

УДК 539.3

**АДГЕЗИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ  
С РЕГУЛЯРНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ РЕЛЬЕФОМ**

© 2020 г. Ю. Ю. Маховская\*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия**\*e-mail: makhovskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.

После доработки 23.12.2019 г.

Принята к публикации 26.12.2019 г.

Рассмотрено адгезионное взаимодействие осесимметричного индентора с упругим полупространством с учетом поверхностного микрорельефа в виде регулярно расположенных одинаковых выступов, покрывающих индентор. Контакт на микроуровне между системой выступов и упругим полупространством считается дискретным. Решение задачи на макроуровне строится с помощью зависимости эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора, полученной в результате решения задачи на микроуровне. Построенное решение позволяет моделировать влияние параметров микрогеометрии и адгезии на контактное взаимодействие упругих тел на макроуровне.

*Ключевые слова:* адгезия, дискретный контакт, регулярный рельеф

**DOI:** 10.31857/S0032823520020058

**1. Введение.** Теоретические основы механики контактного взаимодействия упругих тел с учетом сил адгезионного притяжения, действующих вне области контакта, были заложены в работах Б.В. Дерягина и его соавторов [1–3]. Силы адгезионного притяжения определяются не только свойствами взаимодействующих поверхностей, но и величиной зазора между ними, поэтому поверхностная микрогеометрия оказывает большое влияние на характер прилипания. Искусственное нанесение поверхностного микрорельефа позволяет изменять эффективные адгезионные свойства поверхности, причем как в сторону увеличения, так и уменьшения адгезии [4–6].

Модель адгезионного взаимодействия упругих тел с поверхностью, обладающей случайной шероховатостью, была предложена в работе К. Фуллера и Д. Тейбора [7]. Для случая поверхностей с регулярным рельефом рассмотрены и решены периодические контактные задачи без учета адгезии [8, 9], а также с учетом сил адгезии в плоской [10–13] и пространственной [14, 15] постановках.

Для моделирования влияния микрорельефа на характеристики контакта на макроуровне необходимо рассматривать задачи с более сложной конфигурацией контакта, например, о контакте индентора и полупространства с нанесенным на одну из поверхностей микрорельефом. В случае небольшой волнистости, когда область контакта остается односвязной, решение такой задачи было получено аналитически [16] и установлено, что нанесение рельефа увеличивает эффективные адгезионные свойства поверхности, а также изменяет величину адгезионного гистерезиса [17]. В случае, когда контакт является дискретным, постановка задачи значительно усложняется, и решение можно получить численно, например, методом граничных элементов [18]. Следу-

ет отдельно отметить возможность анализа такой конфигурации контакта на основе самосогласованного подхода по Б.В. Дерягину, который не предполагает наличия области контакта в классическом смысле. Согласно этому подходу, между поверхностями всегда имеется ненулевое расстояние (зазор), и величина межмолекулярных сил, которые могут быть как притягивающими, так и отталкивающими, зависит от величины этого зазора [19, 20].

Другой подход к рассмотрению таких задач предполагает решение в два этапа: задача решается на микроуровне для получения эффективных характеристик микрорельефа, которые затем используются для решения задачи на макроуровне. К таким подходам относится предложенный И.Г. Горячевой метод, основанный на использовании функции дополнительного смещения, которая описывает эффективное влияние поверхностного рельефа [8, 9]. Аналогичный метод, основанный на расчете эффективной податливости шероховатого слоя, был применен для расчета адгезионного контакта шероховатых осесимметричных тел Б.А. Галановым [21]. В более простой версии этого подхода используется величина эффективной удельной энергии адгезии, которая рассчитывается исходя из поверхностной геометрии и адгезии на микроуровне, а затем используется в решении задачи на макроуровне. На основе данного подхода в [22] были проведены расчеты и объяснены экспериментальные результаты работы [5]. Этот подход позволяет применять и комбинировать известные методы расчета адгезионного контакта на микро- и макроуровнях. Особенностью его, однако, является то, что в нем определяется один параметр адгезии – эффективная удельная энергия адгезии, поэтому на макроуровне возможно применение только упрощенных моделей адгезии.

В настоящей работе при решении задачи о взаимодействии индентора, обладающего регулярным поверхностным рельефом, с упругим полупространством используется определенная на микроуровне зависимость эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора между поверхностями. Работа этой силы при разведении поверхностей представляет собой эффективную удельную энергию адгезии. Таким образом, данный подход можно считать обобщением метода Б.А. Галанова, использующего эффективную удельную энергию адгезии. Отличительной чертой представленного в данной работе подхода является также учет взаимного влияния между поверхностными выступами, образующими микрорельеф.

Работа построена следующим образом. Сначала рассматривается контактная задача на микроуровне о взаимодействии упругого полупространства с жесткой плоской поверхностью, покрытой системой регулярно расположенных выступов (рис. 1а), при наличии адгезии, вызванной межмолекулярным притяжением поверхностей. Из решения этой задачи определяется зависимость эффективной удельной силы адгезии от величины номинального зазора между поверхностями. Затем рассматривается контактная задача на макроуровне – о взаимодействии гладкого индентора с упругим полупространством (рис. 1б) при наличии адгезионного притяжения вне области контакта, задаваемого зависимостью удельной силы адгезии от величины зазора. Предполагается, что размер областей контакта и расстояние между выступами на микроуровне значительно меньше размера области контакта на макроуровне,  $a_0 \ll a_1$ ,  $l \ll a_1$  (рис. 1).

