

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ТРЕЩИНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ© 2020 г. Е. А. Артамонова¹, Д. А. Пожарский^{1,*}¹ *Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия***e-mail: pozharda@rambler.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2020 г.

После доработки 21.04.2020 г.

Принята к публикации 23.05.2020 г.

Рассматриваются задачи о плоских трещинах нормального отрыва (математических разрезах) в срединной плоскости трансверсально изотропного упругого слоя, внешние грани которого находятся в условиях скользящей заделки. Плоскости изотропии параллельны или перпендикулярны граням слоя. При помощи интегрального преобразования Фурье задачи сведены к интегро-дифференциальным уравнениям относительно раскрытия трещины, из которых предельными переходами можно получить известные уравнения соответствующих задач для трансверсально изотропного пространства и изотропного слоя. Для эллиптических трещин применяется регулярный асимптотический метод, эффективный для относительно толстого слоя. Показано, область применимости метода сужается с увеличением анизотропии, характеризуемой корнями характеристического уравнения (для изотропного материала все корни равны единице). Для полосовых трещин получены замкнутые решения на основе специальных аппроксимаций символов ядер интегральных уравнений, относительные погрешности которых убывают с увеличением анизотропии. Расчеты сделаны для известных трансверсально изотропных материалов.

Ключевые слова: теория упругости, трансверсальная изотропия, слой, трещина**DOI:** 10.31857/S0032823520040037

Задачи механики анизотропных материалов являются актуальными [1, 2]. Для решения задач механики разрушения разработаны эффективные численные методы [3–5]. Ранее исследовались задачи об эллиптической [6, 7], полосовой [8] трещине, периодической системе эллиптических трещин [9] в трансверсально изотропном пространстве, когда плоскости изотропии перпендикулярны плоскостям трещин. В работе [7] оси эллипса повернуты относительно осей исходной системы координат. Изучался случай, когда плоскость трещины в неограниченном теле находится под произвольным углом к плоскостям изотропии [10]. Показана связь между задачами о трещинах и контактными задачами для обобщенного анизотропного материала [11]. Исследовались плоские задачи о продольной трещине в ортотропной упругой полосе [12, 13]. Рассматривалась возможность искривления трещины в анизотропной плоскости [14]. Применялись методы идентификации трещин в анизотропной плите [15]. Цель настоящей статьи – получение новых аналитических решений. Выводится интегро-дифференциальное уравнение задачи о трещине в трансверсально изотропном слое, плоскость которой ортогональна плоскостям изотропии. Для сравнения рассматривается и традиционный случай параллельных плоскостей [16]. В отличие от метода последовательных приближений [16], в настоящей работе применяется регулярный асимптотический метод В.М. Александрова, а также аналитический метод, основанный на спе-

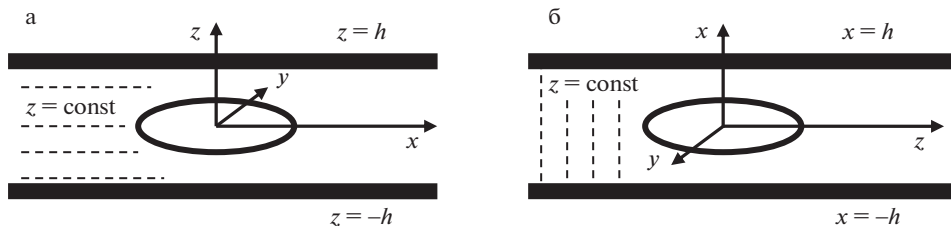


Рис. 1. Направление плоскостей изотропии в слое с трещиной.

циальной аппроксимации символа ядра, ранее использованные для изотропного слоя [17]. При выводе каждого члена асимптотики для эллиптической трещины требуется точное решение интегрального уравнения для такой трещины в пространстве [6, 9, 17].

1. Постановка задач. Рассмотрим трансверсально изотропный упругий слой $\{|x| < \infty, |y| < \infty, |z| \leq h\}$, в срединной плоскости которого имеется симметрично нагруженная трещина нормального отрыва, занимающая область Ω . Плоскости изотропии $z = \text{const}$ параллельны граням слоя (задача *A*, рис. 1, а). Рассмотрим аналогичную задачу *B* для слоя $\{|x| \leq h, |y| < \infty, |z| < \infty\}$, которая отличается от задачи *A* направлением осей координат и тем, что плоскости изотропии $z = \text{const}$ перпендикулярны граням слоя (рис. 1, б).

