

УДК 534.1

**АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ МИНДЛИНА–ГЕРМАНА,
ПОГРУЖЕННОМ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГУЮ СРЕДУ**© 2020 г. В. И. Ерофеев^{1,*}, А. В. Леонтьева^{1,**}¹ *Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия***e-mail: erof.vi@yandex.ru****e-mail: aleonav@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.08.2019 г.

После доработки 27.04.2020 г.

Принята к публикации 06.05.2020 г.

Изучается распространение продольных волн в стержне Миндлина–Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду. При рассмотрении различных вариантов соотношения жесткости стержня и жесткости внешней среды, в которую помещен стержень, получено три предельных случая. Показано, что если жесткость внешней среды существенно превосходит жесткость стержня, то эволюционное уравнение представляет собой известное в нелинейной динамике уравнение Островского. Уравнение не имеет точных решений, но допускает качественное исследование при равенстве нулю старшей производной. В этом случае найдено и проанализировано решение в виде нелинейной периодической стационарной волны. Если жесткость внешней среды существенно уступает жесткости стержня, то эволюционным уравнением является уравнение, отличающееся от уравнения Островского в нелинейной части. Показано, что в этом случае в стержне возможно распространение солитонов классического профиля. Отмечено, что если жесткости внешней среды и стержня имеют один порядок, то нелинейные стационарные волны формироваться не могут.

Ключевые слова: продольная волна, модель Миндлина–Германа, нелинейно-упругая среда, эволюционное уравнение Островского, периодическая волна, солитон

DOI: 10.31857/S0032823520040049

Введение. Классическая модель Д. Бернулли (техническая теория) предполагает, что при описании продольных колебаний стержня можно пренебречь потенциальной энергией сдвиговых деформаций и кинетической энергией поперечных движений частиц стержня. Согласно этой теории линейные волны в стержне распространяются со скоростью $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ (где E – модуль Юнга; ρ – плотность материала), не зависящей от частоты. Следовательно, сделанные предположения не позволяют описать геометрическую дисперсию продольных волн, наблюдаемую экспериментально [1–6].

Математические модели, предложенные Рэлеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом (уточненные теории) [7, 8], устраняют этот недостаток. Из одномерных моделей дисперсию продольных волн в широком частотном диапазоне наиболее точно описывает модель Миндлина–Германа [9–12]. Эта модель получила одобрение М. Био – одного из крупнейших механиков середины 20-го века [13]. Она включена во многие монографии и учебные пособия (см., например, [7, 8, 14–17]). Получены [18–20] аналитические выражения для отклика стержня модели Миндлина–Германа на

продольный удар. Проанализирована [21] связь между гипотезами теории Миндлина–Германа и двухточечной Паде-аппроксимацией.

Модель Миндлина–Германа успешно применяется при построении спектральных конечно-элементных моделей для анализа динамических процессов в композитах и функционально-градиентных материалах [22–28].

Выявлено [29, 30], что составной стержень, совершающий продольные колебания, по своим дисперсионным свойствам эквивалентен модели Миндлина–Германа.

Учет нелинейности связей между деформациями и градиентами перемещений (геометрическая нелинейность), деформациями и напряжениями (физическая нелинейность) приводит к нелинейным обобщениям уточненных математических моделей стержней.

Была предложена [31] методика сведения трехмерных уравнений нелинейной теории упругости к приближенным уравнениям теории стержней, основанная на аппроксимации перемещений в поперечном сечении стержня и применении вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Получены нелинейные уравнения, обобщающие модели Бишопа и Миндлина–Германа.

Изучались [32, 33] особенности распространения нелинейных стационарных волн деформации (периодических волн и солитонов) в стержне Миндлина–Германа, модель которого обобщена [31] путем учета геометрической и физической нелинейностей. Получены зависимости между основными параметрами таких волн (амплитудой, длиной волны, скоростью ее распространения и коэффициентом нелинейных искажений формы волны). Показано, что наряду с классическим поведением солитонов (волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью), может наблюдаться и их аномальное поведение (амплитуда волны уменьшается с ростом скорости).

В настоящей работе изучается волновая динамика стержня Миндлина–Германа, погруженного в нелинейно-упругую среду.

1. Математическая модель. Система уравнений, описывающая распространение продольных волн в стержне (модель Миндлина–Германа), погруженном в нелинейно-упругую среду, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + h_1 u + h_2 u^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}{a^2 \rho} w + \frac{4\kappa_2^2 \lambda}{a\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – продольное и поперечное смещение частиц стержня, $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в материале стержня, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговых волн ($c_\tau < c_l$), a – радиус поперечного сечения стержня, ρ – плотность материала стержня, λ , μ – коэффициенты Ламе, h_1 , h_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругую среду, κ_1 , κ_2 – корректирующие коэффициенты, выбираемые из условия близости дисперсионных веток данной модели (Миндлина–Германа) и точного решения Похгаммера–Кри [3, 7].

Коэффициент κ_1 определяется из уравнения [7] $4 \left[\left(1 - \frac{c_\tau^2}{c_l^2} \kappa_1^2 \right) \right]^{1/2} = (2 - \kappa_1^2)^2$ и принимает значения $0 < \kappa_1 < 1$; коэффициент κ_2 определяется из соотношения $\kappa_2^2 = \frac{\zeta^2 c_l^2}{8(c_l^2 - c_\tau^2)}$, где ζ – низший корень уравнения $\frac{c_l^2}{2c_\tau^2} \zeta J_0(\zeta) = J_1(\zeta)$, где J_0 , J_1 – функции Бесселя.

Для описания нелинейно-упругой среды использована параболическая зависимость Герстнера, содержащая, наряду с линейным слагаемым по деформации, квадратичное слагаемое [34]. Выбор такой зависимости обусловлен экспериментально установленным фактом, что в спектре интенсивных волн деформации “растяжение—сжатие” формируется, в первую очередь, вторая гармоника [35, 36]. Продольные волны в стержне аналогичны симметричным волнам Лэмба в слое или волнам Похгаммера—Кри в цилиндре. Движение частиц при распространении волны происходит симметрично относительно срединной линии стержня, преобладает продольная компонента вектора перемещений, в сечениях, перпендикулярных срединной линии, возникают напряжения одного знака. Формирование второй гармоники не может быть описано кубической параболой, часто применяемой в нелинейной механике и хорошо описывающей интенсивные сдвиговые или изгибные волны.

Нелинейность упругой среды принято подразделять на “жесткую” ($h_2 > 0$, или, по терминологии Рейснера, — “упрочняющееся” (“hardening”) основание [37]) и “мягкую” ($h_2 < 0$, или “размягченное” (“softening”) основание [37]).

В первом случае с увеличением деформации увеличивается добавочный вклад в напряжение, во втором случае с увеличением деформации такой вклад уменьшается.