**2. Контактная задача на микроуровне.** Рассматривается контакт жесткой поверхности, на которой расположены одинаковые осесимметричные выступы, с гладкой поверхностью упругого полупространства. Выступы расположены в узлах гексагональной решетки с шагом  $l$ . В локальной цилиндрической системе координат, связанной с вершиной выступа, его форма описывается степенной функцией  $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$ , где  $R_0$  – размер выступа,  $n \geq 1$  – целое число (рис. 1а). На жесткую поверхность, покрытую выступами, действует номинальное давление  $p_0$ . Для описания адгезионного при-

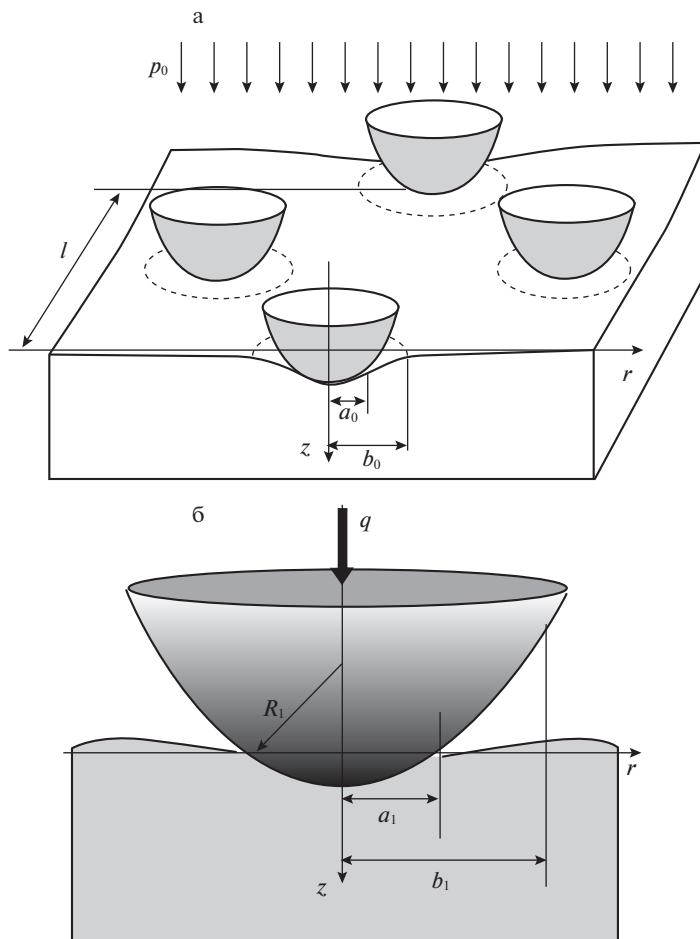


Рис. 1

тяжения поверхностей используется кусочно-постоянная аппроксимация зависимости удельной силы адгезии  $p_{\text{adh}}$  от величины зазора между поверхностями  $h_0$ , известная как модель Можи–Дагдейла [23]:

$$p_{\text{adh}}(h_0) = \begin{cases} -p_a, & 0 < h_0 \leq h_a \\ 0, & h_0 > h_a \end{cases} \quad (2.1)$$

Контакт на микроуровне считается дискретным, т.е. происходит по круговым областям радиуса  $a_0$ , а в кольцеобразных областях с внешним радиусом  $b_0$  действует удельная сила адгезии  $p_a$ , которая считается заданной величиной. Кроме того, задается радиус действия адгезионной силы  $h_a$  – максимальный зазор между поверхностями, при котором они испытывают взаимное притяжение.

Для решения задачи используется метод локализации [8, 9]. Согласно этому методу, для определения напряженно-деформированного состояния вблизи отдельного пятна контакта учитываются реальные условия контактирования только на этом пятне кон-

такта, а влияние остальных пятен заменяется действием номинального давления  $p_0$ , действующего в области  $r \geq R_{\text{eff}}$ . Величина  $R_{\text{eff}}$  определяется из условия равенства среднего давления внутри круга радиуса  $R_{\text{eff}}$  и вне его. Для гексагональной решетки эта величина равна [8, 9]

$$R_{\text{eff}} = 3^{1/4} l / \sqrt{2\pi} \quad (2.2)$$

Таким образом, задача о нагружении упругого полупространства имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(r) &= -f_0(r) - d_0 & r \leq a_0 \\ p(r) &= -p_a & a_0 \leq r \leq b_0 \\ p(r) &= 0 & b_0 \leq r \leq R_{\text{eff}} \\ p(r) &= p_0 & r > R_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $p(r)$  и  $u(r)$  – соответственно, давление и перемещение в направлении оси  $z$  на границе  $z = 0$  упругого полупространства,  $(r, z, \varphi)$  – цилиндрическая система координат, связанная с выбранным выступом (рис. 1а),  $d_0$  – расстояние между выступом и невозмущенной границей полупространства.

Помимо условий (2.3), выполняется условие, следующее из принятой модели адгезии (2.1):

$$h_0(b_0) = h_a \quad (2.4)$$

Зависимость величины зазора  $h_0$  между контактирующими поверхностями от координаты  $r$  в окрестности выступа можно представить в виде

$$h_0(r) = f_0(r) - f_0(a_0) + u(r) - u(a_0) \quad (2.5)$$

Кроме того, выполняется условие равновесия для номинального давления

$$p_0 = \frac{2}{R_{\text{eff}}^2} \int_0^{R_{\text{eff}}} r p(r) dr \quad (2.6)$$

