
УДК 517.956,532.135,532.527

ВИХРЕВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ КАРМАНА В ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. А. М. Блохин^{1,2,*}, Р. Е. Семенко^{1,2,**}

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

²Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия

*e-mail: blokhin@math.nsc.ru

**e-mail: r.semenko@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 10.07.2019 г.

После доработки 24.12.2019 г.

Принята к публикации 09.01.2020 г.

В работе рассматриваются стационарные решения для задачи о движении конечного слоя несжимаемой полимерной жидкости над бесконечным вращающимся диском. Используется представление приближенного стационарного решения, аналогичное автомодельному решению Кармана для вязкой жидкости. Приводятся примеры численных стационарных решений для различных значений параметров задачи.

Ключевые слова: реологическая модель, вращающееся движение, автомодельное решение, стационарные решения

DOI: 10.31857/S0032823520020022

Введение. Моделирование вязкоупругих жидких полимерных сред является популярной на сегодняшний день задачей, которую пока нельзя считать решенной. Сложная структура таких жидкостей, представляющая из себя длинные перепутанные макромолекулы, обладает бесконечным числом степеней свободы и создает значительные трудности при построении уравнений модели. Уравнения для законов сохранения в таких моделях замыкаются при помощи дополнительных уравнений – реологических определяющих соотношений. В настоящее время предложено значительное количество различных подходов к построению определяющих соотношений, но ни один из них нельзя считать основным и общепринятым. Также нужно заметить, что модели полимерных сред довольно сложны, и из-за этого их математические свойства, такие, как существование, единственность и устойчивость решений, в большинстве случаев остаются открытыми.

На сегодняшний день существует широкий круг теоретических работ, посвященных изучению течений вязкоупругих жидкостей в областях различной геометрии и с различными краевыми условиями [1–5]. Показано, что течения вязкоупругих полимерных жидкостей обладают сложными свойствами, исследование которых привело к появлению ряда реологических моделей жидких полимеров. Отличительная особенность течений вязкоупругих жидкостей – подтверждаемый экспериментально эффект памяти, т.е. зависимость характеристик потока и кривой течения от истории нагружений. Эффект памяти приводит к специфическому виду неустойчивости течений [6], расслоению потока (shear-banding) [1], возникновению тангенциальных разрывов [2]. В частности, на примере прямолинейного потока в среде Олдройда показано [7],

что вопрос о неустойчивости течения связан с единственностью стационарных решений. В целом, имеющиеся на данный момент результаты оставляют актуальным исследование стационарных режимов течений и поиск точных и приближенных решений для течений различной геометрии. Понимание свойств стационарных течений необходимо как для анализа устойчивости течений, так и для исследования адекватности моделей текучих полимеров экспериментальным данным, что особенно важно при существующем разнообразии реологических уравнений состояния.

В основу данной работы положена сравнительно новая реологическая модифицированная модель Виноградова–Покровского [8], использующая мезоскопический подход для вывода определяющих соотношений. Другими словами, в данном подходе динамика несжимаемой жидкости описывается через статистическое моделирование движения одной макромолекулы в вязкоупругой анизотропной среде, свойства которой определяются несколькими феноменологическими параметрами. Таким образом, неизвестными функциями этой модели гидродинамики текучих полимеров, помимо привычных давления и трех компонент скорости, являются шесть компонент симметрического тензора анизотропии [1, 5, 8], отражающего форму макромолекул и их ориентацию в потоке. Особый интерес для этой модели, как и для других моделей жидких полимеров, представляют сдвиговые и вращающиеся течения, благодаря их применимости к вискозиметрии, позволяющей исследовать адекватность модели реальным полимерам.

Одним из типов течения, хорошо изученным в рамках теории вязкой ньютоновской жидкости, является течение над вращающимся диском. Его исследование восходит к работам Кармана [9], который предложил автомодельное представление для решения в случае слоя жидкости бесконечной высоты. В дальнейшем решение Кармана было развито и обобщено широким кругом авторов [10–12] для краевых условий разного вида. В частности изучалось движение тонкого слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью над вращающейся горизонтальной пластиной [13, 14], в том числе и для течений неньютоновских жидкостей [3, 15]. Далее рассматривается задача, сформулированная для модифицированной модели Виноградова–Покровского. В отличие от классической “кармановской” постановки, здесь, как и в некоторых предыдущих исследованиях [13, 14], рассматривается слой вязкоупругой жидкости конечной толщины. Однако, ниже рассматриваются приближенные решения для цилиндрической зоны малого радиуса, расположенной на оси вращения диска. Высота этой зоны, предполагаемая постоянной, определяется из условия на свободной поверхности. Стационарные решения, рассматриваемые в работе, выведены по аналогии с автомодельным решением Кармана. Вид решений приведен в первом разделе статьи. Второй раздел посвящен выводу системы обыкновенных дифференциальных уравнений для стационарных решений. Наконец, третий раздел содержит описание численного метода и примеры стационарных решений для различных значений параметров задачи.

1. Предварительные сведения. Система дифференциальных уравнений, описывающих течение несжимаемой полимерной жидкости в рамках обобщенной реологической модели Виноградова–Покровского [8], в цилиндрической системе координат r, φ, z имеет вид (см. также [4, 16]):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{rz}}{\partial z} + \frac{a_{rr} - a_{\varphi\varphi}}{r} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} a_{r\varphi} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial a_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} + \frac{a_{rz}}{r} \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{da_{rr}}{dt} - 2 \left(A_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{a_{r\varphi}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + a_{rz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathcal{L}_{rr} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{da_{\varphi\varphi}}{dt} + 2 \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) a_{r\varphi} - 2 \left(\frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) A_\varphi + a_{\varphi z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathcal{L}_{\varphi\varphi} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{da_{zz}}{dt} - 2 \left(a_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{\varphi z}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathcal{L}_{zz} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{da_{r\varphi}}{dt} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) A_r + \left(a_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial z} - a_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r} A_\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_{\varphi z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathcal{L}_{r\varphi} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{da_{rz}}{dt} - a_{rz} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \left(A_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{r\varphi}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{a_{\varphi z}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathcal{L}_{rz} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{da_{\varphi z}}{dt} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) a_{rz} - \left(a_{\varphi z} \frac{\partial u}{\partial r} + A_z \frac{\partial v}{\partial z} + a_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{L}_{\varphi z} = 0 \quad (1.10)$$

