав в окрестности решения (1.10) уравнение для амплитуды в системе (1.5). Предварительно перепишем это уравнение, использовав связь амплитуды стационарного решения A с установочной амплитудой x_0 в виде:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon M(k)}{2}\left(A^k - r^k\right)r \tag{1.12}$$

Вариация решения стационарного решения (1.10):

$$r = A + \delta r \Rightarrow \delta\dot{r} = -\frac{1}{2}\varepsilon k M(k) A^k \delta r \tag{1.13}$$

Таким образом, характеристический показатель Ляпунова равен:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\varepsilon k M(k) A^k \tag{1.14}$$

Максимум модуля этого показателя определяется максимумом произведения $kM(k)$.

k	1	2	3	4	5	6
$kM(k)$	0.424	0.50	0.51	0.50	0.49	0.468

Видно, что этот максимум достигается при $k = 3$. При дальнейшем возрастании k функция $\tilde{\lambda}(k) = kM(k)$ монотонно убывает до нуля. Таким образом, показано, что уравнение управляемого осциллятора Ван-дер-Поля с максимальным эффектом управления по амплитуде имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\omega\left(x_0^3 - |x|^3\right)\dot{x}$$

2. Осциллятор Ван-дер-Поля с управлением по энергии колебаний. Вместо традиционной формы обратной связи в системе (1.1) рассмотрим обратную связь с управлением по энергии:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2^n \varepsilon\omega(E^n - E_0^n)\dot{x}, \tag{2.1}$$

где

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + cx^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) \tag{2.2}$$

или, в нормальной форме Коши

$$\begin{gathered} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \varepsilon\omega m\left(\left(y^2 + \omega^2 x^2\right)^n - \left(y_0^2 + \omega^2 x_0^2\right)^n\right) y \end{gathered} \tag{2.3}$$

Выполним в системе (2.3) замену переменных (1.3)

$$\begin{gathered} \dot{r} = \varepsilon m\omega^{2n+1}\left(r^{2n} - r_0^{2n}\right) r \sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} = -\omega + \varepsilon m\omega^{2n+1}\left(r^{2n} - r_0^{2n}\right)\sin\varphi\cos\varphi \end{gathered} \tag{2.4}$$

Осредняем систему (2.4) по быстрой фазе φ:

$$\dot{r} = \varepsilon m\omega^{2n}\left(r^n - r_0^n\right) r, \quad \dot{\varphi} = -\omega \tag{2.5}$$

Стационарное решение системы (2.5) имеет вид $r = r_0$, $\varphi = -\omega t + \varphi_0$, или, в исходных переменных (1.3) $x = r_0\cos(\omega t - \varphi_0)$. Для исследования устойчивости этого решения запишем уравнение в вариациях в первом уравнении системы (2.5):

$$\delta\dot{r} = n\varepsilon m\omega^{2n} r_0^n \delta r \tag{2.6}$$

Устойчивость (2.6) имеет место при $\varepsilon < 0$.

Модуль показателя Ляпунова $\lambda = n|\varepsilon| m\omega^{2n} r_0^n$ монотонно возрастает при увеличении n, что говорит о том, что управление с обратной связью по энергии колебаний является существенно более эффективным, чем управление с обратной связью по амплитуде.

3. Двумерный случай. Уравнения двумерного управляемого осциллятора Ван-дер-Поля получены в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + q_1 &= Q_1 = -d(E - 1/2)\dot{q}_1 - pKq_2 - \gamma\dot{q}_2\\ \ddot{q}_2 + q_2 &= Q_2 = -d(E - 1/2)\dot{q}_2 + pKq_1 + \gamma\dot{q}_1\\ E &= \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \quad K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2\end{aligned} \tag{3.1}$$

Осциллятор в свободном режиме ($d = p = \gamma = 0$) описывает эллиптическую траекторию в плоскости (q_1, q_2) с произвольными главными полуосями и с произвольным наклоном большой полуоси к оси абсцисс q_1. В отличие от одномерного осциллятора Ван-дер-Поля, в котором посредством специальной обратной связи поддерживается постоянной амплитуда колебаний, в двумерном случае (3.1) можно стабилизировать энергию колебаний (коэффициент обратной связи d), площадь эллипса (квадратура с коэффициентом обратной связи p), его наклон к оси абсцисс и его прецессию (коэффициент γ). Общее решение системы (3.1) при равных нулю правых частях определяет уравнение эллиптической траектории в параметрической форме:

$$q_1 = x_1 \cos t + x_3 \sin t, \quad q_2 = x_2 \cos t + x_4 \sin t \tag{3.2}$$

Скорость движения по этой траектории:

$$\dot{q}_1 = -x_1 \sin t + x_3 \cos t, \quad \dot{q}_2 = -x_2 \sin t + x_4 \cos t \tag{3.3}$$