Решение осесимметричной контактной задачи с условиями (2.3)–(2.6) было получено в работах [14, 15], в частности, в случае непосредственного контакта поверхностей зависимость номинального давления от расстояния между поверхностями определяется соотношениями

$$p_0 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{4nE^*a_0^{2n+1}}{R_0^{2n-1}} - 2p_a b^2 \left( \arccos(a_0/b_0) + a_0 \sqrt{1 - (a_0/b_0)^2} / b_0 \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{R_{\text{eff}}^2 \arccos(a_0/R_{\text{eff}}) + a_0 R_{\text{eff}} \sqrt{1 - (a_0/R_{\text{eff}})^2}}{R_{\text{eff}}^2 \arccos(a_0/R_{\text{eff}}) + a_0 R_{\text{eff}} \sqrt{1 - (a_0/R_{\text{eff}})^2}}$$

$$d_0 = - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{a_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + \frac{2}{E^*} \left( p_a b_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2} + p_0 R_{\text{eff}} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{R_{\text{eff}}}\right)^2} \right) \quad (2.8)$$

и уравнением, связывающим радиус области контакта  $a_0$  с внешним радиусом области адгезионного взаимодействия  $b_0$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{b_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + d_0 \right] \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a_0}{b_0} + \frac{2R_0}{\pi} \left( \frac{b_0}{R_0} \right)^{2n} \sqrt{\left( \frac{b_0}{a_0} \right)^2 - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left( \frac{a_0}{b_0} \right)^{2k} - \\ & - \frac{4p_a}{\pi E^*} (b_0 - a_0) - \frac{4p_0 R_{\text{eff}}}{\pi E^*} \left[ \mathbf{E} \left( \frac{b_0}{R_{\text{eff}}} \right) - \mathbf{E} \left( \arcsin \frac{a_0}{b_0}, \frac{b_0}{R_{\text{eff}}} \right) \right] - h_a = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

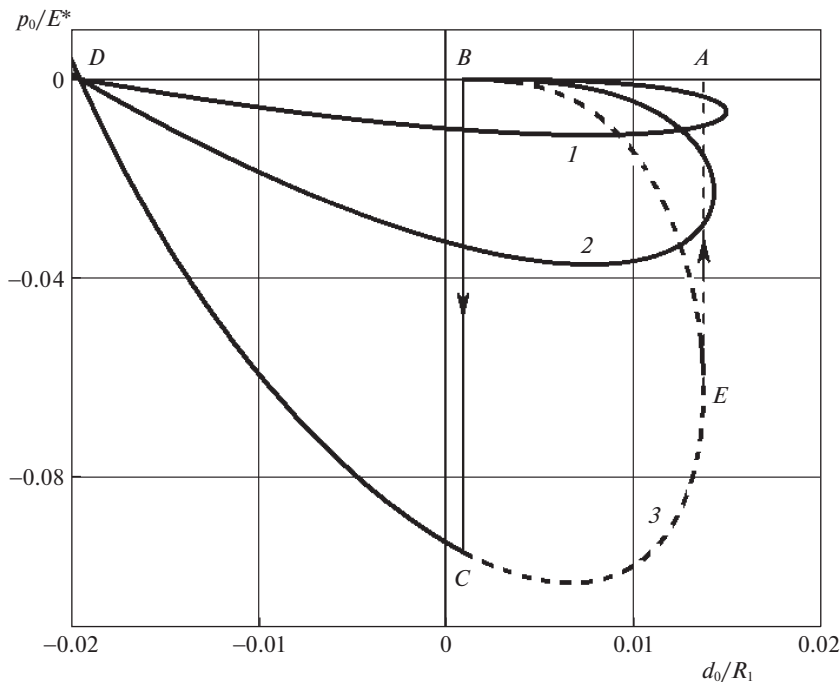


Рис. 2

где  $\mathbf{E}(x)$ ,  $\mathbf{E}(\theta, x)$  — соответственно, полный и неполный эллиптические интегралы второго рода;  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ;  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства, соответственно. При заданной величине  $b_0$  уравнение (2.9) решается численно относительно  $a_0$ , что при подстановке в соотношения (2.7), (2.8) дает параметрическую зависимость  $p_0(d_0)$ . При отсутствии непосредственного контакта поверхностей решение задачи существенно упрощается:

$$p_0 = -p_a \left( \frac{b_0}{R_{\text{eff}}} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$d_0 = -\frac{b_0^{2n}}{R_0^{2n-1}} + \frac{4p_a b_0}{\pi E^*} \left[ 1 - \frac{b_0}{R_{\text{eff}}} \mathbf{E} \left( \frac{b_0}{R_{\text{eff}}} \right) \right] + h_a \quad (2.11)$$

На рис. 2 приведены зависимости безразмерного номинального давления  $p_0/E^*$ , от безразмерного расстояния между поверхностями  $d_0/R_1$ , рассчитанные по соотношениям (2.7)–(2.11), при  $p_0/E^* = 10$ ,  $h_0/R_1 = 10^{-3}$ ,  $R_0/R_1 = 10^{-2}$ . Форма выступов, определяемая функцией  $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$ , считалась параболической, т.е. принималось значение  $n = 1$ . Здесь и далее для параметризации величин, имеющих размерность длины, использована величина  $R_1$  — радиус закругления индентора на макроуровне (рис. 1б). Графики представлены в области отрицательного давления, поскольку именно эта область значений номинального давления будет использоваться при решении задачи на макроуровне. Кривые 1, 2 и 3 на рис. 2 получены при различных значениях

