

УДК 539.4

**КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ
ПЕРЕКРЕСТНО-АРМИРОВАННОЙ СРЕДЫ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ
ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЛОСКОМ
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

© 2020 г. Т. П. Романова^{1,*}, А. П. Янковский^{1,**}

¹ *Институт теоретической и прикладной механики, им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

* e-mail: lab4nemir@gmail.com

**e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.01.2020 г.

После доработки 14.04.2020 г.

Принята к публикации 27.07.2020 г.

Разработана структурная модель гибридных композитов, перекрестно-армированных параллельно некоторой плоскости, для аналитического построения поверхностей и кривых текучести композиции при учете плоского напряженного состояния во всех составляющих. Материалы компонентов однородны и изотропны, могут по разному сопротивляться растяжению и сжатию. Их механическое поведение описывается ассоциированным законом течения для жесткопластического тела с кусочно-линейными условиями текучести типа Йогансена (Johansen), Треска (Tresca), Ху (Hu), Ишлинского–Ивлева. Рассмотрены варианты расположения волокон вдоль траекторий главных напряжений в композиции и случаи перекрестного углового армирования, симметричного относительно этих траекторий. Исследовано влияние структуры армирования (направлений и плотностей) на размеры и форму кривых текучести и предельных кривых композиций. Численно показано, что пластическое течение в композициях ассоциировано с расчетными кривыми (поверхностями) текучести армированных сред. В качестве примера построены кривые текучести для металлокомпозиций с высокопрочным и низкопрочным связующим и предельные кривые для стеклопластиковых армированных сред. Выполнено сравнение расчетных кривых текучести композиций с аналогичными кривыми, полученными в рамках структурной модели с одномерным напряженным состоянием в арматуре.

Ключевые слова: гибридный композит, структурная модель, плоско-перекрестное армирование, жесткопластический материал, разносопротивляющийся материал, плоское напряженное состояние, критерий текучести типа Йогансена, критерий текучести типа Треска, критерий текучести Ху, критерий текучести Ишлинского–Ивлева

DOI: 10.31857/S0032823520050082

Введение. Изделия из композиционных материалов (КМ) имеют широкое применение [1–7]. Сочетание относительной легкости и высокой прочности КМ наиболее ярко проявляется в тонкостенных элементах конструкций типа пластин и оболочек [4, 8, 9], в которых часто возникает обобщенное плоское напряженное состояние (ПНС) или близкое к нему. Современные тонкостенные композитные изделия могут подвергаться высокоинтенсивному воздействию [3–5, 9], при котором компоненты компо-

зиции деформируются неупруго. Моделирование пластического поведения волокнистых пластин и оболочек сейчас находится в стадии становления.

При теоретическом анализе проблемы исчерпания несущей способности композитной конструкции необходима информация о поверхности текучести для армированной среды. Определение поверхности текучести – самостоятельная задача структурной механики композитных сред. Для расчета прочностных свойств волокнистых композитов, с учетом объемного содержания армирующих элементов, первой использована нитяная модель [10], в которой не рассматривается наличие связующей матрицы. Принято во внимание [11] влияние связующего материала в однонаправленно армированном КМ; при этом в волокнах учтены только продольные напряжения – так называемая, модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах (МОНСВ), которая была обобщена [12] на случай плоского армирования по произвольным перекрестным направлениям. Структурные соотношения [12] в сочетании с определяющими уравнениями жесткопластического тела для компонентов позволили моделировать предельные состояния тонкостенных конструкций слоисто-волокнистой структур и построить при ПНС предельные кривые и кривые текучести для слоев с разными типами армирования. Были предложены [13] упрощенные условия текучести слоистых элементов при ортогональных направлениях укладки волокон. Напряженное состояние в арматуре здесь также принято одномерным.

Рассмотрены разные аспекты проблемы гомогенизации дисперсно-упрочненных и волокнистых композитных материалов из упругопластически деформируемых компонентов [3, 14–20]. Несущая способность, вычисляемая на основе таких решений, соответствует определению несущей способности по первому предельному состоянию, когда пластическое течение впервые начинается в одном из компонентов. При проектировании композитных изделий, рассчитанных по первому предельному состоянию, несущая способность высокопрочной арматуры используется неэффективно: в ней наибольшее значение интенсивности напряжений намного меньше предела текучести. Используемая в настоящем исследовании жесткопластическая модель, в отличие от приведенных выше моделей, позволяет определить несущую способность без выполнения полного упругопластического пошагового анализа при пропорционально возрастающем нагружении, т.е. без учета истории нагружения, а найденная при этом предельная нагрузка соответствует определению несущей способности элементов по второму предельному состоянию.

Обсуждены [21] вопросы проявления разнсопротивляемости материалов, возникновения ее в процессе технологической обработки [22–24] и актуальности проблемы математического моделирования пластического деформирования КМ из таких материалов. Учтена [12, 13] разнсопротивляемость арматуры. На основе нитяной структурной модели и теории предельного равновесия получены [25] предельные нагрузки для железобетонных плит. Структурные модели [12] позже были обобщены на случаи, когда все компоненты по разному сопротивляются растяжению–сжатию, и до настоящего времени, наряду с моделью [14], используются для расчетов предельных состояний армированных тонкостенных элементов [26–30].

В рамках МОНСВ волокна не воспринимают нормальные и касательные напряжения в поперечном направлении. Такое допущение в практических расчетах возможно при сильно нарушенном сцеплении между связующим и арматурой, что часто наблюдается при перекрестном армировании [31, 32]. Современные технологии позволяют создавать волокнистые материалы с хорошей адгезией между составляющими композициями, которую при моделировании можно условно считать идеальной. Тогда для выполнения условий полного контакта арматуры со связующим необходимо учитывать сложное напряженное состояние во всех компонентах. Поэтому задача построения поверхностей текучести волокнистых сред при учете сложного напряженного состояния в арматуре является актуальной. Эта проблема исследована [33] в случае, когда

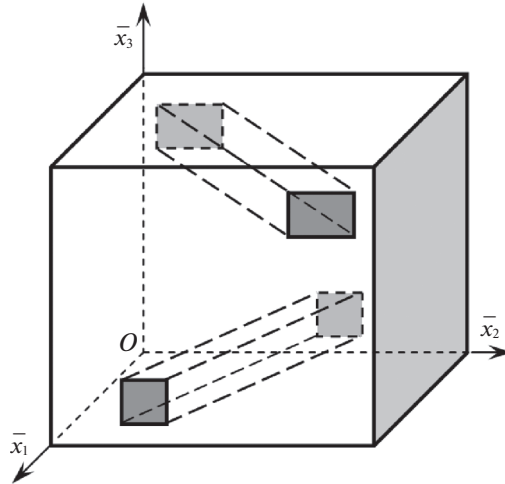


Рис. 1. Малый элемент армированной среды с двумя перекрестно направленными волокнами разных семейств.

жесткопластические материалы компонентов одинаково сопротивляются растяжению и сжатию и подчиняются критерию текучести Треска [23], а волокна расположены по направлениям главных напряжений в композитной среде при ПНС. Было продемонстрировано [33], что возможны такие композиции, для которых некоторые варианты МОНСВ занижают расчетные значения предела текучести в направлениях, ортогональных направлениям волокон, в результате чего недооценивается прочность армированных элементов конструкций.

В настоящей работе рассмотрено построение поверхностей и кривых текучести плоско-перекрестно армированных в произвольных направлениях гибридных композитов при ПНС и учете сложного напряженного состояния во всех компонентах композиции. Принято, что композиция состоит из жесткопластических материалов, имеющих разные свойства на растяжение и сжатие, а их кривые текучести в главных направлениях при ПНС являются кусочно-линейными [34–36].

1. Формулировка задачи, основные предположения. В глобальной декартовой прямоугольной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ рассмотрим композитную среду регулярной структуры, армированную K семействами непрерывных прямолинейных волокон по направлениям, параллельным отсчетной плоскости $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ (рис. 1, где изображен малый элемент КМ в случае $K = 2$). Для определенности и простоты принимаем, что арматура имеет прямоугольные поперечные сечения, две стороны которых параллельны оси $O\bar{x}_3$, т.е. каждое волокно имеет две вертикальные и две горизонтальные боковые грани. Можно показать [33], что все полученные в настоящем исследовании результаты справедливы для арматуры с произвольной формой сечения (круглой, шестиугольной и др. [37]).

Относительное объемное содержание k -го компонента композиции обозначим ω_k , $0 \leq k \leq K$, где индекс $k = 0$ соответствует связующему, $k \geq 1$ – волокнам k -го семейства. Для ω_k выполняется условие

$$\sum_{k=0}^K \omega_k = 1 \quad (1.1)$$

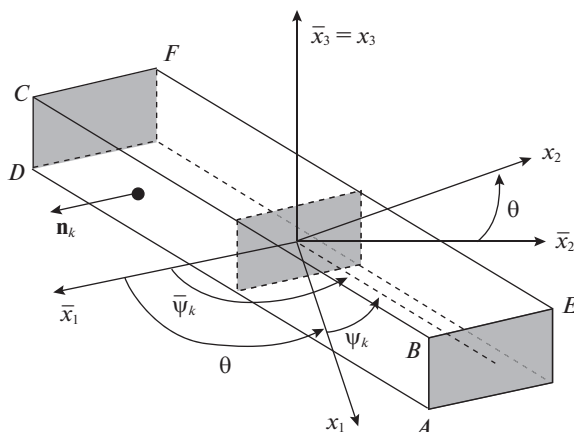


Рис. 2. Взаимная ориентация глобальной и локальной систем координат.

Величина ω_k при $k \geq 1$ является плотностью армирования k -м компонентом композиции.

Величины, относящиеся к глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, будем обозначать чертой сверху. Направление армирования волокнами k -го семейства определяется углом $\bar{\Psi}_k$, отсчитываемым от положительного направления оси $O\bar{x}_1$ против часовой стрелки (рис. 2).

Определить действительное распределение напряжений в композитной среде, в которой связующий материал содержит многочисленные цилиндрические включения, сложно даже для однонаправленно армированной линейно-упругой среды [38–42]. Это затруднительно и в рассматриваемом случае жесткопластического деформирования материалов компонентов при произвольном перекрестном армировании. Для построения пригодных в инженерных расчетах кривых и поверхностей текучести рассматриваемой композиции примем гипотезы, схожие с использованными в [33, 39].

1. На макроуровне КМ представляет собой сплошное однородное анизотропное тело. При достаточно густом и равномерном наполнении связующей матрицы армирующими волокнами это допущение вполне приемлемо. К такому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [38–42].