Здесь t – время, u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{u} в цилиндрической системе координат r, φ, z ; P – давление, $a_{rr}, \dots, a_{\varphi z}$ – компоненты симметричного тензора анизотропии,

$$\mathcal{L}_{rr} = K_I a_{rr} + \beta \|\mathbf{a}_r\|^2, \quad \mathbf{a}_r = (a_{rr}, a_{r\varphi}, a_{rz})$$

$$\mathcal{L}_{\varphi\varphi} = K_I a_{\varphi\varphi} + \beta \|\mathbf{a}_\varphi\|^2, \quad \mathbf{a}_\varphi = (a_{r\varphi}, a_{\varphi\varphi}, a_{\varphi z})$$

$$\mathcal{L}_{zz} = K_I a_{zz} + \beta \|\mathbf{a}_z\|^2, \quad \mathbf{a}_z = (a_{rz}, a_{\varphi z}, a_{zz}), \quad \mathcal{L}_{r\varphi} = K_I a_{r\varphi} + \beta(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi)$$

$$\mathcal{L}_{rz} = K_I a_{rz} + \beta(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_z), \quad \mathcal{L}_{\varphi z} = K_I a_{\varphi z} + \beta(\mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z), \quad \|\mathbf{a}_r\|^2 = (\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r), \quad \text{и т.д.}$$

$$A_r = a_{rr} + W^{-1}, \quad A_\varphi = a_{\varphi\varphi} + W^{-1}, \quad A_z = a_{zz} + W^{-1}$$

$$K_I = W^{-1} + (k - \beta)I/3, \quad I = a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz},$$

где k, β ($0 < \beta < 1$) – феноменологические параметры реологической модели (см. [8, 16]), $\text{Re} = (\rho u_H l)/\eta_0$ – число Рейнольдса, $W = (\tau_0 u_H)/l$ – число Вайсенберга, $\rho (= \text{const})$ – плотность среды, η_0, τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации, l – характерная длина, u_H – характерная скорость,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Система (1.1)–(1.10) записана в безразмерном виде: переменные $t, r, z, u, v, w, P, a_{rr}, \dots, a_{\varphi z}$ отнесены к $l/u_H, l, u_H, \rho u_H^2, W/3$ соответственно.

Ниже приводится алгоритм конструирования решения математической модели (1.1)–(1.10), описывающие течения вращающейся несжимаемой полимерной жидкости. Такие течения реализуются в тонком бесконечном по горизонтали слое полимерной жидкости, расположенном над вращающейся со скоростью

$$\Omega r \Lambda(t) \mathbf{e}_\varphi \quad (1.11)$$

бесконечной пластиной с одной стороны, и имеющем свободную поверхность с другой (см. рис. 1). В формуле (1.11) угловая скорость вращения пластины – $\Omega = \text{const}$,

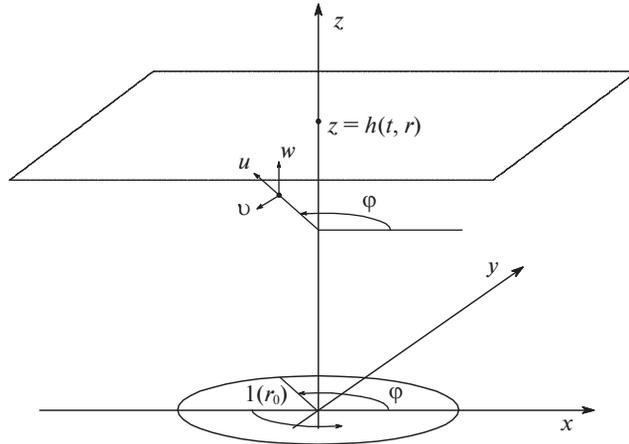


Рис. 1. Зона вращающегося движения.

$u_H = \Omega l$ – характерная скорость, e_φ – единичный вектор по азимутальной угловой координате φ (см. рис. 1). Агрегат $\Lambda(t)$ – безразмерный.

В таком случае, следуя монографии [11], а также работам [10, 13, 14], будем искать эти течения несжимаемой полимерной жидкости в “кармановском” виде, т.е. будем искать у системы (1.1)–(1.10) решения вида (см. [10, 11]):

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \varphi, z) &= rF(t, z) + o(r), & v(t, r, \varphi, z) &= rG(t, z) + o(r) \\
 w(t, r, \varphi, z) &= H(t, z) + O(r), & P(t, r, \varphi, z) &= L(t, z) + \frac{r^2}{2} K(t) + o(r^2) \\
 a_{rr}(t, r, \varphi, z) &= A_0(t, z) + \frac{r^2}{2} A(t, z) + o(r^2) \\
 a_{\varphi\varphi}(t, r, \varphi, z) &= A_0(t, z) + \frac{r^2}{2} \Phi(t, z) + o(r^2) \\
 a_{zz}(t, r, \varphi, z) &= C(t, z) + O(r), & a_{r\varphi}(t, r, \varphi, z) &= \frac{r^2}{2} \mathcal{F}(t, z) + o(r^2) \\
 a_{rz}(t, r, \varphi, z) &= rB(t, z) + o(r), & a_{\varphi z}(t, r, \varphi, z) &= rQ(t, z) + o(r)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь

$$o(r) = r^2 \{ \dots \}(t, z) + \dots, \quad O(r) = r \{ \dots \}(t, z) + \dots, \quad o(r^2) = r^3 \{ \dots \}(t, z) + \dots$$

Заметим, что у компонент a_{rr} и $a_{\varphi\varphi}$ главные члены разложения одинаковы в силу системы (1.1)–(1.10).