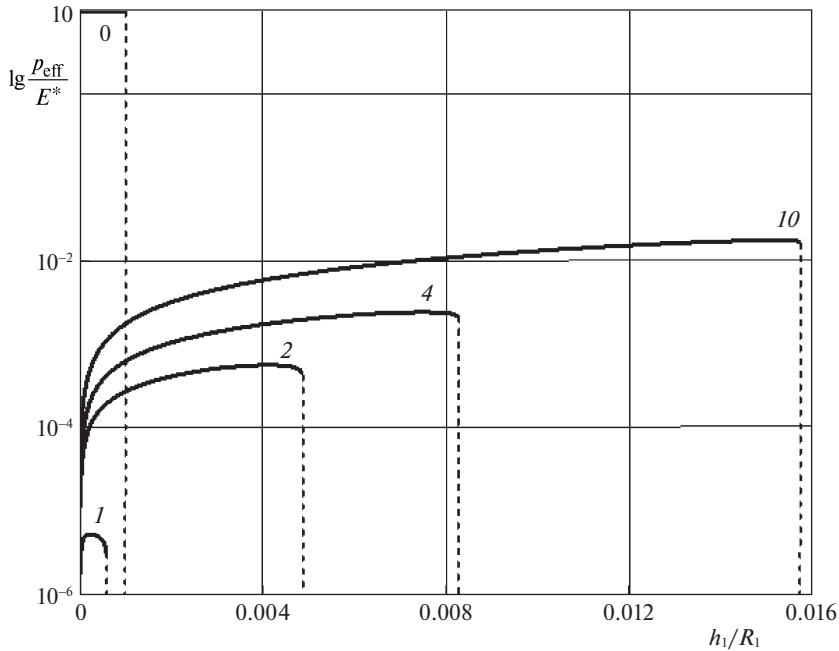


Рис. 3

безразмерного расстояния  $L = 3^{1/4}l/(2\pi)^{1/2}R_1$  между выступами:  $L = 0.028, 0.05$  и  $0.1$ , соответственно. При более плотно расположенных выступах более высокое отрицательное давление может быть приложено к поверхностям без разрушения контакта. Представленные кривые имеют неоднозначный характер, что характерно для адгезионного взаимодействия упругих тел [24–26], и описывают адгезионный гистерезис: работа, производимая силами адгезии при сближении поверхностей от бесконечности до равновесного расстояния (по пути *ABCD*) меньше работы, которую нужно затратить для разделения этих же поверхностей (по пути *DCEA*).

Вводится величина номинального зазора между поверхностями согласно соотношению  $h_1 = d_0 - d_0^*$ , где  $d_0^*$  – равновесное расстояние, при котором номинальное давление  $p_0$  равно нулю. Полагая  $p_0 = 0$  в соотношениях (2.7) – (2.9), получим три уравнения для определения равновесного расстояния  $d_0^*$  и соответствующих ему величин  $a_0^*$  и  $b_0^*$ . Эффективная удельная сила адгезии определяется как взятое с обратным знаком номинальное давление,  $p_{\text{эф}} = -p_0$  при  $h_1 \geq 0$ . Таким образом, из зависимости  $p_0(d_0)$ , заданной соотношениями (2.7)–(2.11), можно определить зависимость эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора,  $p_{\text{эф}} = p_{\text{эф}}(h_1)$ . Заметим, что вследствие адгезионного гистерезиса (рис. 2) эта зависимость будет различной при подводе поверхностей друг к другу и при их разведении.

На рис. 3 показаны графики зависимости величины безразмерного эффективного адгезионного давления  $p_{\text{эф}}/E^*$  (представленной в логарифмическом виде) от номинального зазора  $h_1/R_1$  при разведении поверхностей, рассчитанные для выступов различной формы. Число рядом с каждой кривой соответствует показателю степени  $n$  в

функции, описывающей форму выступов  $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$ . Кривая 0 соответствует взаимодействию гладких тел без выступов. Использованы те же значения параметров, что и для результатов, представленных на рис. 2. Результаты показывают, что изменение формы выступов приводит к очень значительному изменению эффективного адгезионного давления: к снижению его на несколько порядков по сравнению с адгезией гладких поверхностей.

**3. Контактная задача на макроуровне.** На макроуровне рассматривается взаимодействие жесткого осесимметричного индентора, форма которого описывается функцией  $f_1(r) = r^2/(2R_1)$ , с упругим полупространством, занимающим область  $z \leq 0$  (рис. 1б). Будем считать областью контакта круг  $r \leq a_1$ , в котором давление на поверхности упругого полупространства положительное, а областью адгезии – кольцо  $a_1 \leq r \leq b_1$ , в котором оно отрицательное. Эффективное адгезионное давление берется из решения задачи на микроуровне  $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$ , метод получения которого изложен в п. 2. Величина номинального зазора  $h_1$  между поверхностями индентора и полупространства определяется соотношением:

$$h_1(r) = \frac{r^2}{2R_1} + u(r) + d_1, \quad (3.1)$$

где  $d_1$  – расстояние между индентором и полупространством.

Условия на границе упругого полупространства имеют вид:

$$\begin{aligned} h_1(r) &= 0 & r &\leq a_1 \\ p(r) &= -p_{\text{eff}}(h_1(r)) & a_1 &\leq r \leq b_1 \\ p(r) &= 0 & r &> b_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

На границе  $r = a_1$  области контакта величина нормального напряжения равна нулю

$$p(r) = 0 \quad r = a_1 \quad (3.3)$$

Кроме того, выполняется условие равновесия для внешней нормальной силы  $q$ , действующей на индентор

$$q = 2\pi \int_0^b rp(r)dr \quad (3.4)$$

Для решения задачи эффективное адгезионное давление в области адгезии  $a_1 \leq r \leq b_1$  заменяется кусочно-постоянной аппроксимацией

$$p_{\text{eff}}(r) = \begin{cases} p^1, & b^0 \leq r < b^1 \\ p^2, & b^1 \leq r < b^2 \\ \dots & \dots \\ p^N, & b^{N-1} \leq r < b^N \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $b^0 = a_1$ ,  $b^N = b_1$ .