Произвольные постоянные (x_1, x_2, x_3, x_4) в выражениях (3.2) и (3.3) в дальнейшем будут рассматриваться как медленно меняющиеся фазовые переменные, в том случае, когда правые части не равны нулю и малы в сравнении с восстанавливающей силой осциллятора. Два первых интеграла системы (3.1) в случае $Q = 0$ представляют собой энергию колебаний:

$$E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \dot{q}_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \tag{3.4}$$

и момент количества движения (кинетический момент):

$$K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3 \tag{3.5}$$

Площадь эллипса (квадратура):

$$\pi rk = \frac{1}{2}\oint (q_1 dq_2 - q_2 dq_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)dt = \pi K, \tag{3.6}$$

где r — большая полуось эллипса, а k — малая.

Используя формулы (3.2) и (3.3) в качестве замены переменных $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \to$ $\to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в уравнениях (3.1), получим, после осреднения по времени, уравнения в фазовых переменных

$$\dot{x} = -dSe_2 - pKe_3 - \gamma e_1, \tag{3.7}$$

где

$$S = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad K = x_1 x_4 - x_2 x_3 \tag{3.8}$$

4. Базис инфинитезимальных эволюций. В четырехмерном пространстве x многообразие $K = 0$ представляет собой трехмерный конус. Если $Q \neq 0$, то точка $x(t)$ в фазовом пространстве $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ движется. В конфигурационном пространстве $q = (q_1, q_2)$ этому соответствует эволюция начальной (невозмущенной) траектории, эллипса, или отрезка прямой. Будем отталкиваться от начальной траектории в виде отрезка прямой, поскольку в приложениях это чаще всего и требуется. Имеется четыре типа простейших эволюций:

а) прецессия формы — вращение отрезка прямой в плоскости $q = (q_1, q_2)$, когда существует такая вращающаяся система координат, в плоскости $q = (q_1, q_2)$, в которой этот отрезок неподвижен;

б) изменение амплитуды колебаний, когда меняется лишь длина отрезка;

в) изменение частоты колебаний $q(t)$ вдоль неподвижного отрезка;

г) наконец, разрушение формы, это такая эволюция, которая не сводится к первым трем. Всем этим типам эволюции прямолинейной формы колебаний в плоскости $q = (q_1, q_2)$, соответствуют определенные направления движения точки $x(t)$ в фазовом пространстве. Каждому из этих направлений соответствует один из четырех векторов, образующих базис инфинитезимальных эволюций, построенный в виде [1]

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} \\ e_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ e_3 &= \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\} \\ e_4 &= \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где e_1 — определяет прецессию прямолинейной формы, e_2 — вариацию амплитуды, e_3 — разрушение прямолинейной формы и e_4 — изменение частоты.

Вычислим матрицу скалярных произведений (матрица Грама):

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} (e_1 \cdot e_1) & \cdot\ \cdot & (e_1 \cdot e_4) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ (e_4 \cdot e_1) & \cdot\ \cdot & (e_4 \cdot e_4) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^2 & 0 & 0 & -2K \\ 0 & x^2 & 2K & 0 \\ 0 & 2K & x^2 & 0 \\ -2K & 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

5. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с эффективным управлением. В [1] система (3.7) изучалась в переменных (S, K) при $\gamma = 0$. Было показано, что устойчивость многообразия $S = 0$, $K = 0$ определяется отличным от нуля коэффициентом Ляпунова по переменной S, в то время как по квадратуре устойчивость имеет место с нулевым коэффициентом Ляпунова, т.е. определяется лишь нелинейными членами. Для повышения эффективности управления достаточно в (3.7) увеличить амплитуду обратной связи при малых x, для чего (3.7) следует изменить так

$$\dot{x} = -dSe_2 - p\frac{K}{E}e_3 = -dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3 \tag{5.1}$$

S, K — (3.8). Перейдем в уравнениях (5.1)—(3.8) от переменных x к переменным S, K. Имеем