В реальных течениях бесконечная пластина $z = 0$ заменяется конечным диском, радиус r_0 которого выбирается в качестве обезразмеривающего масштаба длины ($l = r_0$). Поэтому, как и для вязкой несжимаемой жидкости (см. [11] и описанную там дискуссию по этому поводу), предполагается, что разложения (1.12) справедливы при малых r : $0 < r < r_* \ll 1$. В этой связи обозначения $o(r)$, $O(r)$ и т.д. вполне приемлемы.

Заметим также, что разложения (1.12) носят формальный характер до тех пор, пока не доказана сходимость соответствующих рядов.

Подставляя представление (1.12) в систему (1.1)–(1.10), собирая коэффициенты при соответствующих степенях r , получаем нестационарную систему для определения агрегатов $F, G, H, A_0, A, \Phi, C, \mathcal{F}, B, Q$ вида:

$$H_z = -2F \quad (1.13)$$

$$F_t + HF_z + F^2 - G^2 + K(t) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{3A - \Phi}{2} + B_z \right) \quad (1.14)$$

$$G_t + HG_z + 2FG = \frac{1}{\text{Re}} (2\mathcal{F} + Q_z) \quad (1.15)$$

$$H_t + HH_z + L_z = \frac{1}{\text{Re}} (2B + C_z) \quad (1.16)$$

$$(A_0)_t + H(A_0)_z - 2(A_0 + W^{-1})F + \mathcal{L}A_0 + \beta A_0^2 = 0 \quad (1.17)$$

$$A_t + HA_z - 4BF_z + \mathcal{L}A + 2\beta(A_0A + B^2) + \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0 = 0 \quad (1.18)$$

$$\Phi_t + H\Phi_z - 4QG_z + \mathcal{L}\Phi + 2\beta(A_0\Phi + Q^2) + \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0 = 0 \quad (1.19)$$

$$\mathcal{F}_t + H\mathcal{F}_z - 2(BG_z + QF_z) + \mathcal{L}\mathcal{F} + 2\beta(A_0\mathcal{F} + BQ) = 0 \quad (1.20)$$

$$B_t + HB_z + 2FB - (W^{-1} + C)F_z + \mathcal{L}B + \beta(A_0 + C)B = 0 \quad (1.21)$$

$$Q_t + HQ_z - (W^{-1} + C)G_z + \mathcal{L}Q + \beta(A_0 + C)Q = 0 \quad (1.22)$$

$$C_t + HC_z + \mathcal{L}C + \beta C^2 = 0, \quad (1.23)$$

где $\mathcal{L} = W^{-1} + (k - \beta)(2A_0 + C)/3$.

Система уравнений (1.13)–(1.23) представляет собой замкнутую подсистему уравнений из бесконечной системы соотношений, возникающей после подстановки представлений (1.12) в систему (1.1)–(1.10).

В силу условий прилипания при $z = 0$ имеем:

$$F(t, 0) = H(t, 0) = 0, \quad G(t, 0) = \Lambda(t) \quad (1.24)$$

Пусть свободная граница задается уравнением

$$z = h(t, r)$$

Следуя [17], получим для свободной границы $z = h$ условие

$$h_t + uh_r - w = 0 \quad (1.25)$$

Как и в [13, 14], будем полагать

$$h = h_* = \text{const}$$

(постоянная h_* подлежит определению). Следовательно, из (1.25) получаем

$$H(t, h_*) = 0$$

2. Стационарные решения, описывающие течения “кармановского” типа вблизи оси $r = 0$. В стационарном случае математическая модель (1.13)–(1.23) примет вид (см. также (1.24)):

$$H' = -2F, \quad H(0) = 0 \quad (2.1)$$

$$(H^2 - \delta)F' = H \left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\text{Re}} - K_0 \right) - B \frac{(2F + \tilde{\mathcal{L}})}{\text{Re}}, \quad F(0) = 0 \quad (2.2)$$

$$(H^2 - \delta)B' = (W^{-1} + C) \left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\text{Re}} - K_0 \right) - H(2F + \tilde{\mathcal{L}})B, \quad B(0) = b_0 \quad (2.3)$$

$$(H^2 - \delta)G' = 2H \left(\frac{\mathcal{F}}{\text{Re}} - FG \right) - Q \frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\text{Re}}, \quad G(0) = \Lambda_0 \quad (2.4)$$

$$(H^2 - \delta)Q' = 2(W^{-1} + C) \left(\frac{\mathcal{F}}{\text{Re}} - FG \right) - HQ\tilde{\mathcal{L}}, \quad Q(0) = q_0 \quad (2.5)$$

$$(H(W^{-1} + A_0))' = -\hat{\mathcal{L}}A_0, \quad A_0(0) = a_{00} \quad (2.6)$$

$$(H(W^{-1} + C))' = -\hat{\mathcal{L}}_0C - 2(W^{-1} + C)F, \quad C(0) = c_0 \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{H^2}{2} + L - \frac{C}{\text{Re}} \right)' = \frac{2B}{\text{Re}}, \quad L(0) = l_0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} H(H^2 - \delta)A' &= 4BH \left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\text{Re}} - K_0 \right) - 4B^2 \frac{2F + \tilde{\mathcal{L}}}{\text{Re}} - \hat{\mathcal{L}}_1 A(H^2 - \delta) - \\ &- 2\beta B^2(H^2 - \delta) - \frac{(k - \beta)}{3}(A + \Phi)A_0(H^2 - \delta), \quad A(0) = a_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} H(H^2 - \delta)\Phi' &= 8QH \left(\frac{\mathcal{F}}{\text{Re}} - FG \right) - 4Q^2 \frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\text{Re}} - \hat{\mathcal{L}}_1 \Phi(H^2 - \delta) - \\ &- 2\beta Q^2(H^2 - \delta) - \frac{k - \beta}{3}(A + \Phi)A_0(H^2 - \delta), \quad \Phi(0) = \phi_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} H(H^2 - \delta)\mathcal{F}' &= 4HB \left(\frac{\mathcal{F}}{\text{Re}} - FG \right) - 2QB \frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\text{Re}} + \\ &+ 2QH \left(G^2 - F^2 + \frac{3A - \Phi}{2\text{Re}} - K_0 \right) - 2QB \frac{2F + \tilde{\mathcal{L}}}{\text{Re}} - \\ &- \mathcal{F}(H^2 - \delta)\hat{\mathcal{L}}_1 - 2\beta BQ(H^2 - \delta), \quad \mathcal{F}(0) = f_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta &= (W^{-1} + C)/\text{Re} \\ \tilde{\mathcal{L}} &= (2k + \beta)A_0/3 + (k + 2\beta)C/3 + W^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}} &= (2k + \beta)A_0/3 + (k - \beta)C/3 + W^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}}_0 &= 2(k - \beta)A_0/3 + (k + 2\beta)C/3 + W^{-1} \\ \hat{\mathcal{L}}_1 &= W^{-1} + 2(k + 2\beta)A_0/3 + (k - \beta)C/3 \end{aligned}$$