Метод решения задачи об адгезионном взаимодействии упругого полупространства с осесимметричным индентором при заданной удельной силе адгезии в виде кусочно-постоянной функции по радиальной координате был предложен ранее [26]. Решение этой задачи имеет следующий вид. В случае контакта поверхностей имеем для распределения контактного давления:

$$p(r) = \frac{2E^*}{\pi R_1} \sqrt{a_1^2 - r^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N (p^{i+1} - p^i) \text{arccctg} \sqrt{\frac{a_1^2 - r^2}{(b^i)^2 - a_1^2}}, \quad (3.6)$$

где полагается  $p^{N+1} = 0$ . Выражение для силы, действующей на индентор, имеет вид:

$$q = \frac{4E^*a_1^3}{3R_1} + 2\sum_{i=1}^N (p^{i+1} - p^i)(b^i)^2 \left[ \arccos \frac{a}{b^i} + \frac{a}{b^i} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b^i}\right)^2} \right] \quad (3.7)$$

А расстояние между телами

$$d_1 = -\frac{a_1^2}{R_1} - \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p^{i+1} - p^i)b^i \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{b^i}\right)^2} \quad (3.8)$$

Заметим, что в соотношениях (3.5)–(3.8) величина эффективного адгезионного давления  $p_{\text{eff}}$  фигурирует как функция радиальной координаты  $r$  при  $r \geq a_1$ . Однако, в результате решения задачи на микроуровне (п. 2) определяется зависимость эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора,  $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$ . Для того, чтобы использовать эту функцию в соотношениях (3.6)–(3.8), необходимо представить функцию номинального зазора  $h_1(r)$ , определенную соотношением (3.1), в виде кусочно-постоянной аппроксимации, соответствующей разбиению отрезка  $a_1 \leq r \leq b_1$ , использованному в (3.5):  $h_1^i = h_1(b^i)$ ,  $i = 1..N$ . Применяя второе условие из (3.2) в каждой точке  $b^i$ ,  $i = 1..N$ , можно получить следующую систему уравнений для определения координат  $b^i$  точек разбиения отрезка  $a_1 \leq r \leq b_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi h_1^k}{2} = & \left( d_1 + \frac{(b^k)^2}{2R_1} \right) \arccos \frac{a_1}{b^k} - \frac{2}{E^*} \sum_{i=1}^N (p^{i+1} - p^i) b^k \arcsin \frac{a_1}{b^k} + \\ & + \frac{(b^k)^{2n}}{2R_1} \sqrt{\left(\frac{b^k}{a_1}\right)^2 - 1} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-2)!!}{(2j-1)!!} \left(\frac{a_1}{b^k}\right)^{2j} + \frac{2b^k}{E^*} \sum_{i=1}^{k-1} (p^{i+1} - p^i) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{E}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a}{b^i}, \frac{b^i}{b^k}\right) - \left(1 - \left(\frac{b^i}{b^k}\right)^2\right) \left[ \mathbf{K}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{F}\left(\arcsin \frac{a_1}{b^k}, \frac{b^i}{b^k}\right) \right] \right\} + \\ & + \frac{2}{E^*} \sum_{i=k}^N (p^{i+1} - p^i) b^i \left[ \mathbf{E}\left(\frac{b^i}{b^k}\right) - \mathbf{E}\left(\arcsin \frac{a_1}{b^k}, \frac{b^i}{b^k}\right) \right], \quad k = 1..N, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{F}(\varphi, x)$  и  $\mathbf{K}(x)$  – соответственно, неполный и полный эллиптический интеграл первого рода,  $\mathbf{E}(\varphi, x)$  и  $\mathbf{E}(x)$  – второго рода. Метод получения соотношений (3.6)–(3.9) описан в [25, 26].

При известной зависимости эффективного адгезионного давления от величины номинального зазора,  $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$ , система уравнений (3.9) решается численно относительно величин  $b^i$ , при этом автоматически определяется радиус области контакта,  $a_1 = b^0$ . После этого можно определить номинальное контактное давление (3.6), а также зависимость силы от расстояния между индентором и полупространством (3.7)–(3.8). Заметим, что определяемая из решения задачи на микроуровне (п. 2) зависимость  $p_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}(h_1)$  является различной для случаев подвода поверхностей и разведения их друг от друга. Таким образом, решение задачи на макроуровне также будет различным, в зависимости от того, приближается индентор к полупространству или удаляется от него.

**4. Результаты расчета.** На рис. 4 представлены распределения контактного давления на макроуровне при значении безразмерного расстояния между выступами  $L = 0.06$  и величине максимального внедрения индентора  $d_1/R_1 = -0.05$  для различных форм выступов. Число рядом с каждой кривой соответствует показателю степени  $n$  в функции,