Система уравнений (1.1), (1.2) может быть сведена к одному уравнению относительно продольного смещения частиц u :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{4(\lambda + \mu)}{a} + \frac{\rho h_1}{2\kappa_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{4(\lambda + \mu)c_l^2}{a\lambda} + \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho h_1}{2\kappa_2^2 \lambda} - \frac{4\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\rho}{2\kappa_2^2 \lambda} (c_l^2 + \kappa_1^2 c_\tau^2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{2\kappa_2^2 \lambda} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho c_l^2}{2\kappa_2^2 \lambda} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \\ & + \frac{\rho h_2}{2\kappa_2^2 \lambda} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa_1^2 c_\tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u^2 + \frac{4(\lambda + \mu)h_1}{a\lambda} u + \frac{4(\lambda + \mu)h_2}{a\lambda} u^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если в качестве характерных величин смещения, координаты и времени принять

$$U = u/u_0, \quad z = x/X, \quad \tau = t/T$$

$$X^2 = \varepsilon \frac{\kappa_1^2 c_\tau^2}{h_1} (m_1 + m_2 - m_3), \quad T^2 = \varepsilon \frac{1}{h_1} (1 + m_1),$$

где $m_1 = \frac{a^2 \rho h_1}{8\kappa_2^2 (\lambda + \mu)}$, $m_2 = \frac{c_l^2}{\kappa_1^2 c_\tau^2}$, $m_3 = \frac{\kappa_2^2 \lambda^2}{\kappa_1^2 c_\tau^2 \rho (\lambda + \mu)}$ — безразмерные параметры, ε — малый параметр ($\varepsilon \ll 1$), то уравнение (1.3) в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \\ & + a_6 U + a_7 U^2 + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{m_1}{\varepsilon (1 + m_1)^2}, \quad a_4 = \frac{(1 + m_2) m_1}{\varepsilon (1 + m_1) (m_1 + m_2 - m_3)} \\ a_5 &= \frac{m_2 m_1}{\varepsilon (m_1 + m_2 - m_3)^2}, \quad a_6 = \varepsilon, \quad a_7 = \varepsilon \frac{u_0 h_2}{h_1} \\ a_8 &= \frac{u_0 h_2}{h_1} \frac{m_1}{(1 + m_1)}, \quad a_9 = \frac{u_0 h_2}{h_1} \frac{m_1}{(m_1 + m_2 - m_3)} \end{aligned}$$

Полагая далее нелинейность малой, рассмотрим различные случаи соотношений жесткости стержня и жесткости внешней среды, в которую помещен стержень.

Если жесткость внешней среды существенно превосходит жесткость стержня ($h_1 \gg c_m^2/a^2$, где $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ при этом $c_\tau < c_m < c_l$ и $c_m^2 = c_l^2 - c_\tau^2$) (“жесткая” среда), то можно считать, что $1/(1 + m_1) \sim \varepsilon^2$, нелинейность при этом полагаем малой величиной первого порядка. Ограничиваясь в уравнении (1.4) слагаемыми первого порядка малости, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_6 U + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0 \quad (1.5)$$

В уравнении (1.5) отсутствует пропорциональное коэффициенту a_7 слагаемое более высокого порядка малости по ε .

Если жесткость внешней среды существенно уступает жесткости стержня ($h_1 \ll c_m^2/a^2$) (“мягкая” среда), то будем считать, что $m_1 \sim \varepsilon^2$, нелинейность, как и прежде, первого порядка малости. В этом случае безразмерное уравнение (1.4), с учетом слагаемых до первого порядка малости включительно, примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_6 U + a_7 U^2 = 0 \quad (1.6)$$

В отличие от уравнения (1.5) в последнем уравнении присутствует слагаемое пропорциональное a_7 , а слагаемые пропорциональные коэффициентами a_8 и a_9 оказываются более высокого порядка малости, чем первое.

Если жесткости внешней среды и стержня имеют один порядок ($a^2 h_1 / c_m^2 \sim 1$), а среди нелинейных слагаемых учесть только самые крупные (меньшего порядка малости), то уравнение (1.4) будет иметь вид:

$$a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} + a_5 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U^2) - a_9 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U^2) = 0 \quad (1.7)$$

2. Эволюционное уравнение и его анализ в случае “жесткой” внешней среды. Перейдем в уравнении (1.5) в движущуюся систему координат $\xi = z - c\tau$, $\theta = \varepsilon\tau$ ($c^2 = 1$, $\varepsilon \ll 1$). Получим в первом приближении по ε эволюционное уравнение относительно перемещения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + d_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + d_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) - d_3 U = 0, \quad (2.1)$$

где коэффициенты уравнения равны

$$d_1 = \frac{1}{\varepsilon c} (a_9 - a_8), \quad d_2 = \frac{1}{2\varepsilon c} (a_4 - a_3 - a_5), \quad d_3 = \frac{a_6}{2\varepsilon c}$$

Заметим, что уравнение (2.1) совпадает с нелинейным эволюционным уравнением для внутренних волн во вращающемся океане:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{3c_0}{2h} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{c_0 \beta}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\Omega^2}{2c_0} U, \quad (2.2)$$

где U – возмущение свободной поверхности жидкости, h – глубина, c_0 – скорость распространения возмущения, β – параметр высокочастотной дисперсии, Ω – параметр Кориолиса, характеризующий вращение жидкости.

Уравнение (2.2) было впервые выведено в 1978 г. Л.А. Островским [38] и называется уравнением Островского [39–41]. При $\Omega = 0$ уравнение (2.2) сводится к уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ), но, в отличие от последнего, оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния и не имеет точных солитонных решений.

Было показано [41], что уравнение (2.2) имеет отношение к широкому кругу нелинейных систем, характеризующихся наличием бездисперсионной полосы в спектре частот, разделяющей области с низко- и высокочастотной дисперсиями.

Уравнение Островского не имеет точных решений, но допускает анализ качественными методами исследования динамических систем [39, 40]. Полученное выше уравнение (2.1) далее будет анализироваться аналогичным образом. Оно содержит два дисперсионных слагаемых, из которых второе вносит наибольший вклад в дисперсионный процесс ($d_2/d_3 \sim \varepsilon^2$), поэтому первым из них можно пренебречь.

Рассмотрим частный случай эволюционного уравнения (2.1), когда $d_2 = 0$. Уравнение для стационарных волн запишется в виде:

$$U_{\chi\chi} + \frac{d_3}{v}U - \frac{d_1}{v}(UU_{\chi})_{\chi} = 0, \quad (2.3)$$

где $\chi = \xi - v\theta$, v – скорость нелинейной волны, считаем, что волна распространяется в положительном направлении оси ξ . Уравнение (2.3) описывает колебания ангармонического осциллятора и содержит два типа квадратичной нелинейности. Запишем его в следующем виде:

$$(U_{\chi})^2 = \frac{d_3(2d_1U - 3v)U^2 + E}{3(d_1U - v)^2}, \quad (2.4)$$

где E – константа интегрирования и имеет смысл полной энергии системы.