2. Между волокнами и связующей матрицей реализуется идеальный механический контакт (идеальная адгезия).

3. В пределах репрезентативной ячейки, выделенной из армированной среды на миниуровне, напряжения, деформации и скорости деформаций во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффекты высших порядков, связанные с изменением полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, не учитываем. Доводы допустимости такого предположения приведены в [33].

4. Усредненные напряжения, деформации и их скорости в композиции определяются усреднением по объему представительного элемента [38, 40]. Согласно предположению 3, они пропорциональны объемному содержанию каждого компонента ω_k , $0 \leq k \leq K$.

5. В композитной среде реализуется ПНС: $\bar{\sigma}_{i3} = 0$, $i = \bar{1}, \bar{3}$.

б. Материалы компонентов однородны и изотропны. Их механическое поведение подчиняется ассоциированному закону течения для жесткопластического тела с кусочно-линейными критериями текучести типа Треска (Treska), Йогансена (Johansen) [43], Ху (Hu) [34], Ишлинского–Ивлева [35] и др. [36].

2. Произвольное перекрестное армирование. Вывод соотношений на кривых текучести композиции. В силу предположений 3 и 4 усредненные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и скорости деформаций $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}$ в композиции вычисляются через напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$ и скорости деформаций $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^{(k)}$ в составляющих композиции по формулам:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{k=0}^K \omega_k \bar{\sigma}_{ij}^{(k)}, \quad \dot{\bar{\epsilon}}_{ij} = \sum_{k=0}^K \omega_k \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^{(k)}; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (2.1)$$

где точка означает частную производную по времени.

По предположению 2, на поверхностях контакта волокна k -го семейства со связующим материалом для напряжений справедливо (рис. 2) [39]:

$$\begin{aligned} ABCD : \quad & \bar{\sigma}_{13}^{(k)} \bar{n}_1^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(k)} \bar{n}_2^{(k)} = \bar{\sigma}_{13}^{(0)} \bar{n}_1^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(0)} \bar{n}_2^{(k)} \\ BCFE : \quad & -\bar{\sigma}_{13}^{(k)} \bar{n}_2^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(k)} \bar{n}_1^{(k)} = -\bar{\sigma}_{13}^{(0)} \bar{n}_2^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(0)} \bar{n}_1^{(k)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$BCFE : \quad \bar{\sigma}_{33}^{(k)} = \bar{\sigma}_{33}^{(0)}; \quad 1 \leq k \leq K \quad (2.3)$$

$$\bar{n}_1^{(k)} = \cos(\bar{\psi}_k \pm \pi/2), \quad \bar{n}_2^{(k)} = \sin(\bar{\psi}_k \pm \pi/2) \quad (2.4)$$

Здесь $\bar{n}_1^{(k)}, \bar{n}_2^{(k)}$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали \mathbf{n}_k к поверхности $ABCD$. Равенства (2.2), (2.3) выполняются не только на боковых поверхностях $ABCD$ и $BCFE$ арматуры k -го семейства, но и на противоположных гранях (см. рис. 2), поэтому в равенстве (2.4) указаны два знака (\pm).

Из равенства (2.2) при учете соотношений (2.4) получим

$$\bar{\sigma}_{13}^{(k)} = \bar{\sigma}_{13}^{(0)}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(k)} = \bar{\sigma}_{23}^{(0)}; \quad 1 \leq k \leq K \quad (2.5)$$

Подставим равенства (2.3) и (2.5) в первое равенство (2.1) при $i = 1-3$ и $j = 3$. Тогда на основании предположения 5 при учете условия (1.1) имеем

$$\bar{\sigma}_{i3}^{(k)} = \bar{\sigma}_{i3} = 0; \quad 0 \leq k \leq K, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.6)$$

Из равенств (2.6) вытекает, что в рамках используемых предположений во всех материалах композиции также имеет место ПНС.

В силу предположения 5 для построения поверхности текучести армированной среды в трехмерном пространстве усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ следует рассмотреть во всех составляющих композиции все возможные виды напряженного состояния $\bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}$ и $\bar{\sigma}_{12}^{(k)}$ (см. (2.1) и (2.6)), удовлетворяющие критериям текучести соответствующего компонента композиции (см. предположение б). Произвольное ПНС может быть задано тремя напряжениями $\bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}$ и $\bar{\sigma}_{12}^{(k)}$ или двумя главными напряжениями $\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}$ и углом θ_k между направлением главного напряжения $\bar{\sigma}_1^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) и осью $O\bar{x}_1$. Поэтому введем локальную декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ ($Ox_3 = O\bar{x}_3$), которая связана с направлениями главных напряжений в связующем ($k = 0$). Угол между направлением главного напряжения $\sigma_1^{(0)}$ и осью $O\bar{x}_1$ обозначим θ (см. рис. 2). В отличие от величин в глобальной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ величины, относящиеся к локальной системе $Ox_1x_2x_3$, будем обозначать без черты сверху.

В локальной системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты тензора напряжений в k -м материале композиции обозначим $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$ и $\sigma_{12}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$). Для них при $k = 0$ имеют место равенства:

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_1^{(0)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_2^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = 0 \quad (2.7)$$

В системе $Ox_1x_2x_3$ остаются справедливыми равенства (2.1) и (2.6), где нужно выполнить формальные замены

$$\bar{\sigma}_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}, \quad \bar{\dot{\epsilon}}_{ij} \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{(k)} \rightarrow \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \bar{\dot{\epsilon}}_{ij}^{(k)} \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)}; \quad 0 \leq k \leq K, \quad i, j = \overline{1,3} \quad (2.8)$$

при учете обозначений (2.7).

Согласно равенствам (2.6), (2.7) и предположению 6, при ПНС кривая текучести для k -го компонента в главных напряжениях $\sigma_1^{(k)}$ и $\sigma_2^{(k)}$ является кусочно-линейной замкнутой линией, выпуклой (в силу выполнения постулата Друккера [34–36]) и симметричной относительно прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, $0 \leq k \leq K$ (рис. 3). Каждый прямолинейный участок этой линии соответствует определенному режиму пластического течения. В силу симметрии и для удобства изложения считаем, что кривая текучести состоит из четного числа $2N_k$ отрезков. Обозначим угловые точки на линии как $A_n^{(k)}$ ($0 \leq n \leq 2N_k$, $0 \leq k \leq K$), обходя ее против часовой стрелки, начиная от точки, лежащей на прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$ в третьем квадранте плоскости $\sigma_1^{(k)}\sigma_2^{(k)}$ (см. рис. 3а). Точка $A_n^{(k)}$ имеет координаты $(s_{1,n}^{(k)}, s_{2,n}^{(k)})$. Вершины $A_0^{(k)}$ и $A_{2N_k}^{(k)}$ совпадают. В общем случае отрезки $A_{N_k-1}^{(k)}A_{N_k+1}^{(k)}$ и $A_{2N_k-1}^{(k)}A_1^{(k)}$ могут лежать на одной прямой, например, в случае критерия Ишлинского–Ивлева [35]. Режим, соответствующий отрезку $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$, назовем n -м режимом текучести в k -м компоненте. Для режимов $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$ ($1 \leq n \leq N_k$), лежащих ниже прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, выполняется

$$\sigma_1^{(k)} \geq \sigma_2^{(k)}; \quad 0 \leq k \leq K, \quad (2.9)$$

и для режимов $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$ ($N_k + 1 \leq n \leq 2N_k$), лежащих выше прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, будет $\sigma_1^{(k)} \leq \sigma_2^{(k)}$, а равенство здесь и в (2.9) возможно только в точках $A_0^{(k)}$ и $A_{N_k}^{(k)}$. В силу симметрии кривой текучести рассмотрим только вариант (2.9).

На n -м режиме напряжения $\sigma_1^{(k)}$ и $\sigma_2^{(k)}$ связаны соотношениями

$$A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)} : \quad \Delta_{2,n}^{(k)}\sigma_1^{(k)} - \Delta_{1,n}^{(k)}\sigma_2^{(k)} = \Delta_n^{(k)} \quad (1 \leq n \leq 2N_k, 0 \leq k \leq K) \quad (2.10)$$

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_{2,n}^{(k)}s_{1,n-1}^{(k)} - \Delta_{1,n}^{(k)}s_{2,n}^{(k)} + \Delta_{1,n}^{(k)}\Delta_{2,n}^{(k)}, \quad \Delta_{i,n}^{(k)} = s_{i,n}^{(k)} - s_{i,n-1}^{(k)} \quad (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

При ПНС главные напряжения $\sigma_i^{(k)}$ равны:

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} - (-1)^i \sqrt{(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)})^2 + 4(\sigma_{12}^{(k)})^2} \right]; \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (2.12)$$

где знак перед радикалом выбран с учетом (2.9).

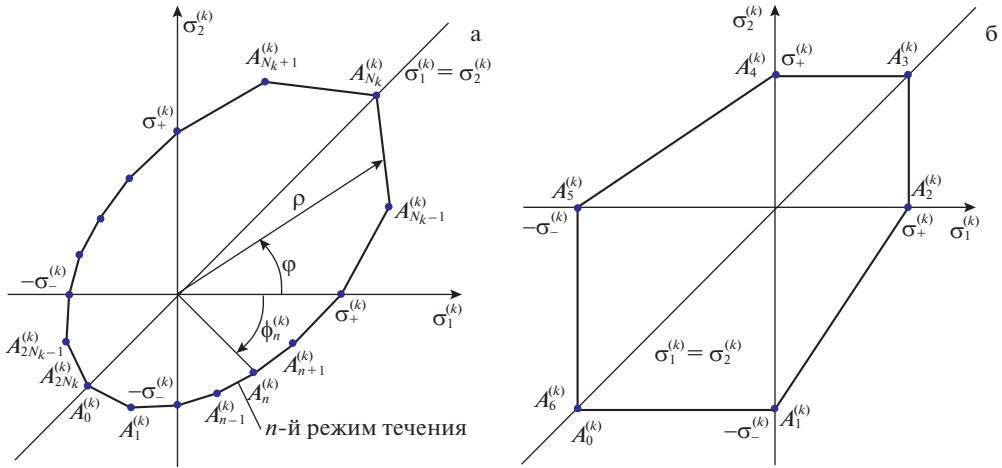


Рис. 3. Кусочно-линейные кривые текучести в главных напряжениях при ПНС: а – общий случай критерия пластичности; б – случай критерия пластичности Ух.