Для обеих задач закон Гука имеет вид [1, 6]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_y &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = A_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= A_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = A_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

В частном случае изотропного тела в формулах (1.1) следует положить (G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона)

$$A_{11} = A_{33} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad A_{13} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad A_{44} = A_{66} = G \quad (1.2)$$

В силу симметрии достаточно рассматривать половину слоя, граничные условия задачи *A* имеют вид

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \sigma_z &= -q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u_z = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ z = h: \quad u_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а для задачи *B*

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \sigma_x &= -q(y, z), \quad (y, z) \in \Omega; \quad u_x = 0, \quad (y, z) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \\ x = h: \quad u_x &= \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

При заданных параметрах упругости A_{mn} , толщине слоя $2h$, области Ω , функции $q(x, y)$ (задача *A*) или $q(y, z)$ (задача *B*) требуется определить раскрытие трещины $u_z(x, y, 0) = f(x, y)$ ($(x, y) \in \Omega$, задача *A*) или $u_x(0, y, z) = f(y, z)$ ($(y, z) \in \Omega$, задача *B*), затем может быть определен коэффициент интенсивности напряжений на контуре трещины.

2. Интегро-дифференциальные уравнения. Для сведения задач с граничными условиями (1.3) и (1.4) к интегральным уравнениям следует рассмотреть вспомогательные задачи о точечных дислокациях, когда в формулах (1.3) и (1.4) вместо нормальных напряжений задаются нормальные перемещения в виде δ -функции Дирака, область Ω стягивается в точку [6, 17]. Решения вспомогательных задач находятся при помощи двойных преобразований Фурье. Затем, интегрируя выражение для нормального напряжения по области Ω и удовлетворяя оставшемуся граничному условию, для задачи *A* получим интегральное уравнение $((x, y) \in \Omega)$

$$\iint_{\Omega} f(x_0, y_0) K_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi \frac{q(x, y)}{\theta_1}$$

$$K_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\beta_1 h) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\beta_2 h)}{\gamma_1 - \gamma_2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \exp(-i(x\xi + y\eta)) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$\theta_1 = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \beta_k = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\gamma_k} \quad (k = 1, 2)$$

Для задачи *B* аналогичное уравнение имеет вид $((y, z) \in \Omega)$

$$\iint_{\Omega} f(y_0, z_0) K_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi \frac{q(y, z)}{\theta_2}$$

$$K_2(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{(m_2 - m_1)\gamma_3^2 \xi^2 \zeta_1 \zeta_2} \exp(-i(z\xi + y\eta)) d\xi d\eta, \quad \theta_2 = A_{66}$$

$$D = m_2 h_2^2 \zeta_2 \operatorname{cth}(\zeta_1 h) - m_1 h_1^2 \zeta_1 \operatorname{cth}(\zeta_2 h) + 4(m_1 - m_2)\eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \operatorname{cth}(\zeta_3 h) \quad (2.2)$$

$$m_k = \frac{A_{11}\gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad h_k = (m_k + 1)\gamma_3^2 \xi^2 + 2\eta^2 \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_k = \sqrt{\gamma_k^2 \xi^2 + \eta^2} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Здесь особенность подынтегральной функции при $\xi = 0$ является устранимой.

Для обеих задач γ_k ($k = 1, 2$) – корни (возможно, комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} \gamma_k > 0$) характеристического уравнения [1, 6]

$$\gamma^4 A_{11}A_{44} - \gamma^2 [A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})] + A_{33}A_{44} = 0, \quad \gamma_3 = \sqrt{A_{44}/A_{66}}$$

В силу положительной определенности матрицы упругих постоянных $\theta_1 > 0$ [1]. Если в формулах (2.1) перейти к изотропному материалу с учетом соотношений (1.2) и пределов

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\beta_1 h) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\beta_2 h)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{\operatorname{ch} 2u - 1} \quad (u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} h), \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \theta_1 = \frac{G}{1 - \nu}$$

получим известное ядро интегрального уравнения задачи о трещине в изотропном слое [17]. Аналогичный предельный переход возможен и из формул (2.2).