При этом, $K(t) = \text{const} = K_0$, $\Lambda(t) = \text{const} = \Lambda_0$.

Рассматривая уравнения (2.6), (2.7), (2.9)–(2.11) при $z = 0$, получим

$$\begin{aligned} a_{00} &= 0, & c_0 &= 0, & a_0 &= 2b_0^2(2 - \beta)W \\ \phi_0 &= 2q_0^2(2 - \beta)W, & f_0 &= 2q_0b_0(2 - \beta)W \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнение (2.8) служит для определения $L(z)$ – давления на оси $r = 0$:

$$L(z) = -\frac{H^2(z)}{2} + \frac{C(z)}{\operatorname{Re}} + \frac{2}{\operatorname{Re}_0} \int B(s)ds + L_0$$

Из уравнения (2.2) следует, что $F'(z)|_{z=0} = b_0$. Тогда из (2.1) $H''(z)|_{z=0} = -2b_0$. Учитывая условия $H(0) = 0$, $H'(z)|_{z=0} = 0$, получаем, что в окрестности нуля $H(z)$ имеет знак, обратный знаку b_0 .

Можно заметить, что из (2.7) с учетом (2.1) и (2.12) следует $C(z) \equiv 0$.

Далее для простоты будем полагать, что $k = \beta$. Заметим, что численный расчет задачи (2.1)–(2.11) затруднителен из-за того, что точка $z = 0$ в силу условия $H(0) = 0$ является сингулярной для уравнений (2.6), (2.7), (2.9)–(2.11), отсутствующих в модели вихревого движения “обычной” вязкой жидкости [13]. Поэтому введем вспомогательную переменную ξ по правилу

$$\frac{dz}{d\xi} = H(H^2 - \delta)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} &= H(H^2 - \delta), & z|_{\xi=\xi'} &= 0 \\ \frac{dH}{d\xi} &= \frac{dH}{dz} \frac{dz}{d\xi} = -2FH(H^2 - \delta), & H|_{\xi=\xi'} &= 0 \\ \frac{dF}{d\xi} &= H(H^2 - \delta) \frac{dF}{dz}, & \dots, & \frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = H(H^2 - \delta) \frac{d\mathcal{F}}{dz} \\ F|_{\xi=\xi'} &= 0, & \dots, & \mathcal{F}|_{\xi=\xi'} = f_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Задача (2.13) может быть решена численно конечно-разностными схемами первого порядка. Однако очевидно, что точка $z = 0$, $H = 0$ является положением равновесия в фазовой плоскости (z, H) . Поэтому для того, чтобы найти решение задачи (2.1)–(2.11) с независимым переменным z , необходимо найти фазовую траекторию, выходящую из точки $z = 0$, $H = 0$ в сторону положительных значений z при условии, что все остальные начальные данные (2.13) в этой точке выполняются. Такая траектория будет бесконечно приближаться к начальной точке (2.13) в силу автономности системы. Поскольку при малых положительных H производная $dz/d\xi$ отрицательна, будем считать, что начальные данные выполняются в точке $\xi' = +\infty$.

3. Численный поиск стационарных решений. Определим следующие значения параметров задачи, которые назовем базовыми:

$$\operatorname{Re} = 1, \quad W = 1, \quad \beta = 0.5, \quad b_0 = -1.5, \quad q_0 = 1, \quad K_0 = 1, \quad \Lambda_0 = 1$$

Введем для системы (2.13) разностную сетку $\xi_j = \tau j$, $j \in \mathbb{Z}$, $z_j = z(\xi_j)$ и т.д. Производные неизвестных функций будем аппроксимировать по правилу

$$\frac{dz(\xi_j)}{d\xi} = \frac{z_{j+1} - z_j}{\tau} \quad \text{и т.д.}$$

Для τ будем использовать значение 10^{-4} . Положительные j соответствуют значениям z_j , лежащим левее (ближе к нулю) некоторой начальной точки $z_0 = z(\xi_0) > z_j$, а от-

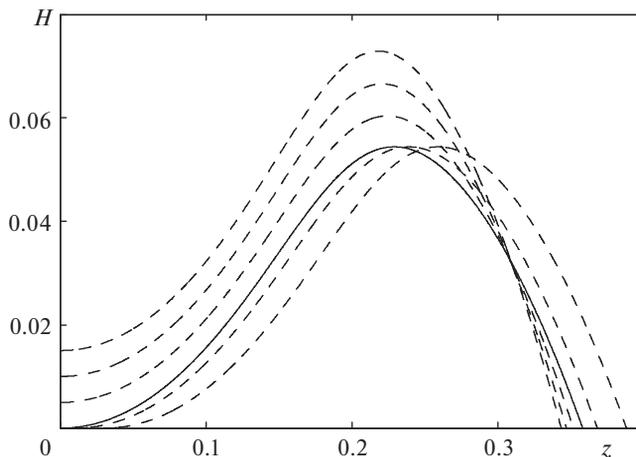


Рис. 2. Траектории решений уравнений (2.13) на плоскости (z, H) .