Из (2.10), (2.12) получим, что условие текучести (пластичности) k -го компонента композиции $f_n^{(k)}$ на n -м режиме имеет вид рациональной функции:

$$f_n^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}) \equiv a_n^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)})^2 - d_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + a_n^{(k)}(\sigma_{22}^{(k)})^2 + e_n^{(k)}(\sigma_{12}^{(k)})^2 - b_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - b_n^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - c_n^{(k)} = 0; \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 0 \leq k \leq K \quad (2.13)$$

$$a_n^{(k)} = \Delta_{1,n}^{(k)}\Delta_{2,n}^{(k)}, \quad b_n^{(k)} = \Delta_n^{(k)}(\Delta_{1,n}^{(k)} - \Delta_{2,n}^{(k)}), \quad c_n^{(k)} = (\Delta_n^{(k)})^2 \quad (2.14)$$

$$d_n^{(k)} = (\Delta_{1,n}^{(k)})^2 + (\Delta_{2,n}^{(k)})^2, \quad e_n^{(k)} = (\Delta_{1,n}^{(k)} + \Delta_{2,n}^{(k)})^2$$

Если n -й режим является горизонтальным или вертикальным (см. отрезки $A_0^{(k)}A_1^{(k)}$ и $A_3^{(k)}A_4^{(k)}$ или $A_2^{(k)}A_3^{(k)}$ и $A_5^{(k)}A_6^{(k)}$ на рис. 3 б), то $\Delta_{2,n}^{(k)} = 0$ или $\Delta_{1,n}^{(k)} = 0$ (см. (2.11)). Из выражений (2.14) следует $a_n^{(k)} = 0$ и $d_n^{(k)} = e_n^{(k)}$. Тогда функция (2.13) имеет вид

$$f_n^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}) \equiv -d_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + d_n^{(k)}(\sigma_{12}^{(k)})^2 - b_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - b_n^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - c_n^{(k)} = 0 \quad (2.15)$$

$$1 \leq n \leq N_k, \quad 0 \leq k \leq K$$

Рассмотрим главные напряжения в связующем материале $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$ в полярных координатах (r, φ) :

$$\sigma_1^{(0)}(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad \sigma_2^{(0)}(r, \varphi) = r \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Тогда условие текучести для связующего материала примет вид $r = \rho(\varphi)$ (рис. 3а), а напряжения $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$, удовлетворяющие этому условию, можно представить в параметрическом виде:

$$\sigma_1^{(0)}(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad \sigma_2^{(0)}(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.16)$$

Для n -го режима кривой текучести из выражений (2.16) и (2.10) при $k = 0$ получим выражение для $\rho(\varphi)$:

$$\rho(\varphi) = \frac{\Delta_n^{(0)}}{\Delta_{2,n}^{(0)} \cos \varphi - \Delta_{1,n}^{(0)} \sin 2\varphi}; \quad \phi_{n-1}^{(0)} \leq \varphi \leq \phi_n^{(0)}, \quad 1 \leq n \leq 2N_0 \quad (2.17)$$

$$\phi_n^{(0)} = \arctg \left(s_{2,n}^{(0)} / s_{1,n}^{(0)} \right), \quad (2.18)$$

где $\Delta_{i,n}^{(0)}$ и $\Delta_n^{(0)}$ определены в (2.11), угол $\phi_n^{(0)}$ показан на рис. 3а при $k = 0$. Далее напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($1 \leq k \leq K$, $i, j = 1, 2$) также выразим через параметр φ .

В силу предположения 2 из условия совпадения напряжений на боковой поверхности арматуры k -го семейства $ABCD$ и ей противоположной (см. рис. 2) при учете (2.7) кроме первого соотношения (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} n_1^{(k)}(\theta) + \sigma_{12}^{(k)} n_2^{(k)}(\theta) &= \sigma_1^{(0)}(\varphi) n_1^{(k)}(\theta) \\ \sigma_{12}^{(k)} n_1^{(k)}(\theta) + \sigma_{22}^{(k)} n_2^{(k)}(\theta) &= \sigma_2^{(0)}(\varphi) n_2^{(k)}(\theta); \quad 1 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} n_1^{(k)}(\theta) &= -\sin \psi_k(\theta) = -\sin(\bar{\psi}_k - \theta) \\ n_2^{(k)}(\theta) &= \cos \psi_k(\theta) = \cos(\bar{\psi}_k - \theta); \quad 1 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $\psi_k(\theta) = \bar{\psi}_k - \theta$ – угол, задающий направление волокон k -го семейства в локальной системе $Ox_1x_2x_3$ и отсчитываемый от направления Ox_1 ; $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$ – направляющие косинусы вектора единичной нормали \mathbf{n}_k к боковой поверхности $ABCD$ (и ей противоположной), определенные в системе $Ox_1x_2x_3$.

Из равенств (2.19) при $n_1^{(k)} \neq 0$ и $n_2^{(k)} \neq 0$ получим

$$\sigma_{ii}^{(k)} = \frac{1}{n_i^{(k)}(\theta)} \left[\sigma_i^{(0)}(\varphi) n_i^{(k)}(\theta) - \sigma_{12}^{(k)} n_j^{(k)}(\theta) \right] \quad (i, j = 1, 2, i \neq j; 1 \leq k \leq K) \quad (2.21)$$

Подставим (2.21) в условие текучести (2.13) при $k \geq 1$ и получим для $\sigma_{12}^{(k)}$ квадратное уравнение (при $i, j = 1, 2, i \neq j$):

$$\begin{aligned} A_n^{(k)}(\theta) \left(\sigma_{12}^{(k)} \right)^2 + B_n^{(k)}(\theta, \varphi) \sigma_{12}^{(k)} + C_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= 0; \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K \\ A_n^{(k)}(\theta) &= a_n^{(k)} \left[\left(n_1^{(k)}(\theta) \right)^4 + \left(n_2^{(k)}(\theta) \right)^4 \right] + \left(e_n^{(k)} - d_n^{(k)} \right) \left(n_1^{(k)}(\theta) n_2^{(k)}(\theta) \right)^2 \\ B_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^2 n_j^{(k)}(\theta) \left(n_i^{(k)}(\theta) \right)^3 \left(d_n^{(k)} \sigma_i^{(0)}(\varphi) - 2a_n^{(k)} \sigma_j^{(0)}(\varphi) + b_n^{(k)} \right) \\ C_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= \left(n_1^{(k)}(\theta) n_2^{(k)}(\theta) \right)^2 \left\{ a_n^{(k)} \left[\left(\sigma_1^{(0)}(\varphi) \right)^2 + \left(\sigma_2^{(0)}(\varphi) \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - d_n^{(k)} \sigma_1^{(0)}(\varphi) \sigma_2^{(0)}(\varphi) - b_n^{(k)} \left(\sigma_1^{(0)}(\varphi) + \sigma_2^{(0)}(\varphi) \right) - c_n^{(k)} \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Решения уравнения (2.22) при $A_n^{(k)} \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{12,n}^{(k)}(\theta, \varphi) &= \frac{-B_n^{(k)}(\theta, \varphi) \pm \sqrt{D_n^{(k)}(\theta, \varphi)}}{2A_n^{(k)}(\theta)}; \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K \\ D_n^{(k)}(\theta, \varphi) &= \left(B_n^{(k)}(\theta, \varphi) \right)^2 - 4A_n^{(k)}(\theta) C_n^{(k)}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Знак “±” в решении (2.23) выбирается из условия совпадения скоростей деформаций волокна k -го семейства и связующего материала в направлении армирования, которое рассмотрено в разделе 4. При армировании волокнами k -го семейства вдоль направления первого главного напряжения в связующем ($\psi_k = \bar{\psi}_k - \theta = 0$) или вдоль направления второго главного напряжения ($\psi_k = \pi/2$) при любом выборе знака “±” для решения (2.23) выполняется $\sigma_{12,n}^{(k)} = 0$ ($1 \leq n \leq N_k, 1 \leq k \leq K$).

Для горизонтального или вертикального n -го режима (отрезки $A_0^{(k)} A_1^{(k)}, A_3^{(k)} A_4^{(k)}, A_2^{(k)} A_3^{(k)}, A_5^{(k)} A_6^{(k)}$ на рис. 3б из выражений (2.15) и (2.21) имеем ($n_1^{(k)} \neq 0$ и $n_2^{(k)} \neq 0$):

$$\sigma_{12,n}^{(k)}(\theta, \varphi) = -C_n^{(k)}(\theta, \varphi) / B_n^{(k)}(\theta, \varphi); \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K \quad (2.24)$$

Если $n_i^{(k)} = 0$ и $n_j^{(k)} = \pm 1$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$), то из (2.19) следует

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_j^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad (2.25)$$

а напряжение $\sigma_{ii}^{(k)}$ для не горизонтального и не вертикального n -го режима определяется из (2.13) при учете (2.25):

$$a_n^{(k)} \left(\sigma_{ii}^{(k)} \right)^2 + B_{i,n}^{(k)}(\varphi) \sigma_{ii}^{(k)} + C_{i,n}^{(k)}(\varphi) = 0, \quad (2.26)$$

где $1 \leq n \leq N_k, 1 \leq k \leq K, i, j = 1, 2, i \neq j$.

$$B_{i,n}^{(k)}(\varphi) = -d_n^{(k)} \sigma_j^{(0)}(\varphi) - b_n^{(k)}, \quad C_{i,n}^{(k)}(\varphi) = a_n^{(k)} \left(\sigma_j^{(0)}(\varphi) \right)^2 - b_n^{(k)} \sigma_j^{(0)}(\varphi) - c_n^{(k)}$$

Решения уравнения (2.26) имеют вид ($n_i^{(k)} = 0, n_j^{(k)} = \pm 1, (i, j = 1, 2, i \neq j)$):

$$\sigma_{ii,n}^{(k)}(\varphi) = \frac{-B_{i,n}^{(k)}(\varphi) \pm \sqrt{\left(B_{i,n}^{(k)}(\varphi) \right)^2 - 4a_n^{(k)} C_{i,n}^{(k)}(\varphi)}}{2a_n^{(k)}} \quad (2.27)$$

Знак “±” в (2.27) выбирается из тех же условий, что и (2.23), которые рассмотрены в разд. 4. Для горизонтального или вертикального n -го режима напряжение $\sigma_{ii}^{(k)}$ определяется из (2.15), (2.25) ($1 \leq n \leq N_k, 1 \leq k \leq K, i, j = 1, 2, i \neq j$):

$$\sigma_{ii,n}^{(k)}(\varphi) = -\left(b_n^{(k)} \sigma_j^{(0)} + c_n^{(k)} \right) / \left(d_n^{(k)} \sigma_j^{(0)} + b_n^{(k)} \right) \quad (2.28)$$

Соотношения (2.23), (2.24) при $n_1^{(k)} \neq 0$ и $n_2^{(k)} \neq 0$ и равенства (2.25), (2.27), (2.28) при $n_i^{(k)} = 0$ и $n_j^{(k)} = \pm 1$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$) дают двухпараметрические зависимости для напряжений в арматуре

$$\sigma_{ij,n}^{(k)} = \sigma_{ij,n}^{(k)}(\theta, \varphi); \quad 0 \leq \theta, \quad \varphi < 2\pi, \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.29)$$

Усредним напряжения (2.29) (с учетом соотношений (2.7) и (2.16)) по объему представительного элемента композиции (см. (2.1), принимая во внимание (2.8)), тогда получим двухпараметрическую зависимость усредненных напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^K \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}(\theta, \varphi); \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.30)$$

где правые части известны. В зависимостях (2.30) у напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ опущен нижний индекс n (см. (2.23), (2.27) и (2.29)), т.к. подразумевается, что при текущем значении φ

в равенствах (2.23) и (2.27) не только однозначно выбран знак “±”, но и однозначно определен номер n режима пластического течения для k -го компонента.