Фазовый портрет изображен на рис. 1. Видно, что на фазовой плоскости есть замкнутые траектории. Области запрещенных движений $U = \frac{v}{d_1}$, $(U_{\chi})^2 = \frac{2d_3}{3d_1}U + \frac{d_3v}{3d_1^2}$ на рисунке отмечены штриховыми линиями. Знак коэффициента d_1 не влияет, а d_3 влияет на существование замкнутых траекторий. При смене знака коэффициента d_1 фазовый портрет зеркально отображается. Увеличение значения коэффициента сужает область существования замкнутых траекторий на фазовой плоскости. При отрицательных значениях коэффициента d_3 замкнутые траектории отсутствуют на фазовой плоскости (рис. 2).

Графическое изображение правой части уравнения (2.4) $f = f(U, E)$ при $d_3 = 1/2$, $d_1 > 0$ и различных значениях константы E показано на рис. 3. Когда энергия системы

меняется в пределах $0 < E < \frac{d_3v^3}{d_1^2}$ ветвь кривой, имеющая точку максимума, пересекает ось абсцисс. При этих же значениях энергии на фазовой плоскости (рис. 1) возникают замкнутые концентрические фазовые траектории с центром в начале координат, которые соответствуют квазигармоническим (вблизи положения равновесия) и сильно нелинейным (вблизи вертикальной асимптоты) колебаниям осциллятора. Что, в свою очередь, говорит о наличии периодических волн в рассматриваемой системе.

Периодические решения уравнения (2.3) представляются через эллиптические интегралы [42] и имеют следующий вид:

$$\sqrt{\frac{6d_1}{d_3(U_1 - U_3)}} \left(\left(U_1 - \frac{v}{d_1} \right) F(\varphi, k) - (U_1 - U_3) E(\varphi, k) \right) = \pm \chi \quad (2.5)$$

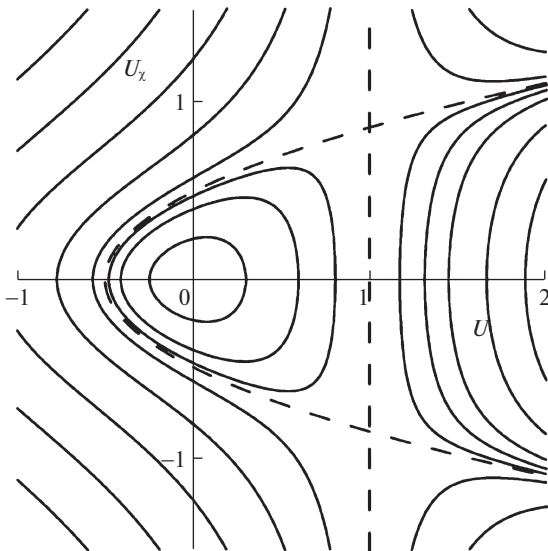


Рис. 1. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (2.3) ($d_1 > 0, d_3 > 0$).

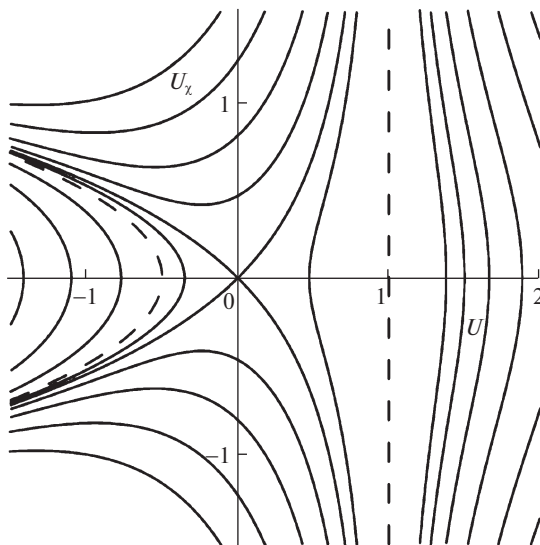


Рис. 2. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (2.3) ($d_1 > 0, d_3 < 0$).

$F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода, амплитуда и модуль которых равны

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{U - U_3}{U_2 - U_3}}, \quad k = \sqrt{\frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_3}}$$

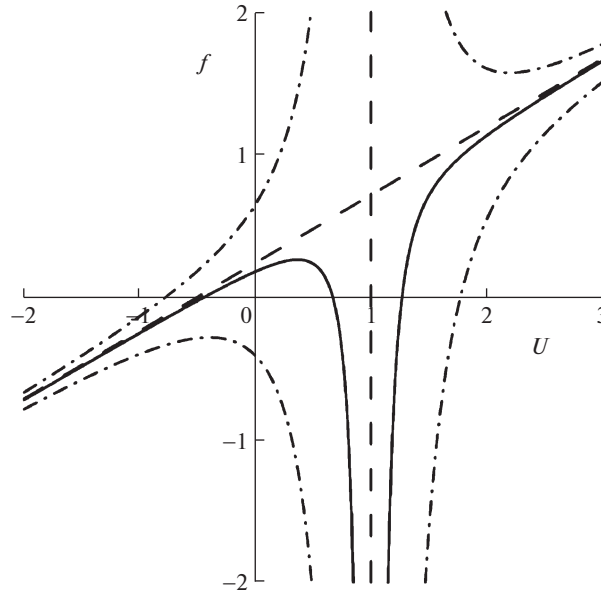


Рис. 3. Зависимости кривой f при фиксированных значениях E : E_1 (штрихпунктир, ниже наклонной асимптоты), E_2 (сплошная), E_3 (штрихпунктир, выше наклонной асимптоты), где $E_1 < E_2 < E_3$, причем $E_1 < 0, 0 < E_2 < \frac{d_3 v^3}{d_1^2}, E_3 > \frac{d_3 v^3}{d_1^2}$.

Здесь U_1, U_2, U_3 – корни кубического уравнения $U^3 - \frac{3v}{2d_1}U^2 + \frac{E}{2d_1d_3} = 0$, которые удовлетворяют неравенству $U_1 > U_2 > U_3$ и согласно тригонометрической формуле Виета имеют вид:

$$U_{1(+),2(-)} = \frac{v}{d_1} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\phi}{3} \right) \right), \quad U_3 = \frac{v}{d_1} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{\phi}{3} \right) \right),$$

где $\phi = \arccos \left(\frac{2Ed_1^2}{d_3v^3} - 1 \right)$.

Профиль решения (2.5) изображен на рис. 4. Видно, что колебания сильно отличаются от гармонических колебаний. Чем ближе на оси (рис. 3) расположены второй и третий корни (но не равны), тем больше колебания будут похожи на гармонические колебания, при этом замкнутая траектория на фазовой плоскости находится около положения равновесия (рис. 1), а коэффициент нелинейных искажений стремится к нулю. Чем ближе на оси расположены первый и второй корни (но не равны), тем более нелинейными являются колебания: верхние пики (вблизи точек максимума) на рис. 4 будут более острыми (т.е. радиус кривизны в точках максимума кривой уменьшается). При этом замкнутая траектория на фазовой плоскости находится рядом с вертикальной асимптотой, а коэффициент нелинейных искажений стремится к единице.