При $h \rightarrow \infty$ ядра интегральных уравнений (2.1) и (2.2) переходят в известные для задач о трещине в бесконечном трансформном упругом теле [1, 6]. Пользуясь этим, регуляризуем уравнения (2.1) и (2.2), выделяя главные интегро-дифференциальные части, в которых ядра свободны от квадратур [8, 9, 17]. Для задачи *A*, используя формулу (1.10) [8], получим

$$-\Delta \iint_{\Omega} \frac{f(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0 + \iint_{\Omega} f(x_0, y_0) L_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi \frac{q(x, y)}{\theta_1}$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2.3)$$

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1 [\operatorname{cth}(\beta_1 h) - 1] - \gamma_2 [\operatorname{cth}(\beta_2 h) - 1]}{\gamma_1 - \gamma_2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \exp(-i(x\xi + y\eta)) d\xi d\eta$$

Для задачи *Б*, сравнивая формулы (1.4) и (1.16) [8] для нормального напряжения (в формуле (1.16) [8] следует исправить опечатку – вставить множитель $-(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ под знаком интеграла), получим

$$\begin{aligned} & -\Delta \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_0(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 + \\ & + \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi \frac{q(y, z)}{\theta_2}, \quad (y, z) \in \Omega \\ & \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L_0(y, z) = \frac{D_0}{(m_2 - m_1)\gamma_3^2(z^2 + y^2)y^2z^0\zeta_2^0} \\ & L_2(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1}{(m_2 - m_1)\gamma_3^2\xi^2\zeta_1\zeta_2} \exp(-i(z\xi + y\eta)) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$D_0 = m_2 h_{10}^2 \zeta_{20} - m_1 h_{20}^2 \zeta_{10} + 4(m_1 - m_2) z^2 \zeta_{10} \zeta_{20} \zeta_{30},$$

$$D_1 = m_2 h_1^2 \zeta_2 [\operatorname{cth}(\zeta_1 h) - 1] - m_1 h_2^2 \zeta_1 [\operatorname{cth}(\zeta_2 h) - 1] + 4(m_1 - m_2) \eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 [\operatorname{cth}(\zeta_3 h) - 1]$$

$$h_{k0} = (m_k + 1)\gamma_k^2 y^2 + 2z^2 \quad (k = 1, 2), \quad \zeta_{k0} = \sqrt{\gamma_k^2 y^2 + z^2} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Для круговой области Ω уравнение (2.4) в отличие от (2.3) не сводится к случаю осевой симметрии. Будем предполагать, что упругие параметры таковы, что выполняется неравенство $D_1/(m_2 - m_1) > 0$ ($\forall \xi, \eta$).

3. Регулярный асимптотический метод. Если в уравнениях (2.3) и (2.4) оставить только главные интегро-дифференциальные члены, в которых ядра свободны от квадратур, то при эллиптической области Ω и полиномиальной правой части $q(x, y)$ или $q(y, z)$ такие уравнения будут иметь точные решения [6, 9, 17]. Пользуясь этим, применим для решения уравнений регулярный асимптотический метод, связанный с разложениями по степеням малого параметра [17]. Пусть область Ω ограничена эллиптическим контуром

$$A) \quad l(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b; \quad q(x, y) = q = \text{const} \quad (3.1)$$

$$B) \quad l(y, z) = 1 - \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b; \quad q(y, z) = q = \text{const}$$

Введем безразмерные обозначения и замены переменных ($n = 1$ для задачи *A*, $n = 2$ для задачи *B*)

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x}{a}, & y_* &= \frac{y}{a}, & z_* &= \frac{z}{a}, & f_*(x_*, y_*) &= \frac{f(x, y)}{a} \\ f_*(y_*, z_*) &= \frac{f(y, z)}{a}, & q_* &= \frac{q}{\theta_n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\lambda = \frac{h}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \xi = \frac{u}{h} \cos \varphi, \quad \eta = \frac{u}{h} \sin \varphi, \quad \Omega \rightarrow \Omega_*$$

и т.д. Звездочки далее опускаем. Тогда уравнение (2.3) после взятия в ядре интеграла по полярной координате φ [18] преобразуется к виду

$$-\Delta \iint_{\Omega} \frac{f(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0 + \frac{1}{\lambda^3} \iint_{\Omega} f(x_0, y_0) L_1(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi q, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$L_1(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma_1 [\operatorname{cth}(u/\gamma_1) - 1] - \gamma_2 [\operatorname{cth}(u/\gamma_2) - 1]}{\gamma_1 - \gamma_2} u^2 J_0 \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda} u \right) du, \quad (3.3)$$

где $J_0(u)$ — функция Бесселя. Главная часть уравнения (3.3) совпадает с главной частью соответствующего уравнения задачи о трещине в изотропном пространстве [17].