Соотношения (2.30) задают параметрическую от (θ, φ) зависимость поверхности текучести рассматриваемой среды в трехмерном пространстве напряжений σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} , определенных в локальной системе $Ox_1x_2x_3$. В глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ усредненные напряжения $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ связаны с σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} следующими равенствами, полученными при повороте системы координат на угол $-\theta$ вокруг оси $O\bar{x}_3 = O x_3$ [39] ($0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(\theta, \varphi) &= \sigma_{11}(\theta, \varphi) \cos^2 \theta + \sigma_{22}(\theta, \varphi) \sin^2 \theta - \sigma_{12}(\theta, \varphi) \sin 2\theta \\ \bar{\sigma}_{22}(\theta, \varphi) &= \sigma_{11}(\theta, \varphi) \sin^2 \theta + \sigma_{22}(\theta, \varphi) \cos^2 \theta + \sigma_{12}(\theta, \varphi) \sin 2\theta \\ \bar{\sigma}_{12}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} [\sigma_{11}(\theta, \varphi) - \sigma_{22}(\theta, \varphi)] \sin 2\theta + \sigma_{12}(\theta, \varphi) \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.31)$$

Искомая поверхность текучести в трехмерном пространстве усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ определяется параметрически из зависимостей (2.30) и (2.31).

3. Случай симметричного армирования. Рассмотрим интересный и практически важный пример, когда в КМ число семейств арматуры четное ($K = 2N$) и для каждого семейства определено парное ему семейство. Волокна парных семейств выполнены из одного материала ($\sigma_{\pm}^{(2k-1)} = \sigma_{\pm}^{(2k)}$, где $\sigma_{+}^{(k)}, \sigma_{-}^{(k)}$ – пределы текучести k -го компонента композиции при растяжении и сжатии), имеют одинаковые плотности армирования ($\omega_{2k-1} = \omega_{2k}$) и расположены симметрично относительно оси $O\bar{x}_1$: $\bar{\psi}_{2k-1} = -\bar{\psi}_{2k}$, $1 \leq k \leq N$ (рис. 4). Считаем, что оси $O\bar{x}_i$ ($i = 1, 2$) совпадают с направлениями главных напряжений тензора усредненных напряжений в композиции, поэтому вместе с предположением 5 выполняется условие $\bar{\sigma}_{12} \equiv 0$. В силу предположения 1 и симметрии структуры армирования относительно $O\bar{x}_1$ и $O\bar{x}_2$ эти оси совпадают с направлениями главных напряжений в связующей матрице: $O\bar{x}_i = O x_i$ ($i = 1-3$), т.е. при $k = 0$ кроме (2.6) выполняется равенство $\bar{\sigma}_{12}^{(0)} \equiv 0$. При этом значение одного из параметров фиксировано: $\theta \equiv 0$ ($\bar{\psi}_k = \psi_k$; см. (2.20) и рис. 2), а два первых равенства (2.31) при учете соотношений (2.30) однопараметрически (по φ) определяют кривую текучести композитной среды в главных усредненных напряжениях в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_i(\varphi); \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad i = 1, 2$$

На рис. 5 изображены кривые текучести, рассчитанные в качестве примера для двух металлокомпозиций, состоящих из высокопрочного титанового (сплав Бета-III: $\sigma_{\pm}^{(0)} = \sigma_{0,2}^{(0)} = 1.37$ ГПа [45]) или низкопрочного алюминиевого (сплав АДМ: $\sigma_{\pm}^{(0)} = \sigma_{0,2}^{(0)} = 30$ МПа [24]) связующего, армированного двумя ($K = 2$) семействами высокопрочной стальной проволоки марки У8А ($\sigma_{\pm}^{(k)} = \sigma_{0,2}^{(k)} = 4$ ГПа [24], $k = 1, 2$, где $\sigma_{0,2}^{(k)}$ – условный предел текучести). Для всех компонентов этих композиций $\sigma_{+}^{(k)} = \sigma_{-}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) и справедлив пластический критерий Треска (см. рис. 3б при $\sigma_{+}^{(k)} = \sigma_{-}^{(k)}$).

Рассмотрены два варианта симметричного армирования при условии одинакового количества арматуры (см. рис. 4 при $k = 1$):

а) угловое перекрестно-симметричное армирование: $\psi_2 = -\psi_1, \omega_1 = \omega_2 = 0.25$;

б) ортогональное армирование вдоль направлений главных напряжений в композиции: $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/2, \omega_1 + \omega_2 = 0.5$.

На рис. 5а для варианта армирования а) сплошные кривые 1 и 2 рассчитаны для Ti–У8А-композиции, а кривая 3 – для АДМ–У8А-композиции. Кривые 1 и 3 соответ-

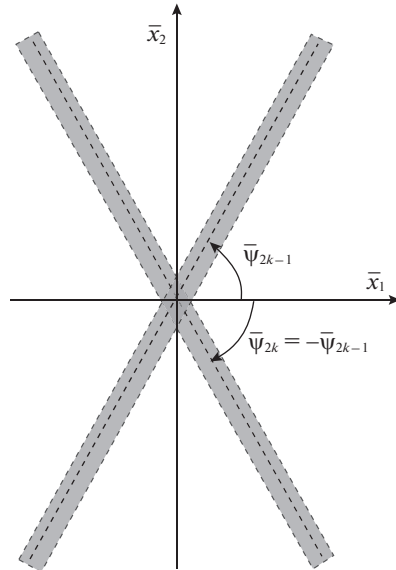


Рис. 4. Волокна двух семейств, симметрично уложенных относительно направлений главных напряжений в композиции.

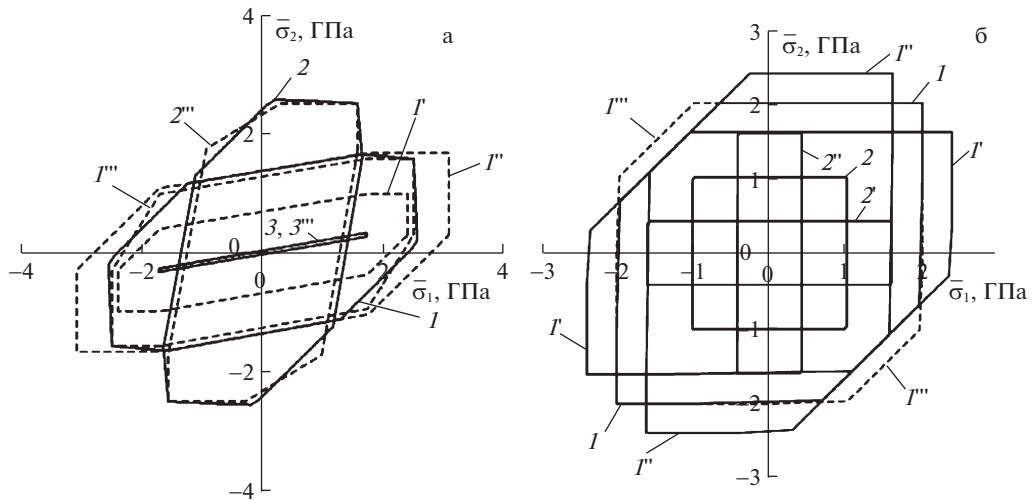


Рис. 5. Кривые текучести металлокомпозиций: а – перекрестно-симметричное угловое армирование; б – ортогональное армирование вдоль направлений главных напряжений в композиции.

ствуют углом армирования $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/8$, а кривая 2 – углом $\psi_1 = -\psi_2 = 3\pi/8$. В случае АДМ–У8А-композиции при таких углах расположения волокон кривая текучести КМ получается зеркальным отражением кривой 3 относительно прямой $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ и на рис. 5а не изображена, чтобы его не перегружать. Из сравнения кривых 1 и 2 на рис. 5а видно, что даже при использовании высокопрочного связующего материала (Ti) изме-

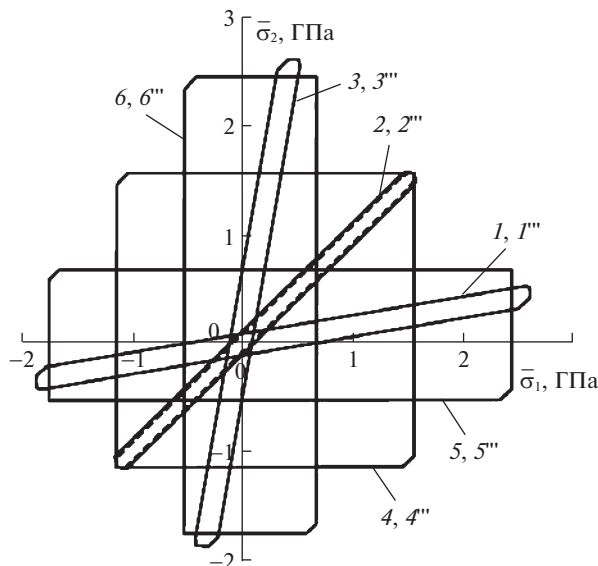


Рис. 6. Предельные кривые для стеклопластиковой композиции с разными структурами армирования.

нение углов армирования при сохранении общего количества волокон сильно меняет кривую текучести КМ. Зависимость размеров и формы кривой текучести от углов армирования еще ярче проявляется в случае низкопрочного связующего материала, например сплава АДМ (см. кривую 3 на рис. 5а).