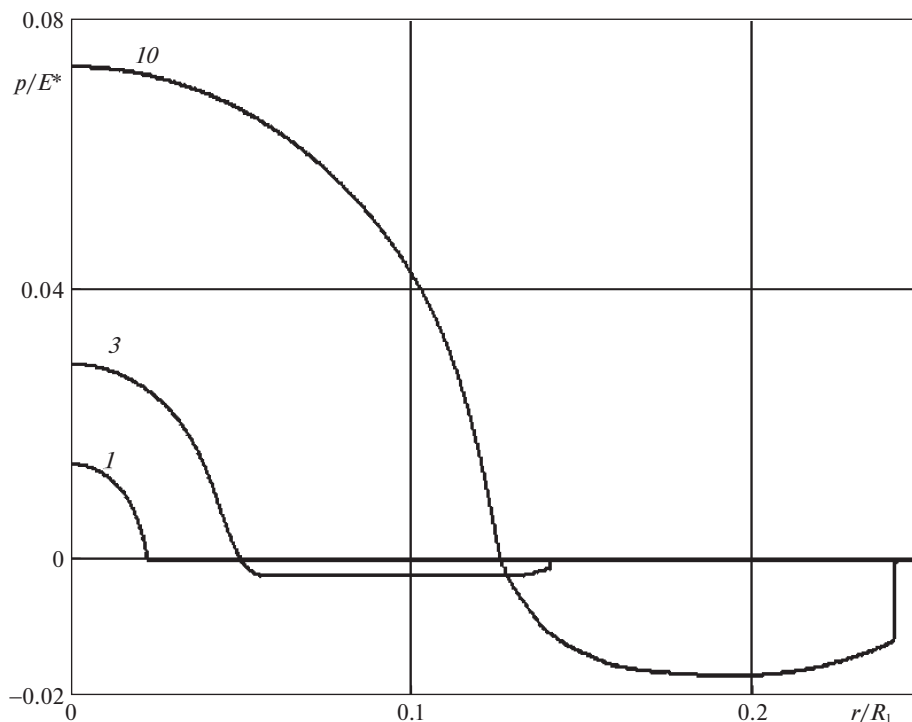


Рис. 4

описывающей форму выступов  $f_0(r) = r^{2n}/R_0^{2n-1}$ . Остальные параметры задачи имеют те же значения, что и приведенные к описанию рис. 2. Результаты показывают, что более пологая форма выступов приводит к значительному увеличению размера области фактического контакта, повышению по абсолютной величине как контактных (положительных), так и адгезионных (отрицательных) поверхностных напряжений.

На рис. 5 показаны зависимости безразмерной номинальной площади контакта  $\pi a_1^2/R_1^2$  от внешней силы  $q/(E^*R_1^2)$ , приложенной к штампу. Результаты приведены для двух значений расстояния между выступами и двух значений относительного размера выступов: кривые 1 и 1' соответствуют более плотному расположению выступов  $L = 0.028$ , а кривые 2 и 2' – менее плотному  $L = 0.05$ ; при этом кривые 1 и 2 построены для относительного размера выступов  $R_0/R_1 = 0.01$ , а кривые 1' и 2' – для  $R_0/R_1 = 0.005$ . Обе указанные характеристики микрорельефа оказывают значительное влияние на площадь контакта на макроуровне: уменьшение расстояния между выступами и увеличение их размера приводит к возрастанию номинальной площади контакта и максимальной отрицательной силы, которая соответствует силе отрыва поверхностей. Заметим, что при рассмотрении задачи для кластера микроконтактов с учетом адгезии в [27] было показано, что условие отрыва зависит также от напряженного состояния на границе области контакта, однако учет влияния градиента контактного давления на краю номинальной области контакта на условие отрыва поверхностей выходит за рамки вопросов данной работы.

Все кривые, представленные на рис. 4 и 5, соответствуют случаю, когда индентор удаляется от полупространства. На рис. 6, иллюстрирующей зависимость безразмерной силы  $q/(E^*R_1^2)$  от расстояния между индентором и полупространством  $d_1/R_1$ , при-

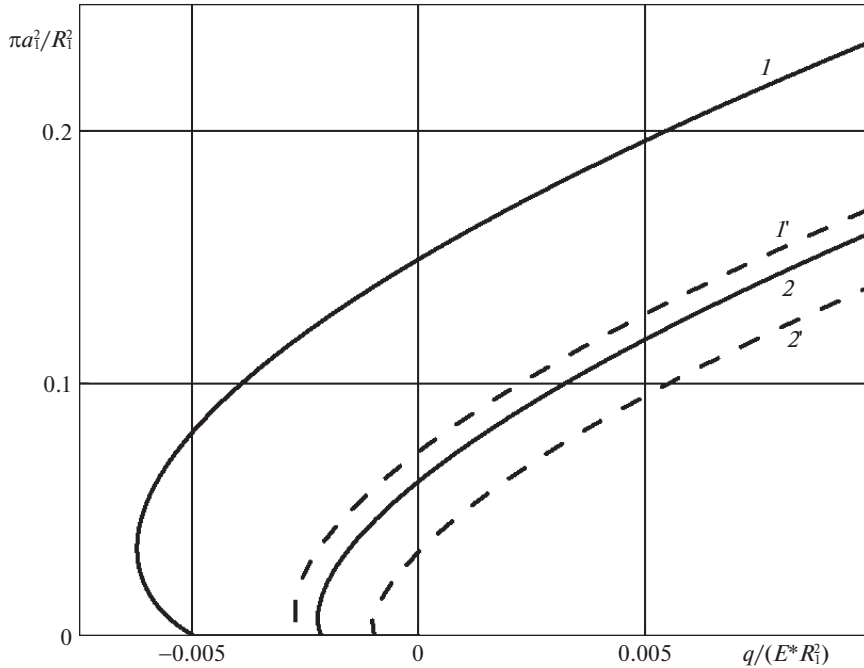


Рис. 5

ведены графики как для подвода индентора (кривые 1 и 2), так и для его отвода (кривые 1' и 2'). Кривая 3 соответствует адгезионному взаимодействию упругого полупространства с гладким индентором, не имеющим поверхностных выступов. Результаты показывают, что помимо гистерезиса, возникающего вследствие одновременного действия адгезионных и упругих сил (показан штриховыми линиями со стрелками на примере кривой 3), имеет место еще один вклад в гистерезис, связанный с дискретностью контакта (отличие кривых 1 и 1', 2 и 2'). Однако, несмотря на дополнительный вклад за счет микрогеометрии поверхности, общая величина адгезионного гистерезиса для поверхности, покрытой выступами, значительно меньше, чем для гладких поверхностей; также значительно меньше и сила отрыва – максимальная отрицательная сила, которую выдерживает контакт. Этот эффект качественно объясняется уменьшением площади контактной поверхности при переходе от сплошного к дискретному контакту, что приводит к уменьшению эффективной поверхностной энергии каждого из взаимодействующих тел [6, 22].