Длина периодических волн вычисляется по формуле

$$\Lambda = \sqrt{\frac{6d_1}{d_3(U_1 - U_3)}} \left(\left(U_1 - \frac{v}{d_1} \right) K(k) - (U_1 - U_3) E(k) \right),$$

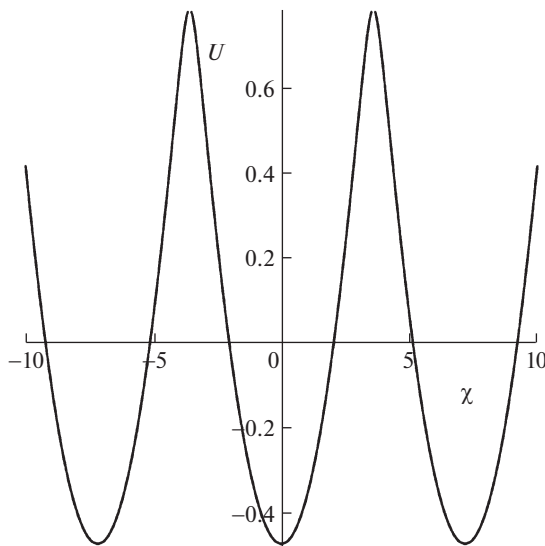


Рис. 4. Профиль периодических решений $U(\chi)$.

где $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы. Амплитуду волн можно определить как разницу корней $A = U_2 - U_3$. Для фиксированных начальных условий $U(0) = U_0$, $U_\chi(0) = 0$ зависимости длины волны и ее амплитуды от параметра d_1 представлены на рис. 5, где параметр меняется в пределах $0 < d_1 < \frac{v}{U_0}$. Если значение d_1 близко к нулю, то длина и амплитуда волны (с квазигармоническим профилем) принимают наибольшие значения $\Lambda = 2\pi\sqrt{v/d_3}$, $A = 2U_0$. Если значение параметра стремится к своей верхней границе, то длина волны и амплитуда (профиль сильно нелинейный) минимальны $\Lambda = 6\sqrt{v/d_3}$, $A = \frac{3}{2}U_0$. При фиксированном значении d_1 максимальная амплитуда периодических волн ограничена величиной $A < \frac{3v}{2d_1}$.

Если учесть, что нелинейность в данной системе слабая ($d_1 \sim \varepsilon^2$), то возникающие периодические волны будут квазигармоническими.

3. Эволюционное уравнение и его анализ в случае “мягкой” внешней среды. Перейдем в уравнении (1.6) в движущуюся систему координат $\xi = z - ct$, $\theta = \varepsilon t$ ($c^2 = 1$). В первом приближении по ε получим следующее эволюционное уравнение относительно перемещения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + d_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) - d_2 U - d_3 U^2 = 0, \quad (3.1)$$

здесь коэффициенты имеют вид

$$d_1 = \frac{1}{2\varepsilon c} (a_4 - a_3 - a_5), \quad d_2 = \frac{a_6}{2\varepsilon c}, \quad d_3 = \frac{a_7}{2\varepsilon c}$$

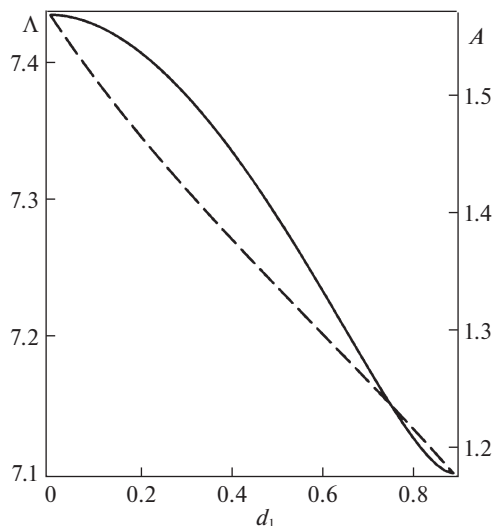


Рис. 5. Зависимости $\Lambda(d_1)$ (сплошная) и $A(d_1)$ (штриховая).

Уравнение (3.1) под знаком производной содержит линейные слагаемые уравнения КдВ. Линейная часть полученного уравнения совпадает с уравнением Островского, отличие составляет нелинейная часть уравнения. Нелинейное слагаемое в уравнении (3.1) также второго порядка, но не содержит производных, его можно отнести к возмущающей части уравнения и назвать нелинейным возмущением. Здесь уже оба дисперсионных слагаемых в равной степени ($d_1/d_2 \sim 1$) играют роль в процессе расщепления фронта волны.

В переменных бегущей волны, уравнение (3.1) принимает вид:

$$U_{xxxx} - \frac{v}{d_1} U_{xx} - \frac{d_2}{d_1} U - \frac{d_3}{d_1} U^2 = 0, \quad (3.2)$$

где v – скорость нелинейной стационарной волны.

Используя метод простейших уравнений [43], находим точное частное решение уравнения (3.2). Метод применяется для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений и позволяет строить решения исходного уравнения на основе известных решений простейших уравнений. В качестве простейших уравнений могут выступать уравнения Риккати, Якоби и Вейерштрасса. Решение уравнения (3.2) имеет вид:

$$U(\chi) = \frac{1}{338d_1d_3} \left(105v^2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{13d_1}} \chi \right) - 169d_1d_2 - 36v^2 \right) \quad (3.3)$$

Здесь скорость нелинейной волны определяется алгебраическим уравнением четвертого порядка

$$\left(\frac{6}{13} v \right)^4 - d_1^2 d_2^2 = 0,$$

а в качестве простейшего уравнения используем уравнение Риккати.

Поскольку коэффициент d_2 всегда положителен ($d_2 = 1/(2c) > 0$), то знак скорости v определяется знаком коэффициента d_1 . Физический интерес представляют два реше-

ния уравнения (3.2), где скорость равна $v_{(+,+)}$ и $v_{(-,-)}$ ($v = \pm \frac{13}{6} \sqrt{\pm d_1 d_2}$), соответствующие решения (3.3) имеют вид:

$$U_1(\chi) = \frac{d_2}{d_3} \left(\frac{35}{24} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \chi \right) - 1 \right) \quad (3.4)$$

$$U_2(\chi) = -\frac{35d_2}{24d_3} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \chi \right) \quad (3.5)$$

Решение U_1 имеет смысл при $d_1 > 0$, решение U_2 – при $d_1 < 0$. Эти решения имеют симметричный колоколообразный профиль (рис. 6). Солитон типа (3.4) имеет смещение $(-d_2/d_3)$ вдоль вертикальной оси, солитон типа (3.5) без смещения. Полярность солитонов зависит от знака коэффициента при нелинейном слагаемом (d_3). При жесткой нелинейности среды ($d_3 > 0$), первый солитон имеет положительную полярность и отрицательное смещение, второй солитон отрицательной полярности. При мягкой нелинейности среды ($d_3 < 0$), второй солитон имеет положительную полярность, а первый солитон отрицательной полярности с положительным смещением. Амплитуда

и ширина солитонов равны $A = \frac{35d_2}{24|d_3|}$, $\Delta = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{|d_1|}{d_2}}$.