Уравнение (2.4) в обозначениях (3.2), где u, φ — полярные координаты, принимает вид

$$-\Delta \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_0(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^3} \iint_{\Omega} f(y_0, z_0) L_2(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi q, \quad (y, z) \in \Omega$$

$$L_2(y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{D_2 u^2}{(m_2 - m_1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi \zeta_{11} \zeta_{21}} \cos \left(\frac{z \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} u \right) d\varphi du$$

$$D_2 = m_2 h_{11}^2 \zeta_{21} [\operatorname{cth}(\zeta_{11} u) - 1] - m_1 h_{21}^2 \zeta_{11} [\operatorname{cth}(\zeta_{21} u) - 1] +$$

$$+ 4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi \zeta_{11} \zeta_{21} \zeta_{31} [\operatorname{cth}(\zeta_{31} u) - 1]$$

$$h_{k1} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2),$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3),$$

где функция $L_0(y, z)$ сохраняет форму (2.4).

Введенный в (3.2) параметр λ характеризует толщину слоя относительно размера трещины. Разложим ядра $L_1(x, y)$ (3.3) и $L_2(y, z)$ (3.4) в ряды по отрицательным степеням λ . Асимптотический метод “больших λ ” может применяться в интервале изменения λ , в котором указанные разложения абсолютно сходятся в области трещины [17]. После разложения в ряд функции Бесселя в формуле (3.3) и использовании интеграла [18]

$$\int_0^{\infty} [\operatorname{cth}(Au) - 1] u^k du = \frac{k! \zeta(k+1)}{2^k A^{k+1}}, \quad (3.5)$$

где $\zeta(k)$ — дзета-функция Римана, получим

$$L_1(x - x_0, y - y_0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{R^{2m}}{\lambda^{2m}}$$

$$a_m = \frac{(-1)^m (m+1)(2m+1)!!}{2^{2m+1} (2m)!!} \zeta(2m+3) \frac{\gamma_1^{2m+4} - \gamma_2^{2m+4}}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

Поскольку в области эллипса $\max R = 2$ и степенной ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \zeta(m) t^m \quad (3.7)$$

сходится при $|t| < 1$ [19], ряд (3.6) сходится абсолютно в области эллипса при условии

$$\lambda > \gamma_{\max} = \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|) \quad (3.8)$$

Разложив в ряд по степеням λ косинус в формуле (3.4) для $L_2(y, z)$ и используя интеграл (3.5), получим

$$L_2(y - y_0, z - z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(y - y_0, z - z_0)}{\lambda^{2m}}$$

$$b_m(y, z) = \frac{(-1)^m (m+1)(2m+1)\zeta(2m+3)}{2^{2m+1}\pi(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \times \quad (3.9)$$

$$\times \int_0^{\pi} \left[\frac{m_2 h_{11}^2}{\zeta_{11}^{2m+4}} - \frac{m_1 h_{21}^2}{\zeta_{21}^{2m+4}} + \frac{4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi}{\zeta_{31}^{2m+2}} \right] \frac{(z \cos \varphi + y \sin \varphi)^{2m} d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

С учетом области сходимости ряда (3.7) и того, что

$$\max_{\varphi} \frac{(z \cos \varphi + y \sin \varphi)^2}{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{z^2 + y^2 \gamma^2}{\gamma^2}$$

можно заключить, что ряд (3.9) сходится абсолютно в области эллипса при условии

$$\lambda > \gamma_{\max}^* = \max(1, |\gamma_1^{-1}|, |\gamma_2^{-1}|, \gamma_3^{-1}) \quad (3.10)$$

Неравенства (3.8) и (3.10) ограничивают область применимости асимптотического метода соответственно для задач *A* и *B*. Для изотропного материала, когда все $\gamma_k = 1$, получаем известный интервал $\lambda > 1$ [17].

Асимптотические решения уравнений (3.3) и (3.4) с ядрами соответственно (3.6) и (3.9) будем искать в виде ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$A) f(x, y) = \sum_{k=0}^4 \frac{f_k(x, y)}{\lambda^k} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right), \quad B) f(y, z) = \sum_{k=0}^4 \frac{f_k(y, z)}{\lambda^k} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \quad (3.11)$$

Подставляя разложения (3.11) соответственно в уравнения (3.3) и (3.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ , получим цепочки интегро-дифференциальных уравнений для последовательного определения функций $f_k(x, y)$ и $f_k(y, z)$. Эти уравнения соответствуют случаям эллиптической трещины в трансропном пространстве и имеют точные решения [6, 9, 17]. В результате для задачи *A* найдем ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$f(x, y) = \frac{\varepsilon q \sqrt{l(x, y)}}{E(k)} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a_0}{3\lambda^3 E(k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right), \quad a_0 = \frac{\zeta(3)}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) (\gamma_1 + \gamma_2), \quad (3.12)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл.