рицательные j – значениям $z_j > z_0$, и при $\xi = -\infty$ траектория достигает свободной поверхности $z = h_k$, при которой $H(h_k) = 0$.

Рис. 2 показывает пример нескольких фазовых траекторий, спроектированных на плоскость (z, H) , проходящих рядом с началом координат этой плоскости. Из них наиболее близкой к искомому решению является траектория, обозначенная сплошной линией – она выпущена вправо по z из точки $x_m = (0, 10^{-5}, 0, b_0, \Lambda_0, q_0, 0, a_0, \phi_0, f_0)$. В силу непрерывности правых частей уравнений, можно утверждать, что среди подобных траекторий будет стремящаяся к точке, соответствующей начальным данным задачи (2.13). Для того, чтобы ее найти, из некоторой стартовой точки $x^0 = (z^0, H^0, F^0, B^0, G^0, Q^0, A_0^0, A^0, \Phi^0, \mathcal{F}^0)$ выпустим численную траекторию в сторону $\xi \rightarrow +\infty$ до тех пор, пока либо z , либо H не приблизятся к нулю. Расчет останавливается при выполнении одного из условий: $z = z_J < 10^{-7}$, либо $H = H_J < 10^{-7}$, соответственно, координаты точки фазового пространства обозначим индексом J . Введем функцию ошибки

$$T(x^0) = z_J^2 + H_J^2 + F_J^2 + (B_J - b_0)^2 + (G_J - \Lambda_0)^2 + (Q_J - q_0)^2 + A_{0J}^2 + (A_J - a_0)^2 + (\Phi_J - \phi_0)^2 + (\mathcal{F}_J - f_0)^2,$$

характеризующую отклонение полученной траектории от требуемых начальных данных. Поиск искомой траектории ведется при помощи минимизации функции T . Правда, пока значения функции T корректно определены только для таких значений аргумента x^0 , у которых первые две координаты положительны ($z^0 > 0, H^0 > 0$). Для того, чтобы итерации численного метода корректно работали, необходимо доопределить функцию T в областях $z^0 < 0$ и $H^0 < 0$ так, чтобы минимум такой функции совпадал с минимумом исходной. Для этого воспользуемся введенной ранее траекторией, выпущенной из точки x_m . Поскольку такая траектория близка к искомой, используем масштаб ее изменчивости для доопределения T . Обозначим за z_m значение $z > 0$, при котором траектория, выпущенная вправо по z из точки $x_m = (0, 10^{-5}, 0, b_0, \Lambda_0, q_0, 0, a_0, \phi_0, f_0)$ пересекает гиперплоскость $H = 0$. За H_m примем максимальное значение H на

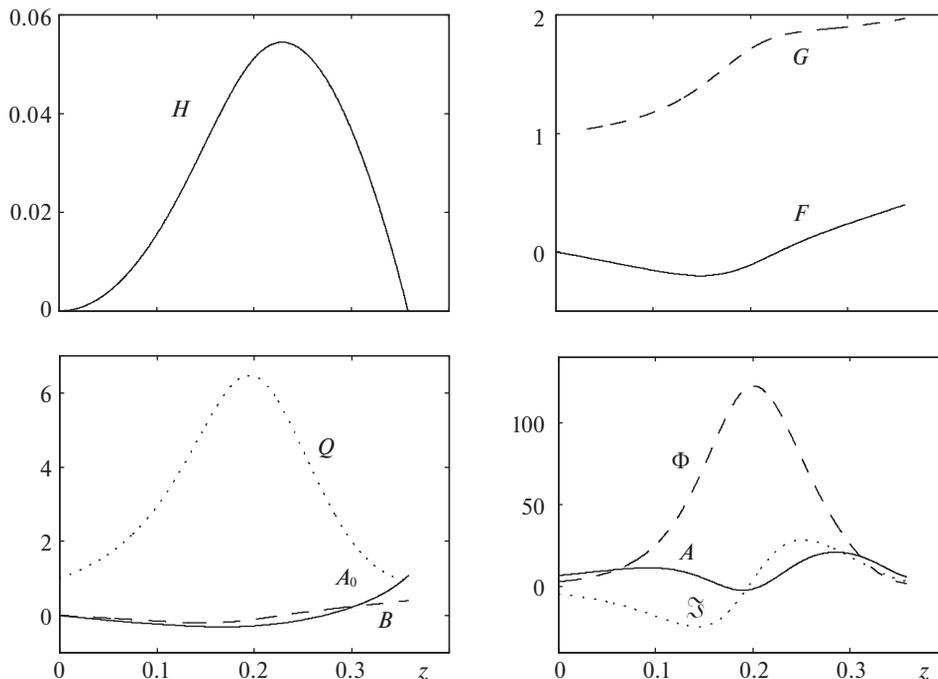


Рис. 3. Решение для базовых значений параметров.

траектории, выходящей из x_m . Так, для траектории, обозначенной сплошной линией на рис. 2, имеем $z_m = 0.358$ и $H_m = 0.054$. Тогда доопределим

$$T(x^0) = \begin{cases} z_m - z^0, & z^0 < 0, \quad H^0 > 0 \\ H_m - H^0, & H^0 < 0 \end{cases}$$

Минимум функции T будем искать симплекс-методом Нелдера–Мида при помощи функции `fminsearch` пакета программ MATLAB. За начальную точку метода возьмем точку x_m . Точку x^0 , отвечающую минимуму функции T , будем считать точкой, лежащей на искомой траектории – решение (2.13). Выпустим из этой точки траекторию в обе стороны ($\xi \rightarrow \pm\infty$) до тех пор, пока с обеих сторон траектория не приблизится к значениям $H = 0$. Левая точка будет соответствовать значению $z = 0$, а правая – значению $h_* = z(\xi_*)$.