На рис. 5б для варианта армирования б) сплошные кривые с номерами 1 рассчитаны для Ti–У8А-композиции, а кривые с номерами 2 – для АДМ–У8А-композиции. Кривые 1 и 2 получены при $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$, кривые 1' и 2' – при $\omega_1 = 0.4$ и $\omega_2 = 0.1$, а кривые 1'' и 2'' – при $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.4$. Видно, что в при низкопрочном связующем кривые текучести 2, 2' и 2'' по форме близки к прямоугольникам. Из сравнения кривых 1, 1', 1'' и 2, 2', 2'' видно, что при фиксированных углах армирования кривые текучести КМ зависят от изменения плотностей армирования ω_1 и ω_2 , причем эта зависимость проявляется тем ярче, чем больше отношение пределов текучести волокон и связующего.

На рис. 6 изображены расчетные предельные кривые для КМ, компоненты которого являются разносопротивляющимися: $\sigma_+^{(0)} = 90$ МПа, $\sigma_-^{(0)} = 111$ МПа [22] и $\sigma_+^{(k)} = 6$ ГПа, $\sigma_-^{(k)} = 4.2$ ГПа [24] ($k = 1, 2$). Армирование выполнено двумя ($K = 2$) семействами высокопрочных волокон. Такие значения $\sigma_{\pm}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) условно соответствуют эпоксидной смоле и стекловолокнам, изготовленным из расплавленного кварца. Значение $\sigma_-^{(k)}$ ($k = 1, 2$) для арматуры условно соответствует потере устойчивости в результате сдвиговой деформации [24], поэтому волокна также можно считать разносопротивляющимися растяжению–сжатию. Принято, что предельное состояние составляющих КМ описывается критерием Ху (см. рис. 3б).

На рис. 6 сплошные кривые 1–3 рассчитаны при варианте армирования а), а кривые 4–6 – для варианта армирования б). Кривые 1, 2 и 3 получены при $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/8, \pi/4$ и $3\pi/8$ соответственно. Кривая 2 характеризует предельное состояние ортогонально армированной композиции, в которой направления армирования

образуют углы $\pm\pi/4$ с направлениями главных напряжений в композиции. Из сравнения кривых 1–3 видно, что и в случае использования разносопротивляющихся составляющих КМ изменение углов армирования при сохранении общего количества волокон также существенно влияет на размеры и форму предельной кривой композиции.

Кривые 4–6 на рис. 6, как и кривая 2, рассчитаны для ортогонально армированной композиции, когда траектории укладки волокон совпадают с направлениями главных напряжений в КМ ($\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \pi/2$). Кривая 4 определена при $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$, кривая 5 – при $\omega_1 = 0.4$ и $\omega_2 = 0.1$, а кривая 6 – при $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.4$. Все кривые по форме близки к прямоугольникам. Из сравнения кривых 4–6 также следует, что при фиксированных углах армирования предельная кривая композиции значительно зависит от изменения плотностей армирования ω_1 и ω_2 .

Кривые 2 и 4 на рис. 6 демонстрируют, как сильно изменяется предельная кривая ортогонально-армированного КМ при повороте структуры армирования на угол $\pi/4$ (вокруг оси $O\bar{x}_3$) относительно направлений главных напряжений.

Отметим, в случае $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ или $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ (однонаправленное армирование, при котором направления армирования обоих семейств совпадают) предельные кривые, рассчитанные по рассматриваемому методу, совпадают с кривыми, рассчитанными по методике [21].

4. Определение усредненных скоростей деформаций композиции. Из предположения 6 и ассоциированного закона течения, для скоростей деформаций k -го компонента, определенных в системе $Ox_1x_2x_3$ (рис. 2), имеем:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \sum_{n=1}^{2N_k} c_n^{(k)} \lambda_n^{(k)} \xi_{ij,n}^{(k)}, \quad \xi_{ij,n}^{(k)} \equiv \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}, \quad \lambda_n^{(k)} > 0$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq n \leq 2N_k, \quad 0 \leq k \leq K \quad (4.1)$$

$$c_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{при } f_n^{(k)} = 0, \quad \dot{f}_n^{(k)} = \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial \sigma_{ij}^{(k)}} \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 0 \quad (\text{нагрузка}) \\ 0 & \text{при } f_n^{(k)} < 0, \quad \dot{f}_n^{(k)} < 0 \quad (\text{разгрузка}) \quad \text{или} \quad \dot{f}_n^{(k)} < 0 \end{cases}$$

$\lambda_n^{(k)}$ – неопределенный параметр; $f_n^{(k)} = 0$ – уравнение поверхности текучести k -го компонента на n -м режиме [46] (см. режим $A_{n-1}^{(k)} A_n^{(k)}$ на рис. 3а).

Применяя для функции текучести $f_n^{(k)}$ при ПНС выражение (2.13) с учетом (2.7), по формулам (4.1) получим

$$\xi_{ii,n}^{(k)} = 2a_n^{(k)} \sigma_{ii,n}^{(k)} - d_n^{(k)} \sigma_{jj,n}^{(k)} - b_n^{(k)}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2$$

$$\xi_{12,n}^{(k)} = 2e_n^{(k)} \sigma_{12,n}^{(k)} \quad (\sigma_{12,n}^{(0)} = 0); \quad 1 \leq n \leq N_k, \quad 0 \leq k \leq K \quad (4.2)$$

В силу определения системы $Ox_1x_2x_3$ из (2.7), (2.10), (4.1) и (4.2) следует

$$\xi_{ii,n}^{(0)} = -(-1)^i \Delta_{j,n}^{(0)} = \text{const}, \quad \xi_{12,n}^{(0)} = 0; \quad j = \overline{3, j}, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq n \leq 2N_0 \quad (4.3)$$

Согласно гипотезам 2 и 3, скорости деформаций волокна k -го семейства и связующего материала в направлении армирования должны совпадать, поэтому выполняются следующие кинематические соотношения [39]

$$\lambda_l^{(k)} \xi_l^{(k)} = \lambda_n^{(0)} \xi_{k,n}^{(0)}, \quad 1 \leq n \leq 2N_0, \quad 1 \leq l \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (4.4)$$

где при учете соотношений (4.3)

$$\begin{aligned}\xi_l^{(k)} &= \xi_{11,l}^{(k)} \cos^2 \psi_k + \xi_{22,l}^{(k)} \sin^2 \psi_k + \xi_{12,l}^{(k)} \sin 2\psi_k; \quad 1 \leq l \leq N_k \\ \xi_{k,n}^{(0)} &= \xi_{11,n}^{(0)} \cos^2 \psi_k + \xi_{22,n}^{(0)} \sin^2 \psi_k, \quad 1 \leq n \leq 2N_0; \quad 1 \leq k \leq K\end{aligned}\quad (4.5)$$

Так как при активном нагружении k -го компонента композиции $\dot{\lambda}_n^{(k)} > 0$, $0 \leq k \leq K$ (см. (4.1)), из соотношений (4.4) следует

$$\text{sign} \xi_l^{(k)} = \text{sign} \xi_{k,n}^{(0)}; \quad 1 \leq n \leq 2N_0, \quad 1 \leq l \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K \quad (4.6)$$

При выборе знака “±” перед радикалами в выражениях (2.23) и (2.27) следует учитывать выполнение условий (4.6) при учете соотношений (4.2), (4.3) и (4.5).

После определения знаков из решений (2.23) и (2.27) при $1 \leq n \leq N_k$ необходимо однозначно выбрать номер n -го режима текучести в арматуре k -го семейства, который соответствует текущему напряженному состоянию в связующем материале (текущему значению полярного угла φ в выражениях (2.16) и (2.17)). Для этого решения (2.23) и (2.27) нужно подставить в выражения (2.12) и определить главные напряжения $\sigma_{i,n}^{(k)} \equiv \sigma_i^{(k)} (\sigma_{11,n}^{(k)}, \sigma_{22,n}^{(k)}, \sigma_{12,n}^{(k)})$ ($1 \leq n \leq N_k$) в волокнах k -го семейства ($1 \leq k \leq K$). С учетом формул (2.10) и (2.11), режим (с номером n) пластического течения арматуры k -го семейства выбирается из условий

$$\phi_{n-1}^{(k)} \leq \phi_n^{(k)} < \phi_n^{(k)}, \quad (4.7)$$

где (см. (2.18) и рис. 3а)

$$\begin{aligned}\phi_l^{(k)} &= \text{arctg} (s_{2,l}^{(k)} / s_{1,l}^{(k)}) = \text{const}, \quad \phi_n^{(k)} = \text{arctg} (\sigma_{2,n}^{(k)} / \sigma_{1,n}^{(k)}) \neq \text{const} \\ -3\pi/4 &\leq \phi_l^{(k)} \leq \pi/4, \quad -3\pi/4 \leq \phi_n^{(k)} \leq \pi/4, \quad 0 \leq l \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K\end{aligned}\quad (4.8)$$

По условию (4.7) и соотношениям (4.8) можно однозначно определить номер n режима, который реализуется в арматуре k -го семейства при текущем значении параметра φ .

Из равенства (4.4) получим

$$\dot{\lambda}_l^{(k)} = \dot{\lambda}_n^{(0)} \xi_{k,n}^{(0)} / \xi_l^{(k)}; \quad 1 \leq n \leq 2N_0, \quad 1 \leq l \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (4.9)$$

где индекс l выбран в соответствии с условиями (4.7) при учете соотношений (4.8). Согласно выражениям (4.2), (4.3), (4.5), (2.16), (2.17) и (2.29) при учете соотношения $\psi_k(\theta) = \bar{\psi}_k - \theta$ (см. (2.20) и рис. 2), в выражении (4.9) имеем двухпараметрические представления величин $\xi_l^{(k)} = \xi_l^{(k)}(\theta, \varphi)$ и $\xi_{k,n}^{(0)} = \xi_{k,n}^{(0)}(\theta, \varphi)$.