Для задачи *B* получим ($\lambda \rightarrow \infty$)

$$f(y, z) = \frac{\varepsilon q \sqrt{l(y, z)}}{E_1} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 b_0}{3\lambda^3 E_1} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right), \quad E_1 = \frac{1}{2(m_2 - m_1)\gamma_3^2 \varepsilon^2} \int_0^{\pi} \frac{D_3 d\varphi}{\zeta_{12} \zeta_{22} \cos^2 \varphi}$$

$$D_3 = m_2 h_{12}^2 \zeta_{22} - m_1 h_{22}^2 \zeta_{12} + 4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi \zeta_{12} \zeta_{22} \zeta_{32}$$

$$h_{k2} = (m_k + 1) \gamma_3^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2), \quad (3.13)$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$b_0 = \frac{\zeta(3)}{2\pi(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{m_2 h_{11}^2}{\zeta_{11}^4} - \frac{m_1 h_{21}^2}{\zeta_{21}^4} + \frac{4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi}{\zeta_{31}^2} \right] \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

Пусть теперь эллипс трещины вытянут вдоль оси y , т.е. неравенства (3.1) меняются на $b \geq a$. Тогда в формулах (3.2) следует поменять a и b местами, а границы эллипсов задать функциями

$$A) \quad l(x, y) = 1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} - y^2, \quad B) \quad l(y, z) = 1 - \frac{z^2}{\varepsilon^2} - y^2 \quad (3.14)$$

При этом для задачи A решение сохраняет вид (3.12), (3.14). Для задачи B в решении (3.13), (3.14) следует заменить E_1 на

$$E_2 = \frac{1}{2(m_2 - m_1)\gamma_3^2} \int_0^\pi \frac{D_4 d\varphi}{\zeta_{13}\zeta_{23} \cos^2 \varphi}$$

$$D_4 = m_2 h_{13}^2 \zeta_{23} - m_1 h_{23}^2 \zeta_{13} + 4(m_1 - m_2)\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \zeta_{13}\zeta_{23}\zeta_{33}$$

$$h_{k3} = (m_k + 1)\gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \quad (k = 1, 2)$$

$$\zeta_{k1} = \sqrt{\gamma_k^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \quad (k = 1, 2, 3)$$

На основе решений (3.12)–(3.15) при учете разницы в приведении q к безразмерной форме в задачах A и B , см. (3.2), для отношения коэффициентов интенсивности нормальных напряжений (КИН) на контуре трещины в этих задачах получим выражение

$$S_m(\varepsilon) = \frac{\theta_1 E(k)}{\theta_2 E_m} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 b_0}{3\lambda^3 E_m} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a_0}{3\lambda^3 E(k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \right)^{-1}, \quad (3.16)$$

где следует взять $m = 1$ при $a \geq b$ и $m = 2$ при $b \geq a$. Для круговой трещины $S_1(1) = S_2(1)$.

4. Полосовые трещины. Рассмотрим задачи $A1$ и $B1$ о полосовых трещинах в слое, плоскости которых соответственно параллельны и перпендикулярны плоскостям изотропии. Пусть в задаче $B1$ полоса направлена вдоль оси y . В интегральных уравнениях (2.1) и (2.2) для этих задач соответственно положим

$$A1) \quad \Omega: |x| \leq a, \quad |y| < \infty; \quad q(x, y) = q(x), \quad f(x, y) = f(x)$$

$$B1) \quad \Omega: |y| < \infty, \quad |z| \leq a; \quad q(y, z) = q(z), \quad f(y, z) = f(z)$$

Тогда интегральные уравнения (2.1) и (2.2) становятся одномерными, и после введения безразмерных обозначений

$$A1) \quad x_* = \frac{x}{a}, \quad f_*(x_*) = \frac{f(x)}{h}, \quad q_*(x_*) = \frac{q(x)}{\theta_1}, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

$$B1) \quad x_* = \frac{z}{a}, \quad f_*(x_*) = \frac{f(z)}{h}, \quad q_*(x_*) = \frac{q(z)}{\theta_2^*}, \quad \theta_2^* = A_{66} \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2A_{13}A_{11}^{-1}}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

их можно записать в форме (звездочки далее опускаем)

$$\int_{-1}^1 f(\xi) l\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \lambda q(x) \quad (|x| \leq 1), \quad l(t) = \int_0^\infty L(u) u \cos(ut) du \quad (4.1)$$

$$A) \quad L(u) = \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(u/\gamma_1) - \gamma_2 \operatorname{cth}(u/\gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad B) \quad L(u) = \frac{\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2 u) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\gamma_1 u)}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

