

УДК 519.958:531.33:517.956.8

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ НА МАЛЫХ ЧАСТОТАХ В СОЧЛЕНЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

© 2020 г. С. А. Назаров*

Санкт-Петербургский государственный университет, С. Петербург, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 06.04.2020 г.

После доработки 22.05.2020 г.

Принята к публикации 11.06.2020 г.

Рассмотрено сочленение полубесконечных цилиндрических акустических волноводов в количестве N штук. Для малых частот построена асимптотика матрицы рассеяния. Эффекты почти полного отражения и прохождения волн обнаружены только для $N = 1$ и $N = 2$ при одинаковых площадях сечений цилиндров, но в других случаях какие-либо аномалии дифракции волн отсутствуют.

Ключевые слова: сочленение полубесконечных цилиндрических акустических волноводов, малые частоты, матрицы рассеяния и поляризации, асимптотика, аномалии Вайнштейна

DOI: 10.31857/S0032823520050069

1. Постановка задачи. Акустический волновод $\Xi \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, образован полубесконечными цилиндрами (рукавами)

$$\Pi_n = \{x: y^n = (y_1^n, \dots, y_{d-1}^n) \in \mathfrak{w}_n, z_n \geq 0\}, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

и центральным ядром Θ (резонатором) – областью с липшицевой границей $\partial\Theta$ и компактным замыканием $\bar{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$ (рис. 1). Система декартовых координат $x = (x_1, \dots, x_d)$ соотнесена со всем сочленением Ω , а в рукавах (1.1) применяются локальные координаты y^n и z_n , поперечные и продольная. Поверхности $\partial\mathfrak{w}_n$, ограничивающие сечения $\mathfrak{w}_n \subset \mathbb{R}^{d-1}$ цилиндров (1.1), также являются компактными и липшицевыми. Масштабированием характерный размер резонатора Θ сведен к единице, и тем самым декартовы координаты и геометрические параметры сделаны безразмерными.

При частоте $\omega > 0$ гармонических во времени колебаний акустической среды давление u удовлетворяет краевой задаче Неймана для оператора Гельмгольца

$$-\Delta u(x) = \omega^2 u(x), \quad x \in \Xi = \Theta \cup \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_N \quad (1.2)$$

$$\partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \quad (1.3)$$

Здесь $\nabla = \text{grad}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа и ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, определенная почти всюду на поверхности $\partial\Xi$, липшицевой по предположению. Обобщенная формулировка задачи (1.2), (1.3) сводится к интегральному тождеству [1]

$$(\nabla u, \nabla v)_\Xi = \omega^2 (u, v)_\Xi \quad v \in C_c^\infty(\bar{\Xi}) \quad (1.4)$$

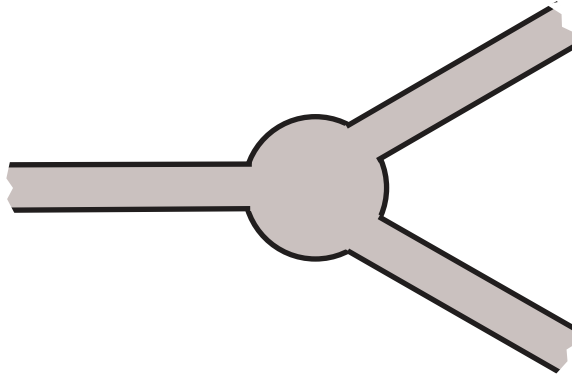


Рис. 1.

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Xi)$, а пробные функции $v \in C_c^\infty(\bar{\Xi})$ считаются бесконечно дифференцируемыми и имеющими компактные носители потому, что далее изучаются решения, не затухающие на бесконечности, т.е. не попадающие в пространство Соболева $H^1(\Xi)$. Из-за возможных особенностей решений в иррегулярных точках границы $\partial\Xi$ всюду под решениями краевых задач в неограниченной области Ξ понимаем именно функции, удовлетворяющие соответствующим интегральным тождествам вида (1.4).

Проверено [2], что непрерывный спектр оператора задачи (1.4) (или краевой задачи (1.2), (1.3) в случае гладкой границы $\partial\Xi$) занимает замкнутую положительную полуось $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Таким образом, при любой частоте $\omega > 0$ в рукавах (1.1) возникают поршневые моды

$$w_n^{\omega\pm}(z_n) = a_n^\omega e^{\pm iz_n} \quad (1.5)$$

$$a_n^\omega = \omega^{-1/2} a_n, \quad a_n = (2|\mathfrak{w}_n|)^{-1/2} \quad (1.6)$$

Нормирующий множитель a_n^ω , включающий $(d-1)$ -мерный объем $|\mathfrak{w}_n|$ сечения $\mathfrak{w}_n$, нужен для придания полезных свойств используемых далее объектам. Согласно классическому принципу излучения Зоммерфельда [2, 3] волна $w_n^{\omega-}$ приходящая в рукаве Π_n , а волна $w_n^{\omega+}$ уходящая на бесконечность.