**Заключение.** Предложен метод решения задачи об адгезионном взаимодействии осесимметричного индентора с упругим полупространством с учетом поверхностного микрорельефа в виде регулярно расположенных одинаковых выступов, покрывающих индентор. Построенное решение позволяет исследовать влияние параметров поверхностного микрорельефа на характеристики адгезионного взаимодействия на макроуровне в случае дискретного контакта поверхностей на микроуровне. Проведен расчет и анализ распределения номинального контактного давления, номинальной площади контакта и зависимости силы от расстояния между индентором и полупространством при различных параметрах микрорельефа: формы выступов, их относительного размера и плотности расположения. Полученные результаты могут быть использованы для управления адгезионными свойствами поверхностей путем нанесения на них регулярного рельефа заданной формы.

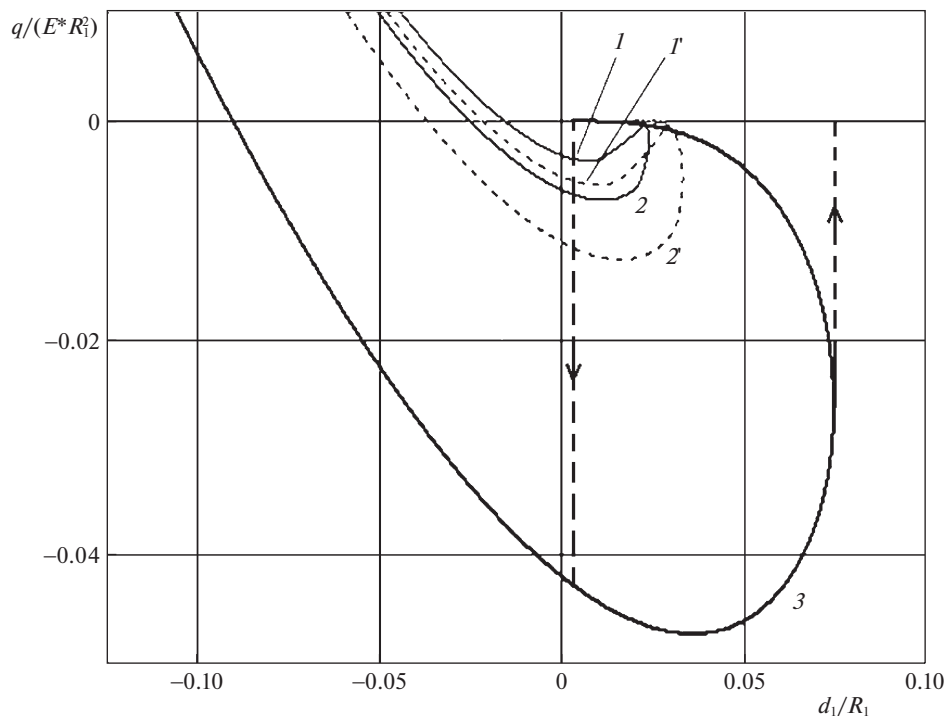


Рис. 6

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 19-01-00231). Решение контактной задачи на макроуровне и его анализ (п. 3–4) выполнены при поддержке РНФ (грант 18-19-00574).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Derjaguin B.V., Müller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformation on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
2. Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // J. Colloid Interface Sci. 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
3. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
4. Briggs G.A.D., Briscoe B.J. The effect of surface topography on the adhesion of elastic solids // J. Phys. D. Appl. Phys. 1977. V. 10. № 18. P. 2453–2466.
5. Purto J., Gorb E.V., Steinhart M., Gorb S.N. Measuring of the hardly measurable: adhesion properties of anti-adhesive surfaces // Appl. Phys. A 2. 2013. V. 111. № 1. P. 183–189.
6. Borodich F.M., Savencu O. Hierarchical models of engineering rough surfaces and bio-inspired adhesives // Ed. by Heepe L., Xue L., Gorb S. Bio-inspired Structured Adhesives. Biologically-Inspired Systems. V. 9. Cham: Springer, 2017.
7. Fuller K.N.G., Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. Roy. Soc. A. 1975. V. 345. № 1642. P. 327–342.
8. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1998. 344 p.
9. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