Используя вторую формулу (2.1) при учете переобозначений (2.8) и соотношений (4.2), (4.3), (4.5) и (4.9), определим усредненные скорости деформаций композитной среды в локальной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^K \omega_k \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^K \omega_k \dot{\lambda}^{(k)} \xi_{ij}^{(k)} = \dot{\lambda}^{(0)} \sum_{k=0}^K \omega_k \xi_k^{(0)} \xi_{ij}^{(k)} / \xi^{(k)} = \dot{\lambda}^{(0)} \xi_{ij}(\theta, \varphi) \quad (4.10)$$

$$\xi_{ij}(\theta, \varphi) \equiv \sum_{k=0}^K \omega_k \xi_k^{(0)}(\theta, \varphi) \xi_{ij}^{(k)}(\theta, \varphi) / \xi^{(k)}(\theta, \varphi); \quad i, j = 1, 2 \quad (\xi_0^{(0)} / \xi^{(0)} \equiv 1) \quad (4.11)$$

В соотношениях (4.10) и (4.11) опущены нижние индексы n и l (выполнены замены $\dot{\lambda}_l^{(k)} \rightarrow \dot{\lambda}^{(k)}$, $\dot{\lambda}_n^{(0)} \rightarrow \dot{\lambda}^{(0)}$, $\xi_{k,n}^{(0)} \rightarrow \xi_k^{(0)}$, $\xi_l^{(k)} \rightarrow \xi^{(k)}$, $\xi_{ij,l}^{(k)} \rightarrow \xi_{ij}^{(k)}$, $\xi_{ij,n}^{(0)} \rightarrow \xi_{ij}^{(0)}$), так как предполагается, что на основании формул (4.7) и (4.8) уже однозначно определен номер l -го режима в арматуре k -го семейства, соответствующий n -му текущему (по φ) номеру режима в связующей матрице.

Согласно соотношениям (4.2), (4.5) и (4.11), зависимости (4.10) параметрически (θ, φ) задают компоненты тензора усредненных скоростей деформаций рассматриваемого КМ, определенные в локальной системе $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 2). Для определения компонент усредненных скоростей деформаций композиции в глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ($\bar{\dot{\epsilon}}_{ij} = \dot{\lambda}^{(0)}\bar{\xi}_{ij}$, $i, j = 1, 2$) нужно применять формулы пересчета, аналогичные (2.31) [39] ($0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$):

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{11}(\theta, \varphi) &= \xi_{11}(\theta, \varphi) \cos^2 \theta + \xi_{22}(\theta, \varphi) \sin^2 \theta - \xi_{12}(\theta, \varphi) \sin 2\theta \\ \bar{\xi}_{22}(\theta, \varphi) &= \xi_{11}(\theta, \varphi) \sin^2 \theta + \xi_{22}(\theta, \varphi) \cos^2 \theta + \xi_{12}(\theta, \varphi) \sin 2\theta \\ \bar{\xi}_{12}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}[\xi_{11}(\theta, \varphi) - \xi_{22}(\theta, \varphi)] \sin 2\theta + \xi_{12}(\theta, \varphi) \cos 2\theta\end{aligned}\quad (4.12)$$

5. Обоснование выполнения ассоциированного закона течения для композиции. Чтобы показать выполнение ассоциированного закона течения, нужно доказать справедливость равенств (см. (4.10) и (4.12)) [21, 35]

$$\bar{\dot{\epsilon}}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda}^{(0)} \bar{\xi}_{ij}, \quad \bar{\xi}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}^{(0)}; \quad i, j = 1, 2 \quad (5.1)$$

на гладких участках поверхности текучести композиции $f(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}) = 0$, задаваемой параметрически соотношениями (2.31) при учете зависимостей (2.30). Величины $\bar{\xi}_{ij}$ в соотношениях (5.1) определяются равенствами (4.12) при учете (4.11). Доказать аналитически справедливость равенств (5.1) авторам пока не удалось.

При выполнении ассоциированного закона течения для композиции, согласно (5.1), вектор $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_{11}, \bar{\xi}_{22}, \bar{\xi}_{12}\}$ должен быть ортогонален к гладкому участку поверхности текучести $f = 0$, поэтому обосновать выполнение ассоциированного закона течения для КМ можно путем проверки ортогональности вектора $\bar{\xi}$, вычисленного по формулам (4.11) и (4.12), к гладкому участку поверхности текучести $f = 0$, задаваемой равенствами (2.30) и (2.31). Проверка такой ортогональности выполнена следующим образом.

Вектор $\bar{\xi}$ ортогонален к гладкому участку поверхности $f = 0$, если он на этом участке поверхности ортогонален к координатным линиям, задаваемым параметрами θ и φ , т.е. ортогонален к векторам, касательным к этим линиям. Используя формулы (2.31) при учете (2.30), определим частные производные от усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ по параметрам θ и φ :

$$\bar{\sigma}_{ij}^{\theta} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{\varphi} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}; \quad i, j = 1, 2 \quad (5.2)$$

Векторы $\bar{\sigma}_{\theta} = \{\bar{\sigma}_{11}^{\theta}, \bar{\sigma}_{22}^{\theta}, \bar{\sigma}_{12}^{\theta}\}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi} = \{\bar{\sigma}_{11}^{\varphi}, \bar{\sigma}_{22}^{\varphi}, \bar{\sigma}_{12}^{\varphi}\}$ являются касательными к координатным линиям θ и φ соответственно. Введем величины:

$$\bar{s}_{ij}^{\theta} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{\theta}}{\sqrt{(\bar{\sigma}_{11}^{\theta})^2 + (\bar{\sigma}_{22}^{\theta})^2 + (\bar{\sigma}_{12}^{\theta})^2}}, \quad \bar{s}_{ij}^{\varphi} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{\varphi}}{\sqrt{(\bar{\sigma}_{11}^{\varphi})^2 + (\bar{\sigma}_{22}^{\varphi})^2 + (\bar{\sigma}_{12}^{\varphi})^2}} \quad i, j = 1, 2 \quad (5.3)$$

Векторы $\bar{s}_{\theta} = \{\bar{s}_{11}^{\theta}, \bar{s}_{22}^{\theta}, \bar{s}_{12}^{\theta}\}$ и $\bar{s}_{\varphi} = \{\bar{s}_{11}^{\varphi}, \bar{s}_{22}^{\varphi}, \bar{s}_{12}^{\varphi}\}$ имеют единичную длину (см. (5.2) и (5.3)) и являются касательными к координатным линиям θ и φ на гладких участках поверхности текучести композиции ($f = 0$).

Так как параметр $\hat{\lambda}^{(0)}$ является неопределенным, вместо $\bar{\xi}_{ij}$ рассмотрим

$$\bar{\eta}_{ij}(\theta, \varphi) = \frac{\bar{\xi}_{ij}(\theta, \varphi)}{\sqrt{\bar{\xi}_{11}^2(\theta, \varphi) + \bar{\xi}_{22}^2(\theta, \varphi) + \bar{\xi}_{12}^2(\theta, \varphi)}} \quad (i, j = 1, 2) \quad (5.4)$$

Вектор $\bar{\eta} = \{\bar{\eta}_{11}, \bar{\eta}_{22}, \bar{\eta}_{12}\}$ имеет единичную длину и при выполнении ассоциированного закона течения для композиции (5.1) ортогонален к гладкому участку поверхности текучести КМ $f = 0$, т.е. ортогонален к векторам \bar{s}_θ и \bar{s}_φ . Далее вычислим скалярные произведения

$$\Delta_\theta = \bar{\eta} \cdot \bar{s}_\theta = \bar{\eta}_{11}\bar{s}_{11}^\theta + \bar{\eta}_{22}\bar{s}_{22}^\theta + \bar{\eta}_{12}\bar{s}_{12}^\theta, \quad \Delta_\varphi = \bar{\eta} \cdot \bar{s}_\varphi = \bar{\eta}_{11}\bar{s}_{11}^\varphi + \bar{\eta}_{22}\bar{s}_{22}^\varphi + \bar{\eta}_{12}\bar{s}_{12}^\varphi \quad (5.5)$$

Если ассоциированный закон течения для композиции (5.1) действительно выполняется, то справедливо

$$\Delta_\theta = \Delta_\varphi = 0 \quad (5.6)$$

Аналитически доказать выполнение равенства (5.6) сложно, но его можно проверить численно. Для этого нужно численно определить производные в (5.2) и величины Δ_θ и Δ_φ при учете соотношений (5.3)–(5.5). При выполнении ассоциированного закона течения (5.1), точность выполнения соотношений (5.6) должна быть того же порядка, что и численное определение частных производных в (5.2), так как векторы $\bar{\eta}$, \bar{s}_θ и \bar{s}_φ в (5.5) являются единичными.

На рис. 7 приведены зависимости $\Delta_*(\varphi) = 10^4 \Delta_\varphi(\varphi)$, соответствующие сплошным кривым текучести на рис. 5а. Номера кривых на этих рисунках совпадают. Принято $\theta \equiv 0$ и на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ введена сетка с шагом $h_\varphi = 2\pi/200 = 3.14 \times 10^{-2}$. В формулах (5.2) производные \bar{s}_{ij}^φ вычислены конечно-разностными методами на трехточечных шаблонах, т.е. точность определения значений \bar{s}_{ij}^φ имеет порядок $h_\varphi^2 = 9.87 \times 10^{-4} \approx 10^{-3}$. В угловых точках кривых 1–3 на рис. 5а для вычисления производных \bar{s}_{ij}^φ использованы скошенные разности. Из рис. 7 видно, что максимальные по модулю значения Δ_φ имеют порядок h_φ^2 и пренебрежимо малы по сравнению с единицей.

Определим среднеквадратичные отклонения зависимостей $\Delta_\varphi(\varphi)$ от нуля

$$\delta_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_\varphi^2(\varphi) d\varphi}$$

Для кривой 1 на рис. 7 получим $\delta_\varphi = 2.69 \times 10^{-5}$, для кривой 2 – $\delta_\varphi = 3.63 \times 10^{-5}$, а для кривой 3 – $\delta_\varphi = 4.24 \times 10^{-5}$. Интегралы в последней формуле вычислялись по формуле трапеций. Следовательно, во всех рассматриваемых случаях δ_φ равно нулю с рассматриваемой точностью.