В безразмерных параметрах задачи коэффициент d_1 принимает вид:

$$d_1 = \frac{m_1(m_2 - m_3 - 1)(m_1 m_2 + m_3 - m_1)}{2\epsilon c(1 + m_1)^2(m_1 + m_2 - m_3)^2},$$

поскольку $m_2 - 1 > 0$, то знак d_1 определяется множителем $m_2 - m_3 - 1$, который больше нуля, т.к. $\lambda^2(1 - \kappa_2^2) + \lambda\mu(3 - \kappa_1^2) + \mu^2(2 - \kappa_1^2) > 0$. Значит, в данном случае смысл имеет только решение U_1 . Амплитуда, ширина и скорость солитона запишутся как:

$$A = \frac{35d_2}{24|d_3|}, \quad \Delta = 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{|d_1|}{d_2}}, \quad v = \frac{13}{6} \sqrt{d_1 d_2}$$

При увеличении параметра нелинейной жесткости амплитуда солитона падает, ширина и скорость остаются постоянными. График зависимости амплитуды от скорости нелинейной волны при изменении параметра линейной жесткости изображен на рис. 7. При увеличении линейной жесткости амплитуда солитона растет линейно, ширина и скорость ведут себя одинаково: сначала растут, достигая максимума, затем падают.

В рассматриваемом случае наряду с уединенными волнами существуют и периодические волны. На основе метода простейших уравнений [43], с использованием функции Вейерштрасса, находим периодические решения уравнения (3.2), соответствующие стационарным периодическим волнам.

Известно, что эллиптическая функция Вейерштрасса $R(\chi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению [42]:

$$(R_\chi)^2 = 4R^3 - B_0 R - B_1, \quad (3.6)$$

где B_0, B_1 – инварианты функции Вейерштрасса. Решение этого уравнения (при $B_0 > 0$) может быть выражено через функцию эллиптического косинуса Якоби

$$R(\chi) = R_2 - (R_2 - R_3) \operatorname{cn}^2(\sqrt{R_1 - R_3} \chi, k), \quad (3.7)$$

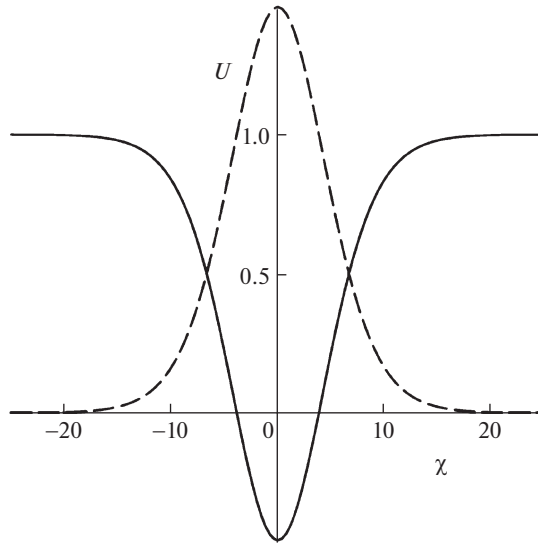


Рис. 6. Зависимости $U_1(\chi)$ (сплошная), $U_2(\chi)$ (штриховая), $d_3 < 0$.

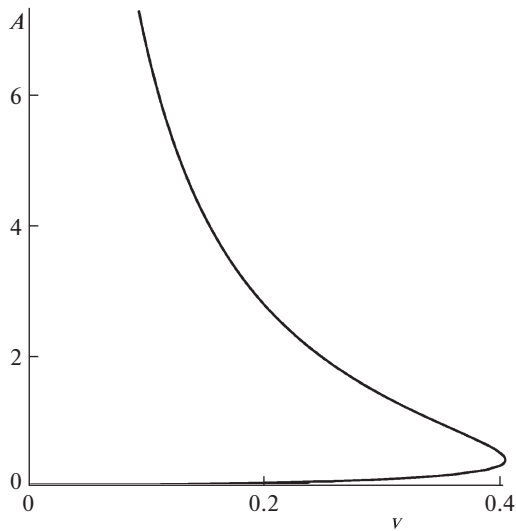


Рис. 7. Зависимость $A(\nu)$.

где $k = \sqrt{\frac{R_2 - R_3}{R_1 - R_3}}$ – модуль эллиптической функции, R_1, R_2, R_3 – действительные корни уравнения, являющегося правой частью уравнения (3.6), которые удовлетворяют соотношению $R_3 < R_2 < R_1$.

Поскольку решение $U(\chi)$ имеет полюс четвертого порядка, а решение $R(\chi)$ имеет полюс второго порядка, то решение будет иметь следующий вид

$$U(\chi) = b_0 R^2 + b_1 R + b_2, \quad (3.8)$$

где коэффициенты b_i ($i = 0, 1, 2$) и B_j ($j = 0, 1$) равны

$$b_0 = \frac{840d_1}{d_3}, \quad b_1 = -\frac{140}{13} \frac{v}{d_3}, \quad b_2 = -\frac{31}{1014} \frac{v^2}{d_1 d_3} - \frac{84d_1}{d_3} B_0 - \frac{1}{4d_3}$$

$$B_0 = \frac{780}{7} \frac{d_1}{v} B_1 + \frac{31}{42588} \frac{v^2}{d_1^2}$$

$$B_1 = \frac{1}{11232} \frac{v}{d_1^2} \left(-\frac{4}{169} \frac{v^2}{d_1} \pm \frac{3}{5} \sqrt{\frac{7}{23} \left(1 - 1296 \left(\frac{2}{169} \frac{v^2}{d_1} \right)^2 \right)} \right)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой Виета, находим выражения для параметров R_i ($i = 1, 2, 3$), правой части решения (3.7):

$$R_{1,2} = -\sqrt{\frac{B_0}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\Phi}{3}\right), \quad R_3 = -\sqrt{\frac{B_0}{3}} \cos\left(\frac{\Phi}{3}\right),$$

где R_1 соответствует выражение с верхним знаком.

Скорость нелинейной волны изменяется в пределах $v_-^* \leq v \leq v_+^*$ ($v_{\pm}^* = \pm \frac{13}{12} \sqrt{2d_1}$) с учетом того, что $d_1 > 0$. Профили решения (3.8) при различных значениях скорости изображены на рис. 8, 9. Крайние значения скоростей соответствуют предельным состояниям системы. Когда скорость нелинейной волны равна $v = v_-^*$, точка минимума потенциальной функции уравнения (3.6) находится в особой точке “центр” фазовой плоскости, а при стремлении скорости к этому значению фазовые траектории лежат вблизи центра, т.е. в системе существуют (распространяются) квазигармонические волны малой амплитуды (рис. 8). Когда скорость нелинейной волны равна $v = v_+^*$, точка максимума потенциальной функции уравнения (3.6) совпадает с особой точкой типа “седло” на фазовой плоскости. Решение (U_1) в этом случае найдено с помощью уравнения Риккати. При стремлении скорости к значению $v \rightarrow v_+^*$ фазовые траектории расположены внутри и вблизи сепаратрисной петли, значит, в системе имеют место периодические сильно нелинейные (кноидальные) волны (рис. 8).