10. Johnson K.L. The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct. 1995. V. 32. № 3–4. P. 423–430.
11. Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J. The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // J. Polym. Sci. B. 2001. V. 39. № 11. P. 1195–1214.
12. Adams G.G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // ASME J. Appl. Mech. 2004. V. 71. № 6. P. 851–856.
13. Jin F., Guo X., Wan Q. Revisiting the Maugis–Dugdale adhesion model of elastic periodic wavy surfaces // ASME J. Appl. Mech. 2016. V. 83. № 10. P. 101007.
14. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Изв. РАН МТТ. 2003. № 2. С. 49–61.
15. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // Изв. РАН МТТ. 2017. № 4. С. 101–111.
16. Guduru P.R. Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. № 3. P. 445–472.
17. Kesari H., Lew A.J. Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // J. Mech. Phys. Solids. 2011. V. 59. № 12. P. 2488–2510.
18. Li Q., Pohrt R., Popov V.L. Adhesive strength of contacts of rough spheres // Front. Mech. Eng. 2019. V. 5. № 7.
19. Солдатенков И.А. Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
20. Солдатенков И.А. Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: упрощенный метод решения (двухуровневая модель) // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 314–322.
21. Galanov B.A. Models of adhesive contact between rough elastic solids // Int. J. Mech. Sci. 2011. V. 53. № 11. P. 968–977.
22. Pepelyshev A., Borodich F.M., Galanov B.A. et al. Adhesion of soft materials to rough surfaces: experimental studies, statistical analysis and modelling // Coatings. 2018. V. 8. № 10. P. 350.
23. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR–DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1992. V. 150. № 1. P. 243–269.
24. Johnson K.L., Greenwood J.A. An adhesion map for the contact of elastic spheres // J. Colloid Interface Sci. 1997. V. 192. № 2. P. 326–333.
25. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 279–289.
26. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Об одном подходе к решению задач о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 323–327.
27. Argatov I., Li Q., Popov V.L. Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Archive Appl. Mech. 2019. V. 89. № 8. P. 1447–1472.

### Adhesive Interaction of Elastic Bodies with Regular Surface Relief

Yu. Yu. Makhovskaya<sup>#</sup>

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: makhovskaya@mail.ru*

Adhesive interaction between an axisymmetric indenter and an elastic half-space is considered taking into account a surface relief in the form of regularly arranged identical asperities covering the indenter. At microlevel, contact between the system of asperities and the half-space is assumed discrete. At macrolevel, the solution of the problem is constructed by using the dependence of the effective specific force of adhesion on the nominal gap, which is obtained as a result of the problem solution at microlevel. The solution obtained allows one to

model the influence of microgeometry and adhesion characteristics at microlevel on the contact of elastic bodies at macrolevel.

*Keywords:* adhesion, discrete contact, regular relief

## REFERENCES

1. *Derjaguin B.V., Müller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformation on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
2. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Colloid Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
3. *Derjaguin B.V., Churaev N.V., Muller V.M.* Surface Forces. (Poverkhnostnye sily) Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (in Russian)
4. *Briggs G.A.D., Briscoe B.J.* The effect of surface topography on the adhesion of elastic solids // *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 1977, vol. 10, no. 18, pp. 2453–2466.
5. *Purtov J., Gorb E.V., Steinhart M., Gorb S.N.* Measuring of the hardly measurable: adhesion properties of anti-adhesive surfaces // *Appl. Phys. A* 2, 2013, vol. 111, no. 1, pp. 183–189.
6. *Borodich F.M., Savencu O.* Hierarchical models of engineering rough surfaces and bio-inspired adhesives // Ed. by *Heepe L., Xue L., Gorb S.* Bio-inspired Structured Adhesives. Biologically-Inspired Systems. vol. 9. Cham: Springer, 2017.
7. *Fuller K.N.G., Tabor D.* The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. A*, 1975, vol. 345, no. 1642, pp. 327–342.
8. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1998. 344 p.
9. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika friktsionnogo vzaimodeistviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
10. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // *Int. J. Solids Struct.*, 1995, vol. 32, no. 3–4, pp. 423–430.
11. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // *J. Polym. Sci. B*, 2001, vol. 39, no. 11, pp. 1195–1214.
12. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // *ASME J. Appl. Mech.*, 2004, vol. 71, no. 6, pp. 851–856.
13. *Jin F., Guo X., Wan Q.* Revisiting the Maugis–Dugdale adhesion model of elastic periodic wavy surfaces // *ASME. J. Appl. Mech.*, 2016, vol. 83, no. 10, pp. 101007.
14. *Makhovskaya Yu.Yu.* Discrete contact of elastic bodies in the presence of adhesion, // *Mech. Sol.*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 39–48.
15. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion // *Mech. Sol.*, 2017, vol. 52, no. 4, pp. 435–443.
16. *Guduru P.R.* Detachment of a rigid solid from an elastic wavy surface: theory // *J. Mech. Phys. Solids*, 2007, vol. 55, no. 3, pp. 445–472.
17. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // *J. Mech. Phys. Solids*, 2011, vol. 59, no. 12, pp. 2488–2510.
18. *Li Q., Pohrt R., Popov V.L.* Adhesive strength of contacts of rough spheres // *Front. Mech. Eng.*, 2019, vol. 5, no. 7.
19. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
20. *Soldatenkov I.A.* Contact Problem with Bulk-Applied Intermolecular Interaction Forces: a Simplified Solution Method (Two-Level Model) // *Mech. Sol.*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 303–310.
21. *Galanov B.A.* Models of adhesive contact between rough elastic solids // *Int. J. Mech. Sci.*, 2011, vol. 53, no. 11, pp. 968–977.

22. *Pepelyshev A., Borodich F.M., Galanov B.A. et al.* Adhesion of soft materials to rough surfaces: experimental studies, statistical analysis and modelling // *Coatings*, 2018, vol. 8, no. 10, pp. 350.
23. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.*, 1992, vol. 150, no. 1, pp. 243–269.
24. *Johnson K.L., Greenwood J.A.* An adhesion map for the contact of elastic spheres // *J. Colloid Interface Sci.*, 1997, vol. 192, no. 2, pp. 326–333.
25. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu. Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // *AMM*. 2001, vol. 65, no. 2, pp. 273–282.
26. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Approach to solving the problems on interaction between elastic bodies in the presence of adhesion // *Doklady Phys.*, 2004, vol. 49, no. 9, pp. 534–538.
27. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // *Archive Appl. Mech.*, 2019, vol. 89, no. 8, pp. 1447–1472.