Основная цель настоящей работы – изучение дифракционных характеристик соединения Ξ акустических волноводов $\Pi_1, \dots, \Pi_N$ на малых частотах, т.е. при $\omega \ll 1$. Далее решение задачи (1.4) или (1.2), (1.3) удобно обозначать w^ω . Полученные асимптотические формулы показывают, что в главном структура матрицы рассеяния в волноводе Ξ зависит только от количества N рукавов и $(d-1)$ -мерного объема (площади при $d=3$) сечений $\mathfrak{w}_n$. Какие-либо странности в процессе рассеяния волн происходят только в случаях $N=1$, $N=2$ и при одинаковых объемах сечений

$$|\mathfrak{w}| := |\mathfrak{w}_1| = \dots = |\mathfrak{w}_N| \quad (1.7)$$

2. Матрица рассеяния и главный член ее асимптотики. Акустическое поле, инициированное приходящей в рукаве Π_m волной, допускает представление

$$\zeta_m^\omega(x) = \chi_m(z_m) w_m^{\omega-}(z_m) + \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) S_{mn}^\omega w_n^{\omega+}(z_n) + \check{\zeta}_m^\omega(x) \quad (2.1)$$

При этом $\tilde{\zeta}_m^\omega$ – экспоненциально затухающий на бесконечности остаток, а χ_n – гладкая срезающая функция, служащая для локализации волн в рукаве Π_n

$$\chi_n(z_n) = 1 \quad \text{при} \quad z_n > 1, \quad \chi_n(z_n) = 0 \quad \text{при} \quad z_n < 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (2.2)$$

Коэффициенты S_{mn}^ω разложений (2.1) образуют $(N \times N)$ -матрицу S^ω , называемую матрицей рассеяния и в силу выбора нормирующих множителей (1.6) являющуюся унитарной и симметричной, но не обязательно эрмитовой (простая проверка этих свойств представлена, например, в статье [4]).

Определим главный член асимптотики матрицы рассеяния

$$S^\omega = S^0 + \omega S' + \omega^2 S'' + \dots \quad (2.3)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа. Оценки асимптотических остатков будут приведены в разд. 5.

Метод сращиваемых асимптотических разложений [5, 6], ([7], Гл. 2) был приспособлен [4, 8] к исследованию бесконечных волноводов. Применим формулу Тейлора к волнам (1.5)

$$w_n^{\omega\pm}(z_n) = \omega^{-1/2} a_n \left(1 \pm i\omega z_n - \omega^2 \frac{z_n^2}{2} + O(\omega^3 z_n^3) \right) \quad (2.4)$$

В итоге внешние разложения решения (2.1) в рукавах (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \zeta_m^\omega(x) = & \omega^{-1/2} a_n ((\delta_{m,n} + S_{mn}^0) + \omega(i(-\delta_{m,n} + S_{mn}^0)z_n + S_{mn}') + \\ & + \omega^2(-(\delta_{m,n} + S_{mn}^0)\frac{z_n^2}{2} + iS_{mn}'z_n + S_{mn}'') + \dots) \quad \text{в} \quad \Pi_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

Множители при $\omega^{p-1/2}$ предписывают поведение на бесконечности членов внутреннего разложения, пригодного для описания поля ζ_m^ω вблизи резонатора Θ

$$\zeta_m^\omega(x) = \omega^{-1/2} (Z_m^0(x) + \omega Z_m'(x) + \omega^2 Z_m''(x) + \dots) \quad (2.6)$$

Ввиду “излишней малости” спектрального параметра ω^2 правой частью уравнения Гельмгольца (1.2) можно пренебречь, и поэтому первые два члена разложения (2.6) суть решения однородных задач Неймана для оператора Лапласа

$$-\Delta Z_m^0(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z_m^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \quad (2.7)$$

$$-\Delta Z_m'(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z_m'(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi, \quad (2.8)$$

однако уравнение в задаче для Z_m'' становится неоднородным

$$-\Delta Z_m''(x) = Z_m^0(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z_m''(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \quad (2.9)$$

При учете слагаемых порядка $\omega^{-1/2}$ в соотношении (2.5) получим для решения задачи (2.7) условия на бесконечности

$$Z_m^0(x) = a_n(\delta_{m,n} + S_{mn}^0) + o(1) \quad \text{где} \quad z_n \rightarrow +\infty \quad \text{в} \quad \Pi_n \quad (2.10)$$

В итоге гармоническая функция Z_m^0 ограничена и, следовательно, равна какой-то постоянной c_m^0 , причем в силу формул (2.10) и (1.6) имеем

$$S_{mn}^0 = -\delta_{m,n} + (2|\varpi_n|)^{1/2} c_m^0 \quad (2.11)$$

Выделив в разложении (2.5) члены $O(\omega^{1/2})$, видим, что решение Z'_m задачи (2.8) нужно подчинить условию

$$Z'_m(x) = -ia_n(\delta_{m,n} - S_{mn}^0)z_n + a_n S_{mn}^* + o(1) \quad \text{при} \quad z_n \rightarrow +\infty \quad \text{в} \quad \Pi_n \quad (2.12)$$

Из-за линейного роста при $z_n \rightarrow +\infty$ такая гармоническая функция, обладающая нулевой нормальной производной на поверхности $\partial\Xi$, существует в том и только в том случае, если суммарный поток на бесконечность обращается в нуль, а именно

$$\begin{aligned} 0 &= -\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Xi(R)} \Delta Z'_m(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{T}_n} \frac{\partial Z'_m}{\partial z_n}(x) \bigg|_{z_n=R} dy^n = \\ &= -i \sum_{n=1}^N |\mathbb{T}_n| a_n (\delta_{m,n} - S_{mn}^0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Иными словами, соотношение (2.13) служит условием существования решения (2.12) задачи (2.9).