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx}\dot{x} = x\left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right) \tag{5.2}$$

В силу (4.1) $x = e_2$, а в силу (4.2) $e_2 \cdot e_3 = 2K$, поэтому (5.2) переписывается в виде

$$\dot{S} = -dS(2S+1) - 4p\frac{K^2}{(2S+1)} \tag{5.3}$$

Аналогично

$$\dot{K} = \frac{dK}{dx}\dot{x} = e_3\left(-dSe_2 - p\frac{2K}{x^2}e_3\right) = -2dSK - 2pK \tag{5.4}$$

Тем самым, система (5.1) в переменных S, K принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -dS(2S+1) - 4p\frac{K^2}{2S+1} \\ \dot{K} &= 2(-dKS - pK) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Система (5.5) содержит особую точку $S = K = 0$, характеризующую стационарный режим колебаний с постоянной энергией $x^2 = 1$ и с равной нулю квадратурой $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Линеаризация системы (5.5) в окрестности этой точки приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -dS, \\ \dot{K} &= -2pK \end{aligned} \tag{5.6}$$

Таким образом, рассмотренное управление приводит к линейным в окрестности стационарного режима уравнениям в вариациях с характеристическими числами $-d$ и $-2p$. Поставленная цель достигнута.

В системе (3.1) новое управление выглядит так

$$\begin{gathered} \ddot{q}_1 + q_1 = -d(E - 1/2)\dot{q}_1 - p\frac{K}{E}q_2 \\ \ddot{q}_2 + q_2 = -d(E - 1/2)\dot{q}_2 + p\frac{K}{E}q_1 \\ E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \quad K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2 \end{gathered}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01633).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелин. динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
3. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
5. *Bryan G.H.* Diffusion with back reaction // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1891. V. 7. P. 246–248.
6. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: A new low-nose inertial rotation sensor // in: Proc. 16 Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems, November 16–18, Los Angeles, 1982. P. 432–433.
7. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1983. С. 17–24.
8. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
9. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 15–26.
10. *Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. № 5. 1995. С. 12–24.
11. *Журавлёв В.Ф.* Решение уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Доклады РАН. 2005. Т. 404. № 4. С. 491–495.
12. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л.А., 2017. 194 с.

On the Formation of Feedbacks in the Spatial Oscillator of Van der Pol

V. F. Zhuravlev#

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
 # e-mail: zhurav@ipmnet.ru

The questions of Van der Pol oscillator oscillation control efficiency are considered. By control efficiency, we mean the choice of such laws for the formation of feedbacks that ensure the oscillator reaches the stationary mode as soon as possible. Two types of oscillators are studied: the classical one, with one degree of freedom, which performs rectilinear oscillations, and the two-dimensional, which performs plane oscillations [1]. The model of a two-dimensional Van der Pol oscillator is usually used to study the operation of a hemispherical resonator gyroscope.

Keywords: Van der Pol spatial oscillator, Lyapunov constant, limit cycle, hemispherical resonator gyroscope

REFERENCES

1. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol's controlled 2D oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222. DOI:10.20537/nd1602004
2. *Andronov A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. Princeton: Univ. Press, 1949. 358 p.
3. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods in Oscillation Theory. Moscow: Nauka, 1988. 328 p. (Russian)
4. *Korn G.A., Korn Th.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover: Civil and Mechanical Engineering, 2013, 1152 p.
5. *Bryan G.H.* Diffusion with back reaction // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1891, vol. 7, pp. 246–248.
6. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: A new low-nose inertial rotation sensor // in: Proc. 16 Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems, November 16–18, Los Angeles, 1982. P. 432–433.
7. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Dynamic effects in an elastic rotating ring // Mech. Solids, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 15–21.
8. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Wave Solid-State Gyroscopes. Moscow: Nauka, 1985. 126 p. (Russian)
9. *Zhuravlev V.Ph.* Theoretical foundations of wave solid gyroscope (WSG) // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 3, pp. 3–15.
10. *Zhuravlev V.Ph., Linch D.D.* Electric model of a hemispherical resonator gyro // Mech. Solids, 1995, vol. 30, no. 5, pp. 10–21.
11. *Zhuravlev V.Ph.* On the solution of equations of the linear oscillator with respect to the matrix of the inertial trihedron // Dokl. Phys., 2005, vol. 50, no. 10, pp. 519–523.
12. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph., Zhbanov Yu.K.* Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid Gyroscope). Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russian)