Уравнения (4.1) в пределе ($\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1$) переходят в известное уравнение плоской задачи о продольной трещине в изотропной упругой полосе [17]. Для материалов со значительной анизотропией (действительные корни $\gamma_1 \gg 1$, $0 < \gamma_2 \ll 1$) член с одним

из котангенсов в ядрах (4.1) начинает превалировать $(\gamma_1 \operatorname{cth}(u/\gamma_1))$ в задаче А1 и $\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2 u)$ в задаче Б1). В этом случае ядра (4.1) в соответствии с их асимптотическим поведением

$$\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} uL(u) = A, \quad \text{А) } A = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{Б) } A = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (4.2)$$

можно достаточно точно аппроксимировать при $0 \leq u < \infty$ выражением

$$L(u) \approx \operatorname{cth}(Au) \quad (4.3)$$

При аппроксимации (4.3) уравнение (4.1) имеет замкнутое решение, относительная погрешность которого тем меньше, чем сильнее анизотропия.

Интегрируя по частям при учете условий $f(\pm 1) = 0$, сведем уравнения (4.1), (4.3) к виду [18]

$$\int_{-1}^1 f'(\xi) k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi q(x) \quad (|x| \leq 1), \quad k(t) = \int_0^\infty \operatorname{cth}(Au) \sin(ut) du = \frac{\pi}{2A} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2A} \quad (4.4)$$

Сходимость интегралов по переменной u в (4.4) и (4.1) понимается в смысле теории обобщенных функций. Интегральное уравнение (4.4) после замены переменных сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, имеющему точное решение [17]. В результате, например, для постоянной нагрузки $q(x) = q = \operatorname{const}$ при учете условий $f(\pm 1) = 0$ последовательно найдем [18]

$$f'(x) = \frac{q(1 - \exp(Cx))}{\lambda \sqrt{(\exp C - \exp(Cx))(\exp(Cx) - \exp(-C))}}, \quad C = \frac{\pi}{\lambda A} \quad (4.5)$$

$$f(x) = \frac{qA}{\pi} \left(\arcsin \frac{\operatorname{ch} C - \exp(Cx)}{\operatorname{sh} C} + \arcsin \frac{\operatorname{ch} C - \exp(-Cx)}{\operatorname{sh} C} \right)$$

Погрешность решений (4.5) не превышает погрешности аппроксимации (4.3). На основе решений (4.5) для безразмерного КИН на границе трещины [16] получим выражение

$$K_I = - \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{2\pi(1-x)} f'(x) = \frac{q}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{C} \operatorname{th} \frac{C}{2}}$$

5. Анализ и выводы. Рассмотрим трансверсально изотропные материалы, параметры упругости которых A_{ij} известны ([1], с. 22–23).

Для случая эллиптической трещины в табл. 1 для ряда материалов даны значения величин $\gamma_{\max} < 3$ (3.8) и $\gamma_{\max}^* < 2$ (3.10), a_0 и b_0 , входящих в решения (3.12)–(3.16). Удержание большего числа слагаемых по отрицательным степеням λ в асимптотических разложениях (3.12), (3.16) изменяет их при $\lambda \geq 3$, как правило, не более чем на 5%. В последних трех колонках табл. 1 приведены значения отношения КИН для трещины перпендикулярной плоскостям изотропии к КИН для трещины параллельной плоскостям изотропии, рассчитанные при $\lambda = 3$ по формуле (3.16). При $S_m(\epsilon) > 1$ опаснее трещины, перпендикулярные плоскостям изотропии. Для большинства материалов из табл. 1 относительный КИН возрастает с ростом эксцентриситета эллипса. Для материалов с более выраженной анизотропией, характеризуемой, как правило, большим отличием между корнями $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 \in (0; 1)$, рекомендуется использовать вариационные методы при решении задач А и Б [20, 21].

В табл. 2 для ряда материалов [1], проявляющих значительную анизотропию (γ_{\max} или $\gamma_{\max}^* > 3$), а также для изотропного материала и титана приведены корни характеристического уравнения, их отношения, параметры аппроксимаций (4.3) и их относительные погрешности θ (%) для задач А1 и Б1. Как видно из табл. 2, значение θ снижа-