В силу формулы (1.6) равенства (2.11) и (2.13) позволяют вычислить постоянную

$$c_m^0 = \Sigma^{-1} \sqrt{2|\mathbb{T}_m|} \quad (2.14)$$

$$\Sigma = |\mathbb{T}_1| + \dots + |\mathbb{T}_N| \quad (2.15)$$

Следовательно

$$S_{mn}^0 = 2\Sigma^{-1} \sqrt{|\mathbb{T}_m||\mathbb{T}_n|} - \delta_{m,n}, \quad m, n = 1, \dots, N \quad (2.16)$$

Для того чтобы описать простейшие свойства матрицы S^0 с элементами (2.16) введем ортогональный проектор P и диагональную матрицу B

$$P = I - \Sigma^{-1} B E B, \quad B = \text{diag}\{\sqrt{|\mathbb{T}_1|}, \dots, \sqrt{|\mathbb{T}_N|}\} \quad (2.17)$$

Здесь I и E – матрицы размером $N \times N$, соответственно единичная и составленная из N^2 единиц, а след $\text{tr } B^2$ матрицы $B^2 = \text{diag}\{|\mathbb{T}_1|, \dots, |\mathbb{T}_N|\}$ совпадает с величиной (2.15).

Итак, матрица S^0 приобретает вид

$$S^0 = 2\Sigma^{-1} B E B - I = I - 2P \quad (2.18)$$

и является ортогональной (вещественной унитарной), так как $E B^2 E = E \text{tr } B^2$ и

$$P^2 = I - 2\Sigma^{-1} B E B + \Sigma^{-2} B E B^2 E B = I - \Sigma^{-1} B E B = P$$

$$(S^0)^* S^0 = (I - P)^2 = I - 4P + 4P^2 = I$$

При этом $(S^0)^*$ – сопряженная для S^0 матрица, совпадающая с транспонированной $(S^0)^T$ ввиду вещественности S^0 , т.е. T – знак транспонирования.

Матрица (2.18) имеет собственные числа -1 и 1 , причем первое простое и ему отвечает собственный вектор

$$b = (\sqrt{|\mathbb{T}_1|}, \dots, \sqrt{|\mathbb{T}_N|})^T \in \mathbb{R}^N$$

Кратность второго собственного числа равна $N - 1$ и $P\mathbb{R}^N$ – соответствующее собственное подпространство.

3. Матрица поляризации и поправочный член асимптотики. Задача Неймана для уравнения Лапласа

$$-\Delta u^0(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi, \quad (3.1)$$

помимо постоянного решения $Y_0(x) = 1$ обладает решениями $Y_1, \dots, Y_N$ с линейным ростом на бесконечности

$$Y_m(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) \left(\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \frac{z_n}{|\bar{\omega}_n|} + M_{mn} \right) + \tilde{Y}_m(x), \quad m = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

и остатками $\tilde{Y}_m$, экспоненциально затухающими при $|x| \rightarrow \infty$. У каждого из решений (3.2) суммарный поток на бесконечность обращается в нуль (ср. выкладку (2.13)). Таким образом, правая часть уравнения Пуассона в задаче Неймана для остатка $\tilde{Y}_m$ имеет компактный носитель Υ_m и нулевое среднее по множеству Υ_m , а значит, гармонические функции Y_m действительно существуют и их поведение при $z_n \rightarrow \infty$ выясняется при помощи метода Фурье.

Решения (3.2) ищем в виде

$$Y_m(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \frac{z_n}{|\bar{\omega}_n|} + \hat{Y}_m(x) \quad (3.3)$$

Правая часть

$$\hat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^N \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \frac{1}{|\bar{\omega}_n|} \left(2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z_n}(z_n) + z_n \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial z_n^2}(z_n) \right)$$

уравнения Пуассона в задаче Неймана для слагаемого $\hat{Y}_m$ суммы (3.3)

$$-\Delta \hat{Y}_m(x) = \hat{F}_m(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu \hat{Y}_m(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi$$

имеет компактный носитель и нулевое среднее по Ξ

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \hat{F}_m(x) dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\bar{\omega}_n|} \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \int_{\bar{\omega}_n \times (0, R)} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} (z_n \chi_n(z_n)) dy^n dz_n = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\bar{\omega}_n|} \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \int_{\bar{\omega}_n} dy^n = \sum_{n=1}^N \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, существует решение задачи (3.3) с конечным интегралом Дирихле, которое согласно методу Фурье ограничено и стабилизируется в рукавах Π_n к некоторым постоянным M_{mn} . Поскольку решение $\hat{Y}_m$ определено с точностью до постоянного слагаемого, можно соблюсти равенства

$$M_{m1} + \dots + M_{mN} = 0, \quad m = 1, \dots, N$$

Итак, матрица $M = (M_{mn})$ размером $N \times N$, составленная из коэффициентов в разложениях (3.2) и называемая матрицей поляризации, удовлетворяет соотношению

$$ME = 0 \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3.4)$$

Функции (3.2) линейно зависимы. В самом деле, сумма $Y_1 + \dots + Y_N$ ограничена в Ξ , т.е. является постоянной, причем равенства (3.4) обеспечивают тождество

$$Y_1(x) + \dots + Y_N(x) = 0, \quad x \in \Xi \quad (3.5)$$

Введем ортогональный проектор

$$Q = I - N^{-1}E \quad (3.6)$$

и заметим, что матрица поляризации осуществляет взаимно однозначное отображение

$$M : Q\mathbb{R}^N \rightarrow Q\mathbb{R}^N \quad (3.7)$$

При этом

$$Q\mathbb{R}^N = \{c \in \mathbb{R}^N : e^T c = 0\}, \quad Q^2 = I - 2N^{-1}E + N^{-2}E^2 = Q$$