На рис. 3 приведены графики решений задачи (2.13) для базовых значений параметров, найденных описанным выше методом. Отметим, что главные коэффициенты разложения тензора анизотропии (A_0 , B , Q) заметно меньше побочных членов (A , Φ , \mathcal{F}), что еще раз подтверждает сделанное ранее замечание о том, что такое представление решения имеет смысл только в малой окрестности оси вращения $r = 0$. Также заметим, что по высоте область течения делится на две характерные подобласти – вблизи диска жидкость течет навстречу оси вращения ($F < 0$, циклонический режим), а в верхней части, напротив, течет от центра вращения ($F > 0$, антициклонический режим).

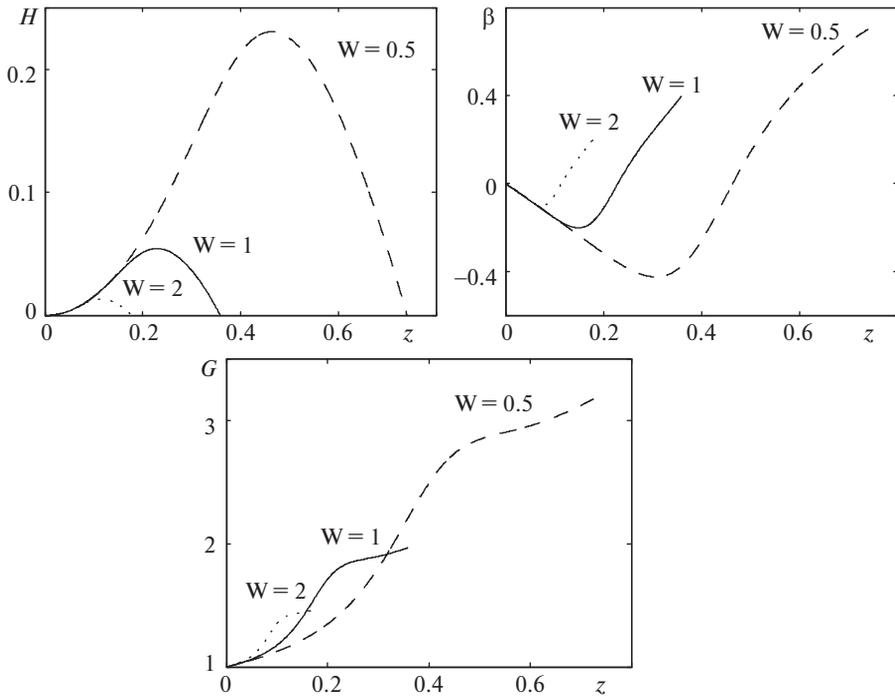


Рис. 4. Скорость жидкости при различных значениях W .

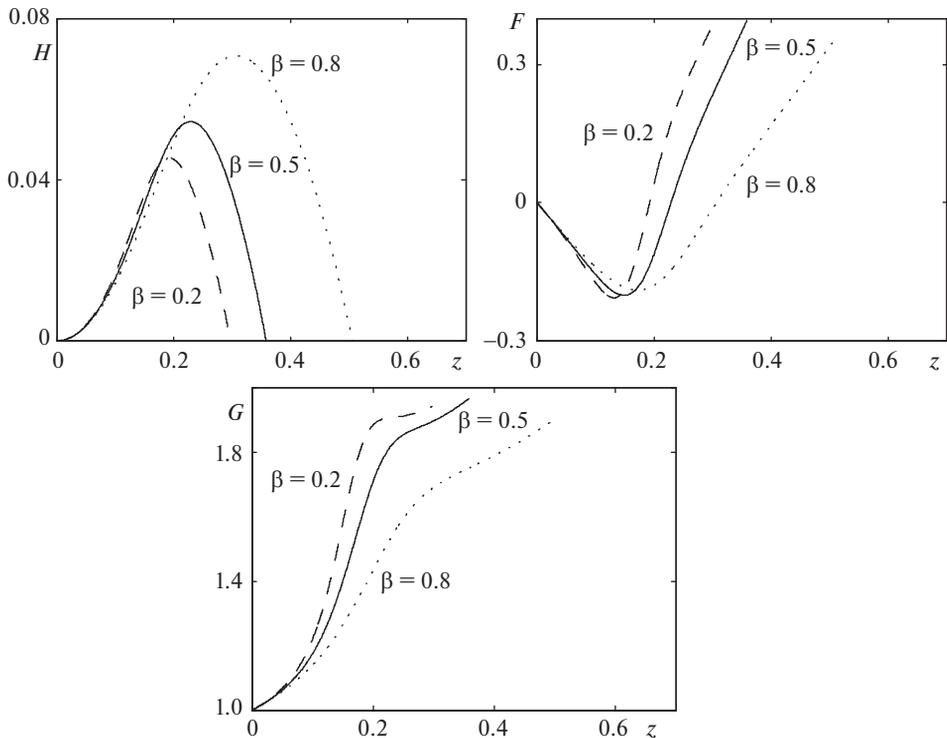


Рис. 5. Скорость жидкости при различных значениях β .