Таблица 1

Материал	γ_{\max}	γ_{\max}^*	a_0	b_0	$S_1(1)$	$S_1(0.1)$	$S_2(0.1)$
Al ₂ O ₃	1.669	1.586	4.400	4.027	1.070	1.617	1.624
Cd	1.029	1.229	1.088	5.380	0.6993	1.145	1.027
CdS	1.785	1.707	5.0291	5.120	1.104	1.700	1.618
Co	1.808	1.674	5.242	4.922	1.191	1.897	1.675
Ti	1.326	1.257	3.049	4.235	1.178	1.986	1.637
Zn	0.7942	1.266	0.4765	2.301	0.2667	0.3648	0.5058
ZnO	1.510	1.506	3.554	4.525	1.036	1.607	1.550
Бедренная кость сырая бычья	2.280	1.728	9.510	5.097	1.529	2.379	2.049
Бедренная кость человека	2.039	1.894	6.843	6.524	1.207	1.879	1.673
Бетон, состарен циклами нагрев-охлаждение	1.047	1.000	2.437	2.691	1.058	1.657	1.604
Бетон, состарен химически	1.125	1.000	2.491	2.567	1.154	1.853	1.708
Гнейс влажный	1.621	1.826	3.814	4.449	0.7808	1.062	1.360
Гнейс сухой	0.7448	1.365	0.8372	3.566	0.4546	0.6262	0.8455
Сапфир	1.528	1.526	3.629	3.793	1.001	1.511	1.544
Эпоксидное стекло	2.915	1.638	18.80	4.226	2.264	3.293	2.765

Таблица 2

Материал	γ_1	γ_2	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	θ (%)	A	θ (%)	A
				Задача А1		Задача Б1	
Изотропный	1.000	1.000	1.00	10.5	0.500	10.5	0.500
Ti	1.326	0.7952	1.67	9.8	0.471	9.8	0.497
Композит (60% волокон)	4.724	0.6888	6.86	4.2	0.185	4.2	0.601
Ламинат Т650/950-1	5.413	0.6458	8.38	3.6	0.165	3.6	0.577
Древесина (ель Дугласа)	3.713	0.3504	10.6	2.9	0.246	2.9	0.320
BaTiO ₃	5.314	0.1996	26.6	1.3	0.181	1.3	0.192

ется при возрастании отношения γ_1/γ_2 . Преимущество решения (4.5) состоит в том, что оно справедливо при любой относительной толщине слоя λ . В случае материалов из табл. 1, когда погрешность аппроксимации (4.3) существенна, для решения задач А1 и Б1 рекомендуется применять асимптотические методы [17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. Pan E., Chen W. Static Green's functions in anisotropic media. New York: Cambridge Univ. Press, 2015. 356 p.
3. Wilson W.K. Finite element methods for elastic bodies containing cracks // In: Mechanics of fracture. Vol. 1. Methods of analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by G.C. Sih. Leyden: Kluwer, 1973. P. 484–515.

4. *Raveendra S.T., Cruse T.A.* BEM analysis of problems of fracture mechanics // In: Developments in Boundary Element Methods—5. Industrial applications of Boundary Element Methods. Eds. P.K. Banerjee, R.B. Wilson. London: Elsevier, 1989. P. 187–204.
5. *Шифрин Е.И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002. 368 с.
6. *Fabrikant V.I.* Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // *Europ. J. Mech. A / Solids*. 2011. V. 30. P. 902–912.
7. *Fabrikant V.I.* General flat crack located in the plane perpendicular to the planes of isotropy in transversely isotropic body // *Acta Mech*. 2015. V. 226. Iss. 10. P. 3289–3306.
8. *Артамонова Е.А., Пожарский Д.А.* О полосовом разрезе в трансверсально изотропном упругом теле // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 768–777.
9. *Пожарский Д.А.* Периодические системы трещин в трансверсально изотропном теле // *Изв. РАН. МТТ*. 2019. № 3. С. 54–63.
10. *Fabrikant V.I.* General flat crack arbitrarily located in the transversely-isotropic body // *Theor. & Appl. Fracture Mech*. 2016. V. 82. P. 69–76.
11. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in generalized material and their relationships // *Intern. J. Fracture*. 2018. V. 212. Iss. 1. P. 41–51.
12. *Александров В.М.* Продольная трещина в ортотропной упругой полосе со свободными границами // *Изв. РАН. МТТ*. 2006. № 1. С. 115–124.
13. *Александров В.М.* Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы // *ПММ*. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 139–149.
14. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* О возможности искривления трещины нормального разрыва в анизотропной плоскости // *Изв. РАН. МТТ*. 2006. № 6. С. 173–184.
15. *Kaprtsov A.V., Shifrin E.I.* Identification of multiple cracks in an anisotropic elastic plate by boundary data // *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. V. 1203. Iss. 1. P. 012029.
16. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah: Bentham, 2010. 1030 p.
17. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Доп. главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
20. *Гольдштейн Р.В., Спектор А.А.* Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // *ПММ*. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
21. *Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // *ПММ*. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1030–1038.