Кроме того, матрица поляризации симметрична, так как в силу формулы Грина и соотношений (3.4) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_{\tilde{\omega}_n} \left(Y_m(x) \frac{\partial Y_p}{\partial z_n}(x) - Y_p(x) \frac{\partial Y_m}{\partial z_n}(x) \right) \Big|_{z_n=R} dy^n = \\ &= \sum_{n=1}^N \left(M_{mn} \left(\delta_{p,n} - \frac{1}{N} \right) - M_{pn} \left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N} \right) \right) = M_{mp} - M_{pm} \end{aligned}$$

Из решений (3.2) и $Y_0(x) = 1$ задачи (3.1) соорудим решение $Z'_m(x)$ задачи (2.8), (2.12). С этой целью удобно использовать запись

$$\mathbf{G} \approx Tg$$

и интерпретировать ее как разложение столбца функций $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_N)^T$

$$\mathbf{G}(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) T^n g_n(z_n) + \tilde{\mathbf{G}}(x)$$

Здесь $T = (T^1, \dots, T^N)$ — числовая $(N \times N)$ -матрица со столбцами $T^n \in \mathbb{C}^N$, $g = (g_1, \dots, g_N)^T$ — столбец функций переменных z_n , а $\tilde{\mathbf{G}}$ — столбец экспоненциально затухающих остатков. В результате формулы (2.12) и (3.2) принимают вид

$$\mathbf{Z}' = (Z'_1, \dots, Z'_N)^T \approx -2^{-1/2} i(1 - S^0) B^{-1} \mathbf{z} + 2^{-1/2} S' B^{-1} \mathbf{1} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)^T \approx Q B^{-2} \mathbf{z} + M \mathbf{1} \quad (3.9)$$

Введены обозначения $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$ и $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Сравнивая разложения (3.8) и (3.9), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}' &= -2^{-1/2} i(I - S^0) B Q^{-1} \mathbf{Y} + C' B^{-1} b \approx \\ &\approx -2^{1/2} i(I - S^0) B Q B^{-2} \mathbf{z} - \left(2^{1/2} i(I - S^0) B Q - C' E \right) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $C' = \text{diag}\{C'_1, \dots, C'_N\}$ — неизвестная числовая диагональная матрица. В силу соотношения (3.5) при любом $x \in \Xi$ справедливо включение $\mathbf{Y}(x) \in Q\mathbb{R}^N$. Следовательно, выражение $Q^{-1}\mathbf{Y}$ определено корректно и, кроме того, множитель Q^{-1} можно не писать, так как сужение проектора Q на подпространство $Q\mathbb{R}^N$ — тождественное отображение. Наконец, $Q^{-1}M = M$ согласно формуле (3.7).

Итак, соотношения (3.8)–(3.10) дают равенство

$$S' = -i(I - S^0) B M B + \sqrt{2} C' E B \quad (3.11)$$

Для определения последнего слагаемого нужно было бы построить следующий член $\omega^2 S''$ разложения (2.3). Точно так же для вычисления главного члена (2.18) потребовалась первичная информация о коэффициентах представления (2.12) асимптотических поправок Z'_m в разложениях (2.6).

4. Упрощенная постановка: второй поправочный член. В предыдущих разделах был построен главный член асимптотики (2.3) матрицы рассеяния, достаточный для целей данной работы. Закончим построение поправочного члена (3.11) в предположении (1.7), которое упомянуто в разд. 1 и будет принято в разд. 6 при обсуждении аномалий рассеяния. В этом случае формулы (3.6), (2.17) и (2.14), (2.18) принимают вид

$$P = Q = I - \frac{1}{N}E, \quad B = |\mathfrak{W}|I \quad (4.1)$$

$$c_m^0 = c^0 := \frac{1}{N} \sqrt{\frac{2}{|\mathfrak{W}|}} \quad (4.2)$$

$$S^0 = \frac{2}{N}E - I \quad (4.3)$$

Соотношения (1.7) и (3.7) обеспечивают равенство

$$(I - S^0)BM = 2|\mathfrak{W}|^{-1/2}QM = 2|\mathfrak{W}|^{-1/2}M \quad (4.4)$$

Таким образом, в формуле (3.11) для поправочного члена $\omega S'$ нужно найти лишь диагональную матрицу C' .