Отрицательные скорости нелинейной волны означают ее распространение в противоположную сторону. Периодические волны с нулевой скоростью означают периодические колебания частиц среды, но отсутствует распространение возмущения.

При положительных скоростях фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям расположены внутри сепаратрисной петли. При отрицательных скоростях фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям разной амплитуды, находятся вблизи седловой точки.

Из графиков (рис. 8, 9) видно, что функции амплитуды $A(v)$ и длины волны $\Lambda(v)$ от скорости не являются монотонными функциями.

4. Анализ случая, когда жесткости внешней среды и стержня являются величинами одного порядка. Отыскивая решение уравнения (1.7) в виде бегущей стационарной волны $U = U(\chi)$, где $\chi = z - v\tau$, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое дважды проинтегрируем по переменной χ . Если константы интегрирования считать равными нулю, то уравнение преобразуется к виду:

$$U_{\chi\chi} + bU^2 = 0, \quad (4.1)$$

где $b = \frac{a_8 v^2 - a_9}{a_3 v^4 - a_4 v^2 + a_5}$, v – скорость нелинейной волны.

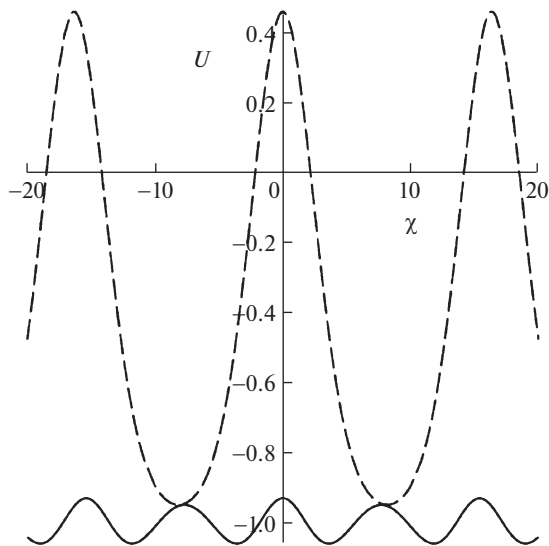


Рис. 8. Зависимости $U(\chi)$ при различных значениях ν ($\nu \rightarrow \nu_{\pm}^*$ – сплошная, $\nu \rightarrow \nu_{\pm}^*$ – штриховая), $d_3 > 0$.

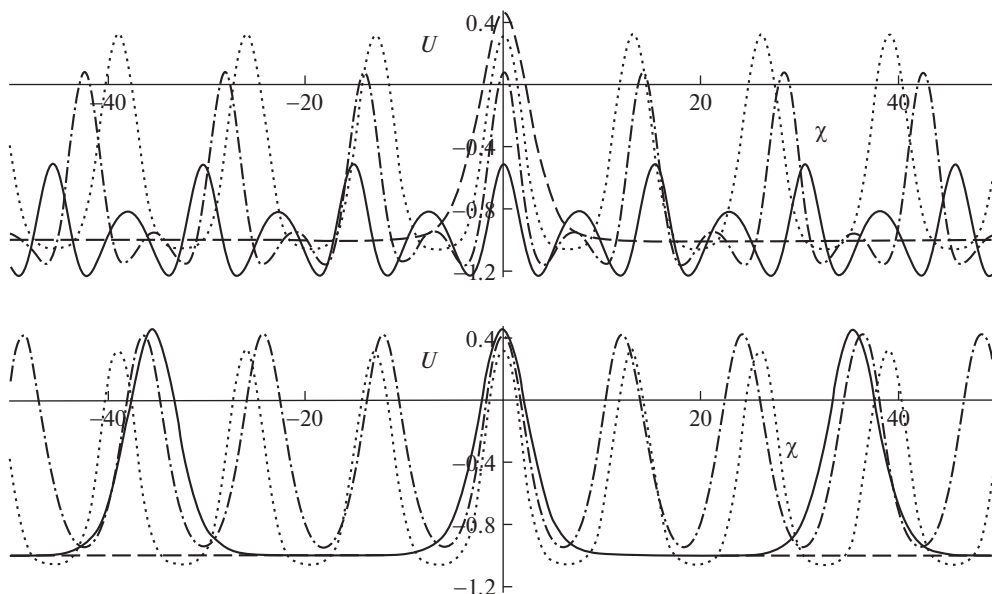


Рис. 9. Зависимости $U(\chi)$ при различных значениях ν ($d_3 > 0$); при $\nu = \nu_1$ – сплошная и $\nu = \nu_2$ – штрихпунктир (на верхнем рисунке); при $\nu = \nu_3$ – штрихпунктир и $\nu = \nu_4^* = 0$ – сплошная (на нижнем рисунке); при $\nu = 0$ – пунктир ($\nu_{\pm}^* < \nu_1 < \nu_2 < 0 < \nu_3 < \nu_4^*$); $U(\chi, \nu = \nu_4^*) = U_1(\chi)$ (штриховая).

Последнее уравнение можно еще один раз проинтегрировать

$$(U_{\chi})^2 = C_0 - \frac{2}{3} b U^3$$

и построить фазовый портрет (рис. 10). Видно, что на фазовом портрете нет замкнутых фазовых траекторий. Уравнение (4.1) не имеет ограниченных решений.

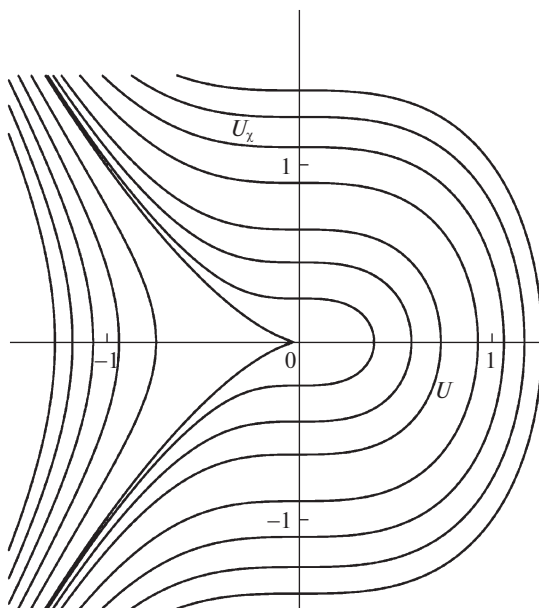


Рис. 10. Фазовый портрет (U, U_x) уравнения (4.1).