Дополнительные расчеты, проведенные для других сплошных кривых текучести на рис. 5б и 6, показали, что функции $\Delta_\varphi(\varphi)$ для них качественно и количественно сходны с кривыми на рис. 7, а значения δ_φ имеют порядок 10^{-5} . Поэтому можно считать, что в рамках разработанной структурной модели армированной среды ассоциирован-

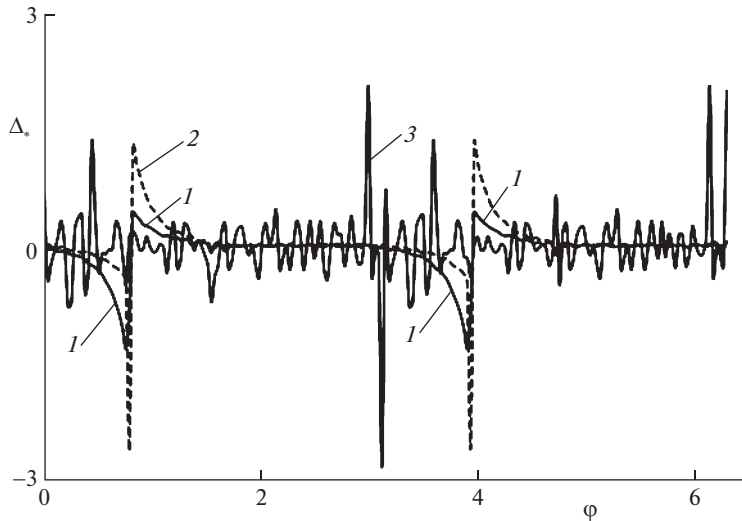


Рис. 7. Параметрическая зависимость отклонения вектора скоростей усредненных деформаций от нормали к кривой текучести композиции.

ный закон течения, вообще говоря, выполняется. Значит, для такой композитной среды и для каждого компонента композиции, выполняется постулат Друккера [35, 46], что подтверждает непротиворечивость введенных в данном исследовании исходных гипотез.

В случае симметричного армирования, рассмотренного в разд. 3, при $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ или $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ (однаправленное армирование) ассоциированный закон течения для композитной среды выполняется строго (см. [21]).

6. Модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах. В системе $Ox_1x_2x_3$ соотношения МОНСВ при ПНС [12, 30] равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \omega_1^{(0)} \sigma_1^{(0)} + \sum_{k=1}^K \omega_k \sigma_k \cos^2 \psi_k, & \sigma_{12} &= \sum_{k=1}^K \omega_k \sigma_k \sin \psi_k \cos \psi_k \\ \sigma_{22} &= \omega_2^{(0)} \sigma_2^{(0)} + \sum_{k=1}^K \omega_k \sigma_k \sin^2 \psi_k \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ – коэффициенты; σ_k – продольные напряжения в волокнах k -го семейства (в поперечном направлении нормальные и касательные напряжения в арматуре не учитываются); $\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_2^{(0)}$ – главные напряжения в связующей матрице (см. (2.7)), которые удовлетворяют условию текучести (2.10) ($k = 0$) и параметрически выражаются по формулам (2.16)–(2.18).

В рамках МОНСВ остаются справедливыми соотношения (4.4) и (4.6) при $l = 1, 2$, где $\dot{\lambda}_l^{(k)} \xi_l^{(k)}$ – продольная скорость деформации волокна k -го семейства (режим $l = 1$ соответствует растяжению арматуры, режим $l = 2$ – сжатию), а $\xi_{k,n}^{(0)}$ вычисляется по (4.5) и (4.3). Пластическое течение арматуры возможно только при достижении предель-

ных значений $\sigma_k = \pm\sigma_{\pm}^{(k)}$, тогда на основании (4.6) для напряжения в волокнах k -го семейства имеем:

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_+^{(k)} & \text{при } \xi_{k,n}^{(0)} > 0 \\ -\sigma_-^{(k)} & \text{при } \xi_{k,n}^{(0)} < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$-\sigma_-^{(k)} < \sigma_k < \sigma_+^{(k)} \quad \text{при } \xi_{k,n}^{(0)} = 0, \quad 1 \leq n \leq 2N_0, \quad 1 \leq k \leq K$$

В соотношениях (6.1) коэффициенты $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ в разных вариантах МОНСВ задаются по-разному. В “мягком” варианте МОНСВ, принято [12]:

$$\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k \quad (6.3)$$

При использовании “жесткого” варианта МОНСВ

$$\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 1 \quad (6.4)$$

В работе [30] использовались зависимости вида

$$\omega_1^{(0)} = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k \cos^2 \psi_k, \quad \omega_2^{(0)} = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k \sin^2 \psi_k \quad (6.5)$$

Для определения в глобальной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ напряжения, соответствующие соотношениям (6.1), следует применить равенства (2.31).

В рамках МОНСВ структурные соотношения (6.1) при учете равенств (2.31) и (6.2)–(6.5) имеют простой и удобный вид. Определим, является ли значимой ошибка расчета поверхности текучести, которую вносят игнорирование поперечных напряжений в арматуре и выбор параметров $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ в виде (6.3)–(6.5).

На рис. 5 и 6 для сравнения изображены пунктирные кривые текучести, определенные для соответствующих КМ по формулам (6.1)–(6.5). Пунктирные кривые, номера которых помечены штрихами, рассчитаны при тех же условиях, что и сплошные кривые с теми же номерами, но без штрихов (см. раздел 2). Кривая I на рис. 5а соответствует “мягкому” варианту МОНСВ (см. (6.1)–(6.3)); кривая I' – “жесткому” варианту МОНСВ (см. (6.1), (6.2) при учете (6.4)). Пунктирные кривые на рис. 5 и 6, номера которых помечены тремя штрихами, получены по формулам (6.1), (6.2) при учете зависимостей вида (6.5).

Сопоставление кривых I и I' на рис. 5а показывает, что “мягкий” вариант МОНСВ при высокопрочном связующем (Ті) приводит к значительному занижению расчетных значений пределов текучести КМ в направлениях, ортогональных (и близких им) к направлениям армирования (например, в направлении напряжения $\bar{\sigma}_2$ на рис. 5а). Сравнение кривых I и I'' на рис. 5а демонстрирует, что в случае высокопрочного связующего расчет по “жесткому” варианту МОНСВ, наоборот, приводит к существенному завышению пределов текучести КМ в направлениях, близких к направлениям армирования (например, в направлении напряжения $\bar{\sigma}_1$ на рис. 5а).

Из сравнения кривых I , I'' и 2 , $2''$ на рис. 5а следует, что вариант МОНСВ [30], лучше всего согласуется со структурной моделью, разработанной в данном исследовании (см. разд. 1 и 2). Так, в самом неблагоприятном случае (при использовании высокопрочного связующего) значения $\max|\bar{\sigma}_1|$ и $\max|\bar{\sigma}_2|$, определенные по кривым I , I'' и 2 , $2''$ соответственно, отличаются не более чем на 2.4%. Для кривых I и I'' на рис. 5б разница значений $\max|\bar{\sigma}_1|$ и $\max|\bar{\sigma}_2|$ практически равна нулю.

При малых отношениях пределов текучести связующего и волокон (что часто бывает на практике [22, 24, 37, 44]) различие между расчетными кривыми текучести, определенных на базе МОНСВ и модели, разработанной в данном исследовании, становится малым. Так, кривая 3''' на рис. 5а (АДМ–У8А-композиция) почти совпадает с кривой 3; кривые 1'''–6''' на рис. 6 (стеклопластик) также близки к кривым 1–6 соответственно (максимальное расхождение у кривых 2 и 2'''). Кривые текучести, рассчитанные по формулам (6.1), (6.2) и (6.5) для ортогонально армированных А1–У8А-композиций, близки к кривым 2, 2' и 2'' на рис. 5б, поэтому они не изображены.

Анализ поведения пунктирных кривых на рис. 5 и 6 показывает, что предложенный в [30] вариант МОНСВ (см. (6.1), (6.2) и (6.5)) обоснованно можно применять вместо структурных соотношений данного исследования в инженерных расчетах композитных тонкостенных элементов конструкций.

Заключение. Разработана структурная модель, позволяющая рассчитывать поверхности и кривые текучести для жесткопластических гибридных композитных сред, перекрестно армированных в произвольных направлениях, параллельных некоторой плоскости. Материалы компонентов композиции могут по-разному сопротивляться растяжению и сжатию. Пределы текучести материалов компонентов при растяжении могут быть как больше, так и меньше пределов текучести при сжатии. Учтено сложное напряженное состояние в арматуре. Принято, что в плоскости армирования реализуется ПНС в композиции. Показано, что, как следствие этого, в рамках принятых предположений ПНС возникает и во всех компонентах. Пластическое течение в компонентах композиции описывается кусочно-линейными критериями текучести (типа Йогансена, Треска, Ху и др.). Определены усредненные напряжения и скорости деформаций композиции. Перед процедурой усреднения напряжения в компонентах представлены в параметрическом виде. Сформулированы условия однозначного определения границ режима текучести в арматуре, который соответствует напряженному состоянию в связующем материале. Продемонстрировано, что для расчетных кривых (поверхностей) текучести КМ выполняется ассоциированный закон пластического течения. Это позволяет переносить все известные теоремы о предельном состоянии жесткопластических тел и разработанные методы решения соответствующих краевых задач на элементы конструкций, изготовленные из рассматриваемых композиций. Получено, что изменение характера армирования (направлений и плотностей армирования) существенно влияет на размер и форму кривых (поверхностей) текучести композиции. Сравнение кривых текучести КМ, рассчитанных на базе разработанной структурной модели и достаточно простой МОНСВ, показало, что использование варианта МОНСВ, предложенного в [30], позволяет с достаточной для инженерных приложений точностью определять кривые (поверхности) текучести композиции вместо относительно сложных формул, полученных в данной работе. Для композиций, содержащих низкопрочные связующие матрицы, что часто встречается на практике, кривые текучести композиции, рассчитанные по этим теориям, почти не различаются.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект № 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред, при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.

2. Caliri M.F.Jr., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // *Compos. Struct.* 2016. V. 156. № 15. P. 63–77.
3. Димитриенко Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
4. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact. Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
5. Jones N. Note on the impact behaviour of fibre-metal laminates // *Int. J. Impact. Eng.* 2017. V. 108. P. 147–152.
6. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.* 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
7. L'vov G.I., Kostromitskaya O.A. Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // *Mech. Compos. Mater.* 2020. V. 56. № 1.
8. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
9. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П. и др. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
10. Zickel J. Isotensoid pressure vessels // *ARS J.* 1962. V. 32. P. 950–951.
11. Kelly A., Tyson W.R. Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum // *J. Mech. Phys. Solids.* 1965. V. 13. № 6. P. 329–350.
12. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // ПМТФ. 1969. № 5. С. 81–88.
13. Mróz Z., Shamiev F.G. Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // *Arch. Inż. Łąd.* 1979. V. 2. № 3. P. 463–476.
14. Tian W., Qi L., Chao X. et al. A new interpolative homogenization model for evaluation of the effective elasto-plastic responses of two-phase composites // *Compos. Struct.* 2019. V. 210. № 15. P. 810–821.
15. Doghri I., Adam L., Bilger N. Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method // *Int. J. Plast.* 2010. V. 26. № 2. P. 219–238.
16. Brassart L., Stainier L., Doghri I. et al. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plast.* 2012. V. 36. P. 86–112.
17. Федотов А.Ф. Гибридная модель гомогенизации упругопластических свойств изотропных матричных композитов // *Мех. композ. матер.* 2017. Т.53. № 3. С. 513–530.
18. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Мех. композ. матер.* 2010. Т. 46. № 5. С. 663–678.
19. Ахундов В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Мех. композ. матер.* 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
20. Малаховски Е., Львов Г., Дарьязадех С. Численное определение параметров критерия пластичности волокнистых композитов // *Мех. композ. матер.* 2017. Т. 53. № 5. С. 843–862.
21. Романова Т.П., Янковский А.П. Построение кривых текучести для армированных пластин из жесткопластических разносопротивляющихся материалов при учете двумерного напряженного состояния в волокнах. I. Однонаправленное армирование // *Мех. композ. матер.* 2019. Т. 55. № 6. С. 1019–1042.
22. *Handbook of Composites / Ed. by Lubin G.* New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
23. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
24. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Карпиноса Д.М. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
25. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.
26. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // *Изв. вузов. Строительство.* 2005. № 8. С. 4–11.