В отличие от гармонических функций Z_m^0 и Z'_m третий член Z''_m разложения (2.6) – решение неоднородной задачи Неймана (2.9). Ищем его в виде

$$Z''_m(x) = Y''_m(x) + \sum_{p=1}^N K_p Y_p(x) + K_0 Y_0(x) \quad (4.5)$$

$$Y''_m(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) \left(-c^0 \frac{z_n^2}{2} + c''_m z_n + M''_{mn} \right) + \dot{Y}''_m(x) \quad (4.6)$$

Остаток $\dot{Y}''_m(x)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью, c^0 – величина (4.2), $Y_1, \dots, Y_N$ и $Y_0 = 1$ – введенные в разд. 3 решения задачи (3.1), а χ_n – срезающие функции (2.2). Присутствие в сумме (4.5) слагаемых Y_m с разложениями (3.2) и произвол в выборе коэффициентов $K_1, \dots, K_N$, образующих матрицу $K = \text{diag}\{K_1, \dots, K_N\}$, позволили ввести одинаковый множитель (4.2) при z_n в асимптотике (4.6) на каждом из рукавов $\Pi_1, \dots, \Pi_N$.

Постоянные слагаемые $M''_{mn} \in \mathbb{R}$ далее не понадобятся, а множитель c''_m в линейных членах вычисляется при помощи формулы Грина

$$\begin{aligned} - \int_{\Xi(R)} Z_m^0(x) dx &= \int_{\Xi(R)} \Delta Z''_m(x) dx = \sum_{n=1}^N \left[\sum_{p=1}^N \int_{\mathfrak{W}_n} K_p \frac{\partial Y_p}{\partial z_n}(x) \Big|_{z_n=R} dy^n + \int_{\mathfrak{W}_n} \frac{\partial Y''_m}{\partial z_n}(x) \Big|_{z_n=R} dy^n \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[\sum_{p=1}^N K_p \left(\delta_{p,n} - \frac{1}{N} \right) + |\mathfrak{W}_n| (c''_m - c^0 R) \right] = \Sigma(c''_m - c^0 R) \end{aligned}$$

При этом

$$Z_m^0(x) = c^0, \quad \Xi(R) = \Theta \cup \bigcup_{n=1}^N \{x : y^n \in \mathfrak{W}_n, z_n \in [0, R)\}, \quad |\Xi(R)| = |\Theta| + NR|\mathfrak{W}|$$

Следовательно, при учете формулы (2.14) получим

$$c'' := c_m'' = -c^0 \frac{|\Theta|}{N |\mathfrak{W}|} = -\frac{|\Theta|}{N^2} \sqrt{\frac{2}{|\mathfrak{W}|^3}} \quad (4.7)$$

Согласно разложениям (2.5) и (2.6) решениям Z_m'' задачи (2.9) предписано такое поведение на бесконечности:

$$\mathbf{Z}'' \approx \frac{1}{\sqrt{2|\mathfrak{W}|}} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^2 + iS' \mathbf{z} + S'' \mathbf{1} \right) \quad (4.8)$$

Сравнивая соотношения (4.5), (3.3), (4.6) и (4.8), находим

$$i(2|\mathfrak{W}|)^{-1/2} S' = KP + c'' I \quad (4.9)$$

Теперь при учете формул (3.11), (4.1), (4.4), (4.6) и (4.7) получим

$$S' = -i(I - S^0)M - i\sqrt{2|\mathfrak{W}|}c'' E = 2i \left(M + \frac{1}{N^2} \frac{|\Theta|}{|\mathfrak{W}|} E \right) \quad (4.10)$$

Соотношение (4.9) позволяет вычислить и коэффициенты $K_1, \dots, K_N$ представления (4.5), однако явное выражение для них не понадобится.

5. Полные асимптотические ряды и обоснование асимптотики. Построение асимптотики матрицы рассеяния можно продолжить и вычислить коэффициенты формального ряда

$$S^\omega \equiv S^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k S^{(k)} \quad (5.1)$$

В рамках метода сращиваемых разложений (см. [5, 6] и др.) скорость полиномиального роста решений предельной задачи (3.1) неограниченно возрастает от шага к шагу итерационного процесса, что делает сопутствующие рассуждения и выкладки излишне сложными и громоздкими. Поэтому более удобно применить метод составных разложений (см. [7, 9] и др.) и искать представление решения (2.1) в виде суммы формальных рядов

$$\zeta_m^\omega(x) \equiv \chi_m(z_m) w_m^{\omega-}(z_m) + \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j S_{mn}^{(j)} w_n^{\omega+}(z_n) + \sum_{j=0}^{\infty} \omega^j \tilde{Z}_m^{(j)}(x) \quad (5.2)$$

Алгоритм определения членов $\tilde{Z}_m^{(j)}$ и $S_{mn}^{(j)}$ весьма прост: волны (1.5) раскладываются в ряды Тейлора (ср. формулы (2.4) и (2.5)), а функции $\tilde{Z}_m^{(j)}$ служат для компенсации невязок, возникающих вследствие умножения названных волн на срезки (2.2), и приобретают экспоненциальное затухание при $|x| \rightarrow +\infty$ в результате подбора коэффициентов $S_{mn}^{(j)}$. При этом условия существования решения $u^0 \in H^1(\Xi)$ неоднородной задачи (3.1)

$$-\Delta u^0(x) = f(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu u^0(x) = g(x), \quad x \in \partial\Xi \quad (5.3)$$

принимают вид

$$\int_{\Xi} Y_q(x) f(x) dx + \int_{\partial\Xi} Y_q(x) g(x) ds_x = 0, \quad q = 0, 1, \dots, N \quad (5.4)$$

В силу соотношения (3.5) условия ортогональности (5.4) с индексами $q = 1, \dots, N$ линейно зависимы, и поэтому формулы (5.4) фиксируют только N связей и позволяют поочередно вычислить коэффициенты $S_{mn}^{(j)}$.