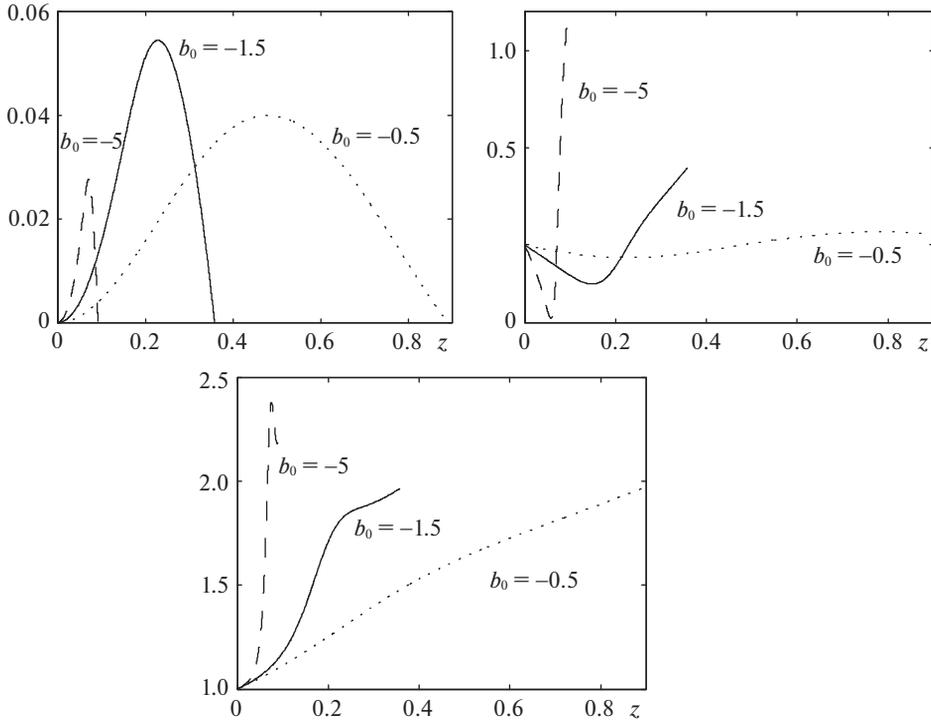


Рис. 6. Скорость жидкости при различных значениях b_0 .

Рассмотрим влияние параметров задачи на профили скорости жидкости. Рис. 4 показывает различие в скорости при разных значениях числа Вайсенберга W . Видно, что большие значения W соответствуют меньшим значениям скорости и меньшей высоте вихревой зоны, но в остальном характер течения существенно не меняется. Изменение феноменологического параметра β , характеризующего размер макромолекул полимера, приводит к изменению вертикальной скорости жидкости и высоты зоны течения, но практически не влияет на радиальную и угловую компоненты скорости, см. рис. 5. Более сложным представляется влияние начальных данных компонента тензора анизотропии b_0 и q_0 . Так рис. 6 показывает, что b_0 оказывает немонотонный эффект на величину скорости, а также демонстрирует несколько необычный эффект: уменьшение величины b_0 в некотором диапазоне одновременно ведет к меньшим вертикальным скоростям и к более высоким вихрям. Увеличение же b_0 приводит к более сложному поведению угловой скорости, которая, в отличие от прошлых случаев, немонотонна с ростом высоты. Малые величины начального данного q_0 (рис. 7) приводят в частности к изменению знака угловой скорости с ростом z , то есть с ростом высоты жидкость может начать закручиваться в сторону, противоположную вращению диска. Также в этом случае наблюдается сильное увеличение амплитуды угловой скорости, а также заметная асимметрии профиля вертикальной скорости H . Прочие параметры оказывают сравнительно небольшое влияние на общий характер течения жидкости, и поэтому их исследование в статье не приводится.

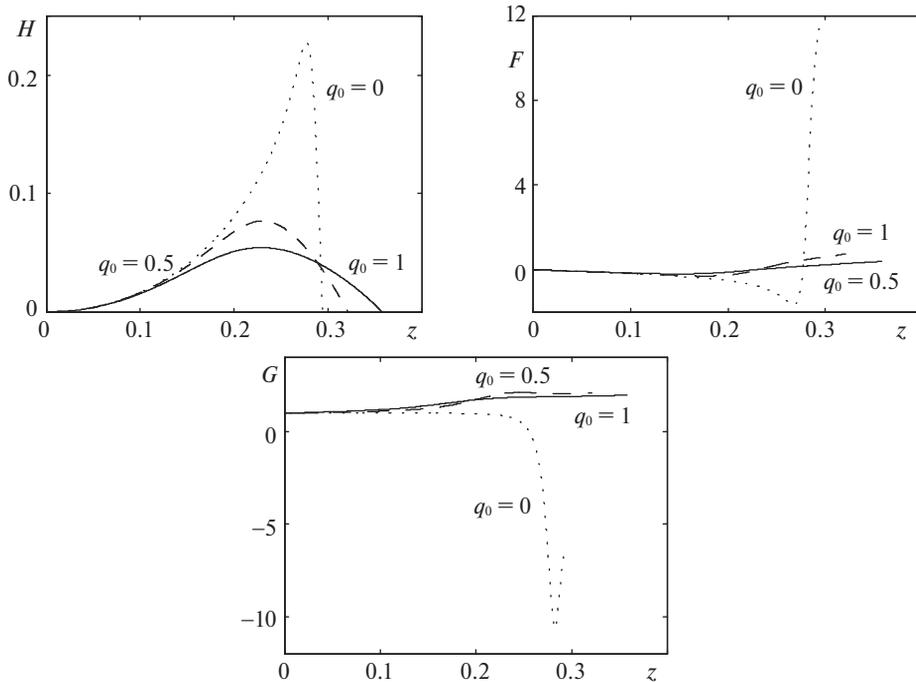


Рис. 7. Скорость жидкости при различных значениях q_0 .

Заключение. В работе исследовано вращательное движение слоя полимерной жидкости конечной толщины над бесконечным вращающимся диском для модифицированной реологической модели Виноградова–Покровского. Предложен вид приближенного осесимметричного решения такой задачи для малой окрестности оси вращения диска, полученного по аналогии с автомодельным решением Кармана для вязкой жидкости. Для поиска стационарных решений нами был приведен численный алгоритм, позволяющий проинтегрировать уравнения задачи в особой точке на поверхности диска. Полученные численные примеры стационарных решений для ряда значений параметров задачи показали, что различные значения параметров могут сильно влиять на характер течения, размеры вихря, направление вращения жидкости. В отличие от предыдущих исследований, например, [13, 14], были обнаружены решения только с положительным вертикальным потоком ($H > 0$), гладких решений с нисходящим потоком найдено не было. Несмотря на отсутствие общих утверждений о единственности решений решаемых задач, численными методами обнаружить множественность решений не удалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И. Расслоение потока жидкости с немонотонной зависимостью напряжения течения от скорости деформации // Выч. мех. сплошн. сред. 2018. Т. 11. № 1. С. 68–78.
2. Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A. Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Mot. 2011. V. 48. № 8. P. 727–737.
3. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Об эффекте уменьшения сопротивления в микрополярной жидкости // ИФЖ. 1989. Т. 57. С. 213–219.

4. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Vortex motion of an incompressible polymer liquid in the cylindrical near-axial zone // *Fluid Dyn.* 2018. V. 53. № 2. P. 177–188.
5. *Кузнецов А.Е., Пышнограй Г.В., Черпакова Н.А.* Влияние числа Вайсенберга на структуру течений полимерных расплавов в каналах с внезапным сужением // *Фунд. пробл. совр. материал.* 2017. Т. 14. № 3. С. 332–336.
6. *Molenaar J., Koopmans R.J.* Modeling polymer melt-flow instabilities // *J. Rheol.* 1994. V. 38. № 1. С. 99–109.
7. *Брутян М.А., Куликовский А.Г.* Неустойчивость и неединственность квазистационарных течений вязкоупругой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 6. С. 29–39.
8. *Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012. 122 с.
9. *von Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM.* 1921. V. 1. № 4. P. 233–252.
10. *Stewartson K.* On rotating laminar boundary layers // *Freiburg Symp. Boundary Layer Res.* 1957. P. 59–71.
11. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Ленинград: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
12. *Rogers M.H., Lance G.N.* The boundary layer on a disc of finite radius in a rotating fluid // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1964. V. 17. P. 318–330.
13. *Кострыкин С.В., Хапаев А.А., Якушкин И.Г.* Вихревые структуры в квазидвумерных течениях вязкой вращающейся жидкости // *ЖЭТФ.* 2011. Т. 139. № 2. С. 395–407.
14. *Кострыкин С.В.* Режимы стационарных течений в задаче об интенсивной вихревой циркуляции в тонком слое вязкой вращающейся жидкости // *ЖЭТФ.* 2018. Т. 154. № 1. С. 193–205.
15. *Георгиевский Д.В., Окулова Н.Н.* О вязкопластическом течении Кармана // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2002. № 5. С. 45–49.
16. *Блохин А.М., Бамбаева Н.В.* Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // *ЖВММФ.* 2014. Т. 54. № 5. С. 55–69.
17. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Stationary electrohydrodynamic flows of incompressible polymeric media with strong discontinuity // *J. Math. Sci.* 2018. V. 231. № 2. P. 143–152.

Stationary Karman Vortex Structures in the Rotating Motion of the Incompressible Polymeric Liquid

A. M. Blokhin^{a,b,#} and R. E. Semenko^{a,b,##}

^a *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

^b *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

[#] *e-mail: blokhin@math.nsc.ru*

^{##} *e-mail: r.semenko@g.nsu.ru*

The paper is dedicated to the study of the steady-state solutions for the problem of vortex motion of incompressible polymeric liquid above the infinite rotating disc. We are looking for the type of the solutions close to the self-similar Karman solution for the viscous liquid. It is obtained the examples of the numerical solutions for different values of the problem parameters.

Keywords: rheological model, rotating motion, self-similar solution, steady-state solutions

REFERENCES

1. *Kuznetsova Y.L., Skul'skiy O.I.* Shear banding of the fluid with a nonmonotonic dependence of flow stress upon strain rate // *Comput. Contin. Mech.*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 68–78. (in Russian)
2. *Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A.* Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // *Wave Mot.*, 2011, vol. 48, no. 8, pp. 727–737.
3. *Brutyayn M.A., Krapivskii P.L.* On the effect of the reduction of the resistance in the micropolar fluid // *J. Phys. Eng.*, 1989, vol. 57, pp. 213–219. (in Russian)

4. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Vortex motion of an incompressible polymer liquid in the cylindrical near-axial zone // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 177–188.
5. *Kuznetsov A.E., Pyshnograi G.V., Cherpakova N.A.* The influence of the Weissenberg number on the structure of the polymer melts in the channels with instantaneous narrowing // *Fundam. Probl. Modern Math. Sci.*, 2017, vol. 14, no. 3, pp. 332–336. (in Russian)
6. *Molenaar J., Koopmans R.J.* Modeling polymer melt-flow instabilities // *J. Rheol.*, 1994, vol. 38, no. 1, pp. 99–109.
7. *Brutyan M.A., Kulikovskii A.G.* Instability and nonuniqueness of quasisteady flows of a viscoelastic liquid // *Fluid Dyn.*, 1997, vol. 31, no. 6, pp. 819–827.
8. *Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograi G.V.* Introduction into the Mesoscopic Theory of Liquid Polymeric Systems. Barnaul: AltGPA, 2012. 122 p. (in Russian)
9. *von Karman T.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–252.
10. *Stewartson K.* On rotating laminar boundary layers // *Freiburg Symp. Boundary Layer Res.*, 1957, pp. 59–71.
11. *Greenspan H.* The Theory of Rotating Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1968. 352 p.
12. *Rogers M.H., Lance G.N.* The boundary layer on a disc of finite radius in a rotating fluid // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1964, vol. 17, pp. 318–330.
13. *Kostyrykin S.V., Khapaev A.A., Yakushkin I.G.* Vortex patterns in quasi-two-dimensional flows of a viscous rotating fluid // *J. Exp. Theor. Phys.*, 2011, vol. 112, no. 2, pp. 344–354.
14. *Kostyrykin S.V.* Steady flow regimes in the problem of intense wind-driven circulation in a thin layer of viscous rotating fluid // *J. Exp. Theor. Phys.*, 2018, vol. 127, no. 1, pp. 167–177.
15. *Georgievskii D.V., Okulova N.N.* On the viscoplastic Karman flow // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2002, no. 5, pp. 45–49.
16. *Bambaeva N.V., Blokhin A.M.* Stationary solutions of equations of incompressible viscoelastic polymer liquid // *Comp. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 5, pp. 874–899.
17. *Blokhin A.M., Semenko R.E.* Stationary electrohydrodynamic flows of incompressible polymeric media with strong discontinuity // *J. Math. Sci.* 2018, vol. 231, no. 2, pp. 143–152.