27. Кубишев И.Н. Предельная нагрузка для композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. Т. 15. № 1. С. 56–60.
28. Романова Т.П. Несущая способность и оптимизация трехслойных армированных круглых пластин из разносопротивляющихся материалов, опертых по внутреннему контуру // Пробл. прочн. пластичн. 2015. Т. 77. № 3. С. 286–300.
29. Джахангиров А.А. Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластины, заземленной по кромкам // Мех. композ. матер., 2016. Т. 52. № 2. С. 385–398.
30. Романова Т.П. Моделирование динамического изгиба жесткопластических армированных слоистых круглых пластин с произвольным отверстием на вязком основании при взрывных нагрузках // Пробл. прочн. пластичн. 2017. Т. 79. № 3. С. 267–284.
31. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука. Физматгиз, 1987. 80 с.
32. Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А. и др. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // Мех. полимеров. 1973. № 6. С. 1011–1018.
33. Романова Т.П., Янковский А.П. Построение кривых текучести для жесткопластических армированных пластин при учете двумерного напряженного состояния в волокнах // Мех. композ. матер. 2018. Т.54. № 6. С. 1013–1044.
34. Hu L.W. Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // J. Franclin Inst. 1958. V. 265. № 3. P. 187–204.
35. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
36. Maо-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 3. P. 169–200.
37. Васильев В.В., Протасов В.Д. и др. Композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
38. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
39. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
40. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. New York: Wiley, 1979. 348 p.
41. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
42. Ванин Г.А. Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
43. Hopkins H.G. Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion // Proc. 9th Inter. Cong. Appl. Mech. 1957. V. 6. P. 448–457.
44. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Методы возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. Физматгиз, 1978. 208 с.
45. Волоконные композиционные материалы / Под ред. Уитона Дж., Скала Э. М.: Металлургия, 1978. 240 с.
46. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.

Piecewise-Linear Yield Loci of Angle-Ply Reinforced Medium of Different-Resisting Rigid-Plastic Materials at 2d Stress State

T. P. Romanova^{a,#} and A. P. Yankovskii^{a,##}

^a Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

[#]e-mail: lab4nemir@gmail.com

^{##}e-mail: lab4nemir@rambler.ru

The structural model of hybrid composites angle-ply reinforced parallel to some plane is constructed for analytical determination of the yield loci of the composition taking into account the 2d stress state in all components. The materials of the components are homogeneous and

isotropic, have different yield strengths in tension and compression, their mechanical behavior is described by the associated flow law for a rigid-plastic body with piecewise linear flow conditions the type of Johansen, Treska, Hu, Ishlinski-Ivlev. The cases of location of fibers along the trajectories of the principal stresses in the composition and the cases of angle-ply reinforcement symmetric with respect to these trajectories are considered. The influence of reinforcement structure (directions and densities) on the size and shape of the yield loci of compositions is investigated. It is numerically shown that the plastic flow in the compositions is associated with the calculated yield loci of reinforced media. As an example, yield loci for metal compositions with high-strength and low-strength binder and for fiberglass reinforced media are constructed. The calculated yield loci of the compositions are compared with similar ones determined on the basis of different variants of the structural model with one-dimensional stress state in fibers.

Keywords: hybrid composite, structural model, flat angle-ply reinforcement, rigid-plastic material, unequeresistant materials, 2D stress state, Johansen-type yield criterion, Tresca-type yield criterion, Hu yield criterion, Ishlinski–Ivlev yield criterion

REFERENCES

1. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
2. *Caliri M.F.Jr., Ferreira A.J.M., Tita V.* A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // *Compos. Struct.*, 2016, vol. 156, no. 15, pp. 63–77.
3. *Dimitrienko Yu.I.* Mechanics of Composite Structures at High Temperatures (Mekhanika kompozitnykh konstrukcij pri vysokih temperaturah). Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
4. *Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact. Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38.
5. *Jones N.* Note on the impact behaviour of fibre-metal laminates // *Int. J. Impact. Eng.*, 2017, vol. 108, pp. 147–152.
6. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
7. *L'vov G.I., Kostromitskaya O.A.* Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 56, no. 1.
8. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
9. *Solomonov Yu.S., Georgievsky V.P. et al.* Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells. (Prikladnye zadachi mehaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek) Moscow: Physmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
10. *Zickel J.* Isotensoid pressure vessels // *ARS J*, 1962, vol. 32, pp. 950–951.
11. *Kelly A., Tyson W.R.* Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum // *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 6, pp. 329–350.
12. *Nemirovskii Yu.V.* On the condition of plasticity (strength) for a reinforced layer // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1969, vol. 10, no. 5, pp. 759–765.
13. *Mróz Z., Shamiev F.G.* Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // *Arch. Inż. Łąd.*, 1979, vol. 2, no. 3, pp. 463–476.
14. *Tian W., Qi, L., Chao X. et al.* A new interpolative homogenization model for evaluation of the effective elasto-plastic responses of two-phase composites // *Compos. Struct.*, 2019, vol. 210, no. 15, pp. 810–821.
15. *Doghri I., Adam L., Bilger N.* Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method // *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, no. 2, pp. 219–238.

16. Brassart L., Stainier L., Doghri I. et al. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 36, pp. 86–112.
17. Fedotov A.F. Hybrid model for homogenization of elastoplastic properties of isotropic matrix composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 361–372.
18. Yankovskii A.P. Determination of thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in case of general anisotropy of their components. 1. Structural model // *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 663–678.
19. Akhundov V.M. Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations // *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 383–396.
20. Małachowski E., L'vov G., Daryazadeh S. Numerical prediction of parameters of yield criterion for fibrous composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 589–600.
21. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Yield loci of reinforced plates made from rigid-plastic unequioresistant materials considering the two-dimensional stress state in fibers. I. Unidirectional reinforcement // *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 699–714.
22. Handbook of Composites / Ed. by Lubin G. N.Y.: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
23. Hill R. Mathematical Theory of Plasticity. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1950. 353 p.
24. Composite Materials. (Kompozicionnye materialy) Handbook / Ed. by Karpinos D.M. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p. (in Russian)
25. Rzhantsyn A.R. Limit Balance of Plates and Shells. (Predel'noe ravnovesie plastinok i obolochek) Moscow: Nauka, 1983. 288 p. (in Russian)
26. Nemirovsky Yu.V., Yankovskii A.P. Limit balance of reinforced concrete domes of rotation // *New Higher Educ. Inst. Const.*, 2005, no. 8, pp. 4–11. (in Russian)
27. Kubishev N. Limit load for composite circular plate with various fixation conditions // *Mekh. Mash. Mekhan. Mater.*, 2011, vol. 14, no. 1, pp. 56–60. (in Russian)
28. Romanova T.P. Carrying capacity and optimization of three-layer reinforced circular plate of differently resistant materials, supported on the internal contour // *Prob. Strength Plast.*, 2015, vol. 77, no. 3, pp. 286–300. (in Russian)
29. Jahangirov A.A. Load-carrying capacity of fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours // *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 271–280.
30. Romanova T.P. Modeling of rigid-plastic dynamic bending of reinforced layered circular plates with arbitrary hole on viscous foundation under explosive loads // *Prob. Strength Plast.* 2017, vol. 79, no. 3, pp. 267–284. (in Russian)
31. Rabotnov Yu.N. Introduction in Destruction Mechanics. (Vvedenie v mehaniku razrusheniya) Moscow: Nauka, 1987. 80 p. (in Russian)
32. Zhigun I.G., Dushin M.I., Polyakovet V.A. et al. Composites reinforced with system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study // *Polym. Mech.*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 895–900.
33. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2D stress state in fibers // *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 697–718.
34. Hu L.W. Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // *J. Franklin Inst.*, 1958, vol. 265, no. 3, pp. 187–204.
35. Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 529 p. (in Russian)
36. Mao-hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // *Appl. Mech. Rev.*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–200.
37. Vasiliev V.V., Protasov V.D. et al. Composite Materials (Kompozicionnye materialy). Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p. (in Russian)
38. Shermergor T.D. Theory of Elasticity of Micro-Inhomogeneous Media. (Teorija uprugosti mikro-neodnorodnyh sred) Moscow: Nauka, 1977. 400 p. (in Russian)
39. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. Resistances of Polymeric and Composite Materials. (Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov) Riga: Zinatane, 1980. 572 p. (in Russian)
40. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Wiley, 1979. 348 p.

-
41. *Bakhyalov N.S., Panasenko G.P.* Averaging of Processes in Periodic Media. Mathematical Problems of Mechanics of Composite Materials. (Osrednenie processov v periodicheskikh sredah. Matematicheskie zadachi mehaniki kompozicionnyh materialov) Moscow: Nauka, 1984. 352 p. (in Russian)
 42. *Vanin G.A.* Micromechanics of Composite Materials. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 304 p. (in Russian)
 43. *Hopkins H.G.* Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion // Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., 1957, vol. 6, pp. 448–457.
 44. *Ivlev D.D., Ershov L.V.* Perturbation Methods in Theory of Elastic-Plastic Body. (Metody vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela) Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)
 45. Composites: State of Art / Ed. by *Weeton L.W, Scala E.* N.Y.: AIME, 1974. 365p.
 46. *Kolarov D., Baltov A., Boncheva N.* Mechanics of Plastic Media. (Mehanika plasticheskikh sred) Moscow: Mir, 1979. 302 p. (in Russian)