Обоснование асимптотических разложений проводится при помощи техники весовых пространств с отделенной асимптотикой [4, 8]. Обозначим $W_\beta^1(\Xi)$ пространство Кондратьева [10], полученное пополнением линейного множества $C_c^\infty(\Xi)$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по весовой соболевской норме

$$\|v; W_\beta^1(\Xi)\| = \left(\|e^{\beta|x|} \nabla v; L^2(\Xi)\|^2 + \|e^{\beta|x|} v; L^2(\Xi)\|^2 \right)^{1/2}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Пространство $W_{\beta, \omega}^1(\Xi)$ составлено из функций

$$u^\omega(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z_n) b_n^\omega w_n^{\omega+}(z_n) + \tilde{u}^\omega(x) \quad (5.5)$$

и снабжено гильбертовой нормой

$$\|u^\omega; W_{\beta, \omega}^1(\Xi)\| = \left[\sum_{n=1}^N |b_n^\omega|^2 + \omega \|\tilde{u}^\omega; W_\beta^1(\Xi)\|^2 \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

Коэффициент $\omega^{1/2}$ при $\|\tilde{u}^\omega; W_\beta^1(\Xi)\|$ учитывает наличие большого множителя $a_n^\omega = O(\omega^{-1/2})$ в волнах (1.5) и тем самым уравнивает вклады слагаемых суммы (5.5) в составную норму (5.6).

Поскольку разложение (5.5) поля $u^\omega \in W_{\beta, \omega}^1(\Xi)$ включает только уходящие в рукавах Π_n волны $w_n^{\omega+}$ и исчезающий на бесконечности с экспоненциальной скоростью остаток $\tilde{u}^\omega$, интегральное тождество

$$(\nabla u^\omega, \nabla v^\omega)_\Xi - \omega^2 (u^\omega, v^\omega)_\Xi = F(v^\omega), \quad v \in W_\beta^1(\Xi) \quad (5.7)$$

отвечает постановке условий излучения Зоммерфельда в задаче (5.3). При этом F — линейный непрерывный функционал на пространстве $W_{-\beta}^1(\Xi)$, принадлежащий сопряженному пространству $W_{-\beta}^1(\Xi)^*$, например

$$F(v^\omega) = (f, v^\omega)_\Xi + (g, v^\omega)_{\partial\Xi}, \quad \text{где} \quad e^{\beta|x|} f \in L^2(\Xi), \quad e^{\beta|x|} g \in L^2(\partial\Xi)$$

Проверено [11, Гл. 5], [4, 8], что существует зависящее от области Ξ число $\beta_\Xi > 0$, для которого при $\beta \in (0, \beta_\Xi)$ оператор задачи (5.7)

$$W_{\beta, \omega}^1(\Xi) \ni u^\omega \mapsto A_\beta(\omega) u^\omega = F \in W_{-\beta}^1(\Xi)^*$$

осуществляет изоморфизм, причем его норма и норма обратного не превосходят $c\omega^{-1/2}$.

Обоснование асимптотики (5.1) матрицы рассеяния S^ω проводится по стандартной схеме [4, 8]. Зафиксируем натуральное число J и в качестве приближения $\zeta_m^{\omega as}$ к функции ζ_m^ω возьмем частичные суммы рядов (5.2) (ограничиваем суммирование по $j = 0, 1, \dots, J$). По построению функция $\zeta_m^{\omega as}$ оставляет малую невязку порядка $\omega^{J-1/2}$ в задаче (1.2), (1.3), так что правая часть $F^{(j)}$ интегрального тождества вида (5.7) для разности $\zeta_m^\omega - \zeta_m^{\omega as}$, освободившейся от приходящей волны $w_m^{\omega-}$, удовлетворяющей усло-

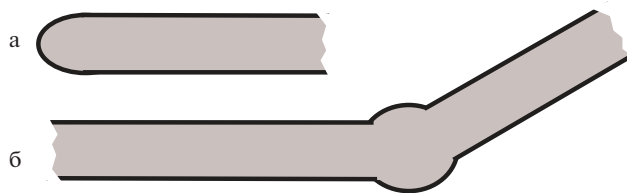


Рис. 2.

виям излучения Зоммерфельда и потому принадлежащей пространству $W_{\beta,\omega}^1(\Xi)$, выполнено соотношение

$$\|F^{(j)}; W_{-\beta}^1(\Xi)^*\| \leq c_J \omega^{J-1/2}$$

В результате упомянутая оценка нормы обратного оператора $A_\beta(\omega)^{-1}$ дает неравенство

$$\|\zeta_m^\omega - \zeta_m^{\omega as}; W_{\beta,\omega}^1(\Omega)\| \leq c \omega^{-1/2} \|F^{(j)}; W_{-\beta}^1(\Xi)^*\| \leq C_J \omega^{J-1} \quad (5.8)$$

Норма (5.6) включает модули коэффициентов рассеяния, а значит, неравенство (5.8) влечет за собой искомую оценку

$$\left| S_m^\omega - \sum_{j=0}^N \omega^j S^{(j)} \right| \leq C_J \omega^{J-1} \quad (5.9)$$

Понижение степени малого параметра ω на единицу в мажоранте (5.9) означает, что в сумме присутствует “лишний” член $\omega^J S^{(J)}$, который следует присоединить к остатку. Точно так же в разд. 2 для вычисления главного члена (2.18) асимптотики матрицы рассеяния потребовалось обследовать основную поправку $\omega S' = \omega S^{(1)}$.