Заключение. Показано, что нелинейность внешней упругой среды влияет на существование локализованных и периодических волн, распространяющихся в стержне Миндлина–Германа с постоянной скоростью и без изменения своей формы (нелинейные стационарные волны). Тип нелинейности (мягкая, жесткая) влияет на полярность уединенной волны, распространяющейся в стержне, в случае, если жесткость среды существенно меньше жесткости стержня. Здесь равнозначные по величине (нелинейность того же порядка малости, что и дисперсия) и противоположные по действию на фронт волны, нелинейные и дисперсионные процессы формируют волну солитонного типа в виде колокола. Если жесткость среды значительно больше жесткости стержня, то формирование нелинейных стационарных локализованных волн невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10073-мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 4. С. 791–794.
2. Зверев В.А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука // Акуст. ж. 1956. Т. 2. № 2. С. 142–145.
3. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х. Дж., Руннергер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках // Проблемы механики. 1961. Вып. 3. С. 25–90.
4. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barre de Hopkinson // J. Physique IV. 1991. V. 1. P. 403–410.
5. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests // Int. J. Impact Engng. 1994. V. 15. P. 723–733.

6. Брагов А.М., Константинов А.Ю., Медведкина М.В. Дисперсия волн в разрезных стержнях Гопкинсона при динамических испытаниях хрупких материалов // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 6 (1). С. 158–162.
7. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
8. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
9. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Proc. 1 st U.S. National Congr. Appl. Mech. ASME. New York. 1952. P. 187–191.
10. Mindlin R.D., Herrmann G. Corrections // Proc. 2 nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME. New York. 1954. P. 233.
11. Mindlin R.D., Herrmann G. A One-Dimensional Theory of Compressional Waves in an Elastic Rod. New York: Springer, 1989. V. 1. P. 243–248.
12. Herrmann G. Forced motions of elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1954. V. E21. № 3. P. 221–224.
13. Biot M. Dynamics of viscoelastic anisotropic media // Reprinted from Proc. Fourth Midwestern Conf. Solid Mech. at Purdue Univ. 1955. 16 p.
14. Doyle J.F. Wave Propagation in Structure. New York: Springer, 1989. 258 p.
15. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
16. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность, М.: Физматлит, 2002. 208 с.
17. Galal Krishnan S., Narendar S. Wave Propagation in Nanostructures, Cham: Springer, 2013. 358 p.
18. Кукуджанов В.Н. Асимптотические решения уточненных уравнений упругих и упруго-пластических волн в стержнях // Волны в неупругих средах, под ред. Ю.Н. Работнова. Кишинев: АН МССР, 1970. С. 119–129.
19. Исаев В.И. Продольный удар по стержню на основе теории Миндлина–Германа // Вестн. МИИТ. 2005. № 12. С. 93–98.
20. Исаев В.И. Моделирование откликов механических систем // Мир транспорта. 2007. № 1. С. 26–30.
21. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Math. Probl. in Engng. 2010. Article ID 986242. 35 p.
22. Galal Krishnan S., Mahapatra D.R. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams // Compos. Struct. 2003. V. 59. № 1. P. 67–88.
23. Anderson S.P. Higher-order rod approximation for the propagation of longitudinal stress waves in elastic bars // J. Sound & Vibr. 2006. V. 290. № 1–2. P. 290–308.
24. Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M. Longitudinal wave propagation. Part I – Comparison of rod theories // J. Sound & Vibr. 2006. V. 295. № 3–5. P. 461–478.
25. Guven U. Two mode Mindlin-Herrmann rod solution based on modified couple stress theory // ZAMM. J. Appl. Math. & Mech. 2014. V. 94. № 12. P. 1011–1016.
26. Chunbiao Gan, Yimin Wei, Shixi Yang Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // J. Sound & Vibr. 2014. V. 333. № 2. P. 434–445.
27. Kim S., Lee U. Effects of delamination on guided waves in a symmetric laminated composite beam // Math. Probl. in Engng. 2014. Article ID 956043. 12 p.
28. Chunhua Jin, Xinwei Wang Dynamics analysis of functional graded material bars by using novel weak form quadrature element method // J. Vibroeng. 2014. V. 16. № 6. P. 2790–2799.
29. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Применение уточненных стержневых моделей для описания распространения упругих волн в слоистых конструкциях // Акустика неоднородных сред. Сб. тр. семинара научной школы проф. С.А. Рыбака. 2005. С. 32–37.
30. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Семерикова Н.П. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (1). С. 130–133.
31. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные модели продольных колебаний стержней // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т им. 300-летия Воссоединения Украины с Россией, 1984. Вып. 32. С. 78–82.

32. Ерофеев В.И., Ключева Н.В., Семерикова Н.П. Нелинейные упругие волны в стержне Миндлина–Германа // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. 1999. Т. 7. № 4. С. 35–47.
33. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках // Акустич. ж. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
34. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
35. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
36. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.
37. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation // Stud. Appl. Math. 1970. V. XLIX. № 1. P. 45–57.
38. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.
39. Гандариас М.Л., Брузон М.С. Симметричный анализ и точные решения для некоторых уравнений Островского // ТМФ. 2011. Т. 168. № 1. С. 49–64.
40. Stepanyants Y.A. On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // Chaos, Solitons & Fractals. 2006. V. 28. P. 193–204.
41. Степанянц Ю.А. Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения) // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 1. С. 20–42.
42. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. Петербург: БХВ, 2011. 1182 с.
43. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

Anharmonic Waves in a Mindlin–Herman Rod Immersed in a Nonlinearly Elastic Medium

V. I. Erofeev^{a,#} and A. V. Leonteva^{a,##}

^a Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

[#] e-mail: erof.vi@yandex.ru

^{##} e-mail: aleonav@mail.ru

Propagation of longitudinal waves in a Mindlin–Hermann’s rod immersed in a nonlinearly elastic medium is studied. By consideration of various options of a ratio of a rigidity of a rod and rigidity of the external medium in which the rod is placed, three limiting cases are received. It is shown that if the rigidity of the external medium significantly surpasses a rigidity of a rod, then the evolutionary equation represents Ostrovsky’s equation, known in nonlinear dynamics. The equation has no exact decisions, but allows a qualitative research at equality to zero senior derivative. In this case the solution in the form of a nonlinear periodic stationary wave is found and analyzed. If the rigidity of the external medium significantly concedes to a rigidity of a rod, then the evolutionary equation is the equation different from Ostrovsky’s equation in a nonlinear part. It is shown that in this case in a rod propagation of solitons of a classical profile is possible. It is noted that if rigidities of the external medium and a rod have one order, then nonlinear stationary waves can’t be formed.