Plane Cracks in a Transversely Isotropic Layer

E. A. Artamonova^a and D. A. Pozharskii^{a,#}

^a Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

[#] e-mail: pozharda@rambler.ru

The mode *I* crack problems are considered for a transversely isotropic elastic layer (mathematical cuts are situated in its middle plane), the outer layer faces are subjected to sliding support. The planes of isotropy are either parallel or perpendicular to the layer faces. By using Fourier integral transforms, the problems are reduced to integro-differential equations with respect to the crack opening, the limiting cases of which are the well-known equations of similar problems for a transversely isotropic full space and for an isotropic layer. The regular asymptotic method is employed for elliptic cracks being effective for a relatively thick layer. It is shown that the domain of applicability of this method is narrowed down together with increasing anisotropy, which can be characterized by the characteristic equation roots (all the roots equal one for an isotropic material). For strip cracks, solutions are obtained in a closed form with the help of special approximations of the integral equations kernel sym-

bols, the relative errors of such approximations diminish together with increasing anisotropy. Calculations have been made for well-known transversely isotropic materials.

Keywords: elasticity theory, transversal isotropy, layer, crack

REFERENCES

1. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of Transversely Isotropic Materials. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. *Pan E., Chen W.* Static Green's Functions in Anisotropic Media. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2015. 356 p.
3. *Wilson W.K.* Finite element methods for elastic bodies containing cracks // In: Mechanics of Fracture. Vol. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by *G.C. Sih*. Leyden: Kluwer, 1973. pp. 484–515.
4. *Raveendra S.T., Cruse T.A.* BEM analysis of problems of fracture mechanics // In: Developments in Boundary Element Methods—5. Industrial Applications of Boundary Element Methods. Eds. *P.K. Banerjee, R.B. Wilson*. London: Elsevier, 1989. pp. 187–204.
5. *Shifrin E.I.* Spatial Problems in Linear Fracture Mechanics (Prostranstvennye zadachi mekhaniki razrusheniya). Moscow: Fizmatlit, 2002. 368 p. (in Russian).
6. *Fabrikant V.I.* Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body // European J. Mech. A / Solids, 2011, vol. 30, P. 902–912.
7. *Fabrikant V.I.* General flat crack located in the plane perpendicular to the planes of isotropy in transversely isotropic body // Acta Mech., 2015, vol. 226, iss. 10, pp. 3289–3306.
8. *Artamonova E.A., Pozharskii D.A.* A strip cut in a transversely isotropic elastic solid // JAMM, 2013, vol. 77, no. 5, pp. 551–558.
9. *Pozharskii D.A.* Periodic crack systems in a transversely isotropic solid // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 709–716.
10. *Fabrikant V.I.* General flat crack arbitrarily located in the transversely-isotropic body // Theor. Appl. & Fract. Mech., 2016, vol. 82, pp. 69–76.
11. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in generalized material and their relationships // Int. J. Fract., 2018, vol. 212, iss. 1, pp. 41–51.
12. *Aleksandrov V.M.* Longitudinal crack in an orthotropic elastic strip with free faces // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 1, pp. 88–94.
13. *Aleksandrov V.M.* Two problems with mixed boundary conditions for an elastic orthotropic strip // JAMM, 2006, vol. 70, no. 1, pp. 128–138.
14. *Goldshstein R.V., Shifrin E.I.* On the possible crooking of a tensile crack in an anisotropic plane // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 140–149.
15. *Kapitsov A.V., Shifrin E.I.* Identification of multiple cracks in an anisotropic elastic plate by boundary data // J. Phys. Conf. Ser., 2019, vol. 1203, iss. 1, pp. 012029.
16. *Fabrikant V.I.* Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah: Bentham, 2010. 1030 p.
17. *Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V.* Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies (Tonkiki kontsentratory napryazhenii v uprugikh telakh). Moscow: Nauka, 1993. 224 p. (in Russian).
18. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 1. Elementary Functions. N.Y.: Gordon and Breach Science Publ., 1986. 798 p.
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon and Breach Science Publ., 1986. 750 p.
20. *Gol'dshstein R.V., Spector A.A.* Variational method of investigation of three-dimensional mixed problems of a plane cut in an elastic medium in the presence of slip and adhesion of its surfaces // JAMM, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 232–239.
21. *Smetanin B.I., Sobol' B.V.* Equilibrium of an elastic layer weakened by plane cracks // JAMM, 1984, vol. 48, no. 6, pp. 757–764.