6. Аномалии Вайнштейна. Явные формулы [12] для акустического поля в полубесконечной цилиндрической круговой трубе, открытой в пространство $\mathbb{R}^3$, указывают на эффект “почти полного” отражения волны, приходящей с бесконечности в трубе. Такое необычное поведение волн на околопороговых частотах можно смоделировать слабопроницаемой мягкой стенкой Неймана (третье краевое условие с большим множителем $O(\omega^{-1})$ при производной ∂_z).

Похожие, но несколько другие эффекты обнаружены [13, 14] в цилиндрическом волноводе с резонатором и одним или двумя рукавами (рис. 2, а и б). Формулы (2.11) для главных членов асимптотики матрицы рассеяния позволяют сделать выводы о рассеянии волн в волноводах с разным количеством рукавов (рис. 1). Для упрощения дальнейших формул предположим, что все сечения одинаковы $\mathfrak{W}_1 = \dots = \mathfrak{W}_N$ и, следовательно, верны формулы (1.7) и (4.1)–(4.3).

1°. В случае $N = 1$ имеем

$$S_{11}^\omega = 1 + O(\omega) \quad (6.1)$$

Разумеется, в акустическом волноводе с одним рукавом, ограниченном жесткими стенками, реализуется полное отражение приходящей с бесконечности волны – в конце волновода располагается жесткая стенка (краевое условие Неймана). Формула (6.1) означает, что коэффициент отражения $S_{11}^\omega = e^{i\psi_\omega}$ имеет фазу $\psi_\omega = 2\omega|\mathfrak{W}|^{-1}|\Theta| + O(\omega^2)$, найденную при учете представлений (4.3) и (4.10), так как $M = M_{11} = 0 \in \mathbb{R}$.

2°. В случае $N = 2$ волновод Ξ , прямой или изломанный (рис. 2, а), характеризуется (2×2) -матрицей рассеяния, которая согласно соотношениям (5.9) и (4.1) принимает вид

$$S^\omega = E - I + O(\omega) = \begin{pmatrix} O(\omega) & 1 + O(\omega) \\ 1 + O(\omega) & O(\omega) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Итак, в рассматриваемом волноводе происходит почти “полное прохождение” волн. Этот эффект следует связать с инвертированной аномалией Вайнштейна. Если отказаться от требования (1.7), то согласно формуле (2.16) матрица рассеяния принимает вид

$$S^\omega = \begin{pmatrix} \frac{|\overline{\omega}_1| - |\overline{\omega}_2|}{|\overline{\omega}_1| + |\overline{\omega}_2|} + O(\omega) & \frac{2\sqrt{|\overline{\omega}_1||\overline{\omega}_2|}}{|\overline{\omega}_1| + |\overline{\omega}_2|} + O(\omega) \\ \frac{2\sqrt{|\overline{\omega}_1||\overline{\omega}_2|}}{|\overline{\omega}_1| + |\overline{\omega}_2|} + O(\omega) & \frac{|\overline{\omega}_2| - |\overline{\omega}_1|}{|\overline{\omega}_1| + |\overline{\omega}_2|} + O(\omega) \end{pmatrix}$$

и эффект почти полного прохождения волны исчезает.

3°. При $N = 3$ для волновода Ξ (рис. 1) выполнено соотношение

$$S^\omega = \frac{2}{N}E - I + O(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) \\ \frac{2}{3} + O(\omega) & -\frac{1}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) \\ \frac{2}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) & -\frac{1}{3} + O(\omega) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Таким образом, волна проникает во все рукава сочленения Ξ в значительной мере. Такой же вывод получается при большем количестве рукавов.

4°. Гипотетический случай $N = \infty$ с большой натяжкой можно ассоциировать с упомянутой задачей Вайнштейна [12] о полубесконечной трубе, которая открыта в пространство, образованное бесконечным количеством цилиндрических волноводов.

При этом формула (2.11) с $m = 1$ показывает, что $S_{11}^\omega = -1$, т.е. реализуется прямая аномалия Вайнштейна, а выделенный рукав Π_1 у основания $\{x : y^1 \in \overline{\omega}_1, z_1 = 0\}$ перекрыт малопроницаемой мягкой стенкой. Эти выводы конечно же условны.

Формулы (4.3) и (4.10) с повышенной точностью $O(\omega^2)$ описывают почти одинаковую картину рассеяния волны $w_m^{\omega-}$, приходящей с бесконечности в разных рукавах Π_m волновода Ξ . Рассеяние волны можно условно разбить на два процесса. В первом волна $w_m^{\omega-}$ отражается от ядра Θ как от мягкой стенки, т.е. с сохранением фазы и изменением знака амплитуды на противоположный. Во втором в каждом из рукавов Π_n , $n = 1, \dots, N$, возникает уходящая волна с уменьшенной в $N/2$ раз амплитудой и слабым искажением фазы

$$\psi_n^\omega = \omega \left(\frac{N}{2} M_{mn} + \frac{1}{N} \frac{|\Theta|}{|\overline{\omega}|} \right) + O(\omega^2)$$

Суммарные амплитуды волн определяются в главном лишь количеством рукавов у волновода, но фазы — также другими характеристиками, в частности, матрицей поляризации M , введенной в разд. 3. Только при ограничении (1.7) и в частных случаях $N = 1$ или $N = 2$ рассеяние волн трактуется как аномалия Вайнштейна, связанная с почти полными отражением или прохождением волн.