Keywords: longitudinal wave, model Mindlin–Herman, nonlinearly elastic medium, evolutionary equation of Ostrovsky, periodic wave, soliton

REFERENCES

1. Zverev V.A. Modulation method for measuring ultrasound dispersion // Dokl. AN SSSR. 1953, vol. 91, no. 4, pp. 791–794. (in Russian)
2. Zverev V.A. Modulation method for measuring ultrasound dispersion // Akustich. zh. 1956. vol. 2, no. 2, pp. 142–145. (in Russian)
3. Eibramson Kh.N., Plass Kh. Dz.h., Ripperger E.A. Propagation of stress waves in rods and beams // Problemy Mekhaniki, 1961, no. 3, pp. 25–90. (in Russian)

4. Gary G., Klepaczko J.R., Zhao H. Correction de dispersion pour l'analyse des petites deformations aux barre de Hopkinson // J. Physique IV, 1991, vol. 1, pp. 403–410.
5. Lifshitz J.M., Leber H. Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests // Int. J. Impact Engng., 1994, vol. 15, pp. 723–733.
6. Bragov A.M., Konstantinov A.Iu., Medvedkina M.V. Wave dispersion in split hopkinson pressure bars in dynamic testing of brittle materials // Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod, 2011, no. 6(1), pp. 158–162. (in Russian)
7. Grigoliuk E.I., Selezov I.T. Nonclassical Theories of Rods, Plates, and Shells. Moscow: VINITI, 1973. 272 p. (in Russian)
8. Artobolevskii I.I., Bobrovnikskii Iu.I., Genkin M.D. Introduction to the Acoustic Dynamics of Machines. Moscow: Nauka, 1979. 296 p. (in Russian)
9. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Proc. 1 st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME, New York, 1952, pp. 187–191.
10. Mindlin R.D., Herrmann G. Corrections // Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, New York, 1954, pp. 233.
11. Mindlin R.D., Herrmann G. A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod // Coll. Papers Raymond D. Mindlin, vol. 1. N.Y.: Springer, 1989, pp. 243–248.
12. Herrmann G. Forced motions of elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1954, vol. E 21, no. 3, pp. 221–224.
13. Biot M. Dynamics of viscoelastic anisotropic media // Reprinted from Proc. Fourth Midwestern Conf. Solid Mech. at Pardue Univ, 1955. 16 p.
14. Doyle J.F. Wave Propagation in Structure. N.Y.: Springer, 1989. 258 p.
15. Vesnitskii A.I. Waves in Systems with Moving Boundaries. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian)
16. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Waves in the rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity. Moscow: Fizmatlit, 2002. 208 p. (in Russian)
17. Gapalakrishnan S., Narendar S. Wave Propagation in Nanostructures. Cham: Springer, 2013. 358 p.
18. Kukudzhanov V.N. Asymptotic solutions of refined equations of elastic and elastic-plastic waves in rods // Volny v Neuprugikh Sredakh, Ed. by Iu.N. Rabotnov AN MSSR, Kishinev. 1970. pp. 119–129. (in Russian)
19. Isaev V.I. Longitudinal impact on the rod based on Mindlin-Herman theory // Vestn. MIIT, 2005, no. 12, pp. 93–98. (in Russian)
20. Isaev V.I. Modeling mechanical system responses // Mir transporta, 2007, no. 1, pp. 26–30. (in Russian)
21. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Math. Probl. in Engng, 2010, Article ID 986242, 35 p.
22. Gapalakrishnan S., Mahapatra D.R. A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams // Compos. Struct., 2003, vol. 59, no. 1, pp. 67–88.
23. Anderson S.P. Higher-order rod approximation for the propagation of longitudinal stress waves in elastic bars // J. Sound & Vibr., 2006, vol. 290, no. 1–2, pp. 290–308.
24. Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M. Longitudinal wave propagation. Pt I. Comparison of rod theories // J. Sound & Vibr., 2006, vol. 295, no. 3–5, pp. 461–478.
25. Guven U. Two mode Mindlin-Herrmann rod solution based on modified couple stress theory // ZAMM. J. Appl. Math. & Mech., 2014, vol. 94, no. 12, pp. 1011–1016.
26. Chunbiao Gan, Yimin Wei, Shixi Yang Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // J. Sound & Vibr., 2014, vol. 333, no. 2, pp. 434–445.
27. Kim S., Lee U. Effects of delamination on guided waves in a symmetric laminated composite beam // Math. Probl. in Engng., 2014, Article ID 956043, 12 p.
28. Chunhua Jin, Xinwei Wang Dynamics analysis of functional graded material bars by using novel weak form quadrature element method // J. Vibroeng., 2014, vol. 16, no. 6, pp. 2790–2799.
29. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. The use of refined rod models to describe elastic waves propagation of in layered structures // Akustika neodnorodnykh sred.. Sbornik trudov seminara nauchnoi shkoly prof. S.A. Rybaka, 2005, pp. 32–37. (in Russian)

30. *Arkhipova N.I., Erofeev V.I., Semerikova N.P.* (2011) Description of elastic wave propagation in layered structural elements using improved models of bars // *Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod*, no. 4 (1), pp. 130–133. (in Russian)
31. *Erofeev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear models of longitudinal oscillations of rods // *Gidraeromekhanika i Teoriia Uprugosti. sbornik, Dnepropetrovsk: Dnepropetrovskii gosudarstvennyi universitet im. 300-letiiia Vossoedineniia Ukrainy s Rossiei*, 1984. no. 32, pp. 78–82. (in Russian)
32. *Erofeev V.I., Kliueva N.V., Semerikova N.P.* Nonlinear elastic waves in Mindlin–Hermann rod // *Izvestiia vuzov, Prikl. Nelin. din.*, 1999, vol. 7, no. 4, pp. 35–47. (in Russian)
33. *Erofeev V.I., Klyueva N.V.* Solitons and nonlinear periodic strain waves in rod, plates and shells (A Review) // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655.
34. *Lukash P.A.* Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1978. 204 p. (in Russian)
35. *Zaremba L.K., Krasil'nikov V.A.* Introduction to Nonlinear Acoustics. Moscow: Nauka, 1966. 519 p. (in Russian)
36. *Zaremba L.K., Krasil'nikov V.A.* Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids // *Physics Uspekhi*, 1971, vol. 13, no. 6, pp. 778–797.
37. *Reissner E.* On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation // *Studies in Appl. Math.*, 1970, vol. XLIX, no. 1, pp. 45–57.
38. *Ostrovskii L.A.* Nonlinear internal waves in rotating ocean // *Okeanol.*, 1978, vol. 18, no. 2, pp. 181–191. (in Russian)
39. *Gandarias M.L., Bruzón M.S.* Symmetry analysis and exact solutions of some Ostrovsky equations // *Theor. & Math. Phys.*, 2011, vol. 168, no. 1, pp. 898–911.
40. *Stepanyants Y.A.* On stationary solutions of the reduced Ostrovsky equation: Periodic waves, compactons and compound solitons // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 28, pp. 193–204.
41. *Stepanyants Y.A.* Nonlinear waves in a rotating ocean (The Ostrovsky equation and its generalizations and applications) // *Izv. Atmosph. & Oceanic Phys.*, 2020, vol. 56. no. 1, pp. 16–32.
42. *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Series and Products. Petersburg: BKhV, 2011. 1182 p. (in Russian)
43. *Kudriashov N.A.* Methods of Nonlinear Mathematical Physics: Tutorial, Dolgoprudnyi: Intellect, 2010. 368 p. (in Russian)