5°. На физическом уровне строгости приближенные формулы (6.2) и (6.3) могут быть получены при помощи простейшей одномерной модели. Сделаем замену координат $x \mapsto \xi = \omega^{-1/2}x$, т.е. превратим рукава (1.1) в тонкие, с сечениями диаметром $O(\omega^{-1/2})$, цилиндры, сочленение Ξ в область $\Xi^\omega = \{\xi : \omega^{1/2}\xi \in \Xi\}$ и тем самым исключим малый параметр ω из уравнения Гельмгольца (1.2). Акустическое поле $u^\omega(x)$, записанное в координатах ξ , обозначим $u^\omega(\xi)$, и получим для него задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi u^\omega(\xi) &= u^\omega(\xi), & \xi \in \Xi^\omega \\ \partial_{\nu(\xi)} u^\omega(\xi) &= 0, & \xi \in \partial\Xi^\omega \end{aligned} \quad (6.4)$$

Первичный асимптотический анализ ([7], Гл. 5) задачи (6.4) на сочленении тонких областей предоставляет совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta_n^2}(\zeta_n) = w_n(\zeta_n), \quad \zeta_n \in \mathbb{R}_+, \quad n = 1, \dots, N \quad (6.5)$$

с классическими условиями Кирхгофа

$$w_1(0) = \dots = w_N(0), \quad \sum_{n=1}^N \frac{\partial w_n}{\partial \zeta_n}(0) = 0 \quad (6.6)$$

При выполнении соотношений

$$1 + S_{mm}^0 = S_{mn}^0, \quad m \neq n, \quad \sum_{n=1}^N S_{mn}^0 = -1 \quad (6.7)$$

функции

$$w_n^m(\zeta_n) = \delta_{m,n} e^{-i\zeta_n} + S_{mn}^0 e^{+i\zeta_n}$$

служат решениями одномерной задачи (6.5), (6.6) и одновременно дают главные члены асимптотики решения (2.1) многомерной задачи (1.2), (1.3). Коэффициенты S_{mn}^0 , найденные из алгебраической системы (6.7), суть главные члены матриц рассеяния при любом N (ср. формулы (6.1)–(6.3) при $N = 1, 2, 3$).

Полученные тем или иным образом первые члены асимптотики (2.3) матрицы S^ω показывают, что на малых частотах в главном матрица рассеяния не зависит от глобальной геометрии сочленения цилиндрических волноводов, но только от площадей их сечений $\mathfrak{W}_n$. В то же время найденные поправочные члены (4.9) в анзаце (2.3) включают и другие характеристики: объем $|\Theta|$ ядра Θ сочленения Ξ и, что особенно важно, матрицу поляризации M . Именно последняя зависит не только от скалярных величин $|\Theta|$ и $|\omega_1|, \dots, |\omega_N|$, но и от общей формы волновода Ξ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
3. Wilcox C.H. Scattering Theory for Diffraction Gratings. New York, Berlin: Springer, 1983.
4. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // ТМФ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
5. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
6. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Vol. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
8. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // *Функциональный анализ и его приложения.* 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
9. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи матем. наук.* 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
10. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Труды Московск. матем. общества.* 1963. Т. 16. С. 219–292.
11. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
12. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966.
13. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // *Матем. сборник.* 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
14. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // *ZAMM.* 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.

The Scattering Matrix at Small Frequencies in a Junction of Cylindrical Acoustic Waveguides

S. A. Nazarov[#]

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

[#]*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We consider a junction of N semi-infinite cylindrical acoustic waveguides, and, for a small frequency, construct asymptotics of the scattering matrix. The effects of almost complete reflection and transmission are found only in the cases $N = 1$ and $N = 2$ under condition of equal area of cross-sections while for other case no anomaly is present

Keywords: junction of semi-infinite cylindrical acoustic waveguides, small frequencies, scattering and polarization matrices, asymptotics, Weinstein anomalies

REFERENCES

1. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics. N.Y.: Springer, 1985. xxx+322 pp.
2. *Mittra R., Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. N.Y.: MacMillan, 1971.
3. *Wilcox C.H.* Scattering Theory for Diffraction Gratings. N.Y.; Berlin: Springer, 1983.
4. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // *Theor.&Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2. pp. 606–627.
5. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press. 1964.
6. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. L.: Am. Math. Soc., 1992. 281 p.
7. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.
8. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // *Funct. Anal. Appl.*, 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
9. *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter // in: *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 1962, vol. 20, pp. 239–364.
10. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1967, vol. 16, pp. 227–313.
11. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
12. *Weinstein L.A.* The Theory of Diffraction and the Factorization Method. Boulder CO: Golem Press, 1969. 411 p.
13. *Nazarov S.A.* Scattering anomalies in a resonator above thresholds of the continuous spectrum // *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 6, pp. 782–813.
14. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1245–1260.