
УДК 539.31+539.62+539.61

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

© 2020 г. И. Г. Горячева^{1,*}, И. Ю. Цуканов^{1,**}

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: goryache@ipmnet.ru*

***e-mail: tsukanov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 13.08.2020 г.

После доработки 10.09.2020 г.

Принята к публикации 21.09.2020 г.

В обзоре освещено современное состояние исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования. Статья ориентирована на специалистов по механике контактного взаимодействия и трибологии, а также может быть интересна исследователям, интересующимся управлением взаимодействия деформируемых тел за счет инженерии их поверхностей.

Ключевые слова: механика контактного взаимодействия, дискретный контакт, поверхностный микрорельеф, упругость, вязкоупругость, упругопластическое деформирование, трение, контактные характеристики, площадь фактического контакта, взаимное влияние пятен контакта

DOI: 10.31857/S0032823520060053

Введение. Большинство технических и натуральных поверхностей не являются идеально гладкими и имеют отклонения от правильной формы на различных масштабных уровнях, которые формируют их микрорельеф. Микрорельеф поверхностей весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу (волнистость, шероховатость) и может наноситься искусственно или получаться в результате различных видов поверхностной обработки. Современные методы исследования поверхностей позволяют дать количественную оценку параметров микрогеометрии поверхности на разных масштабных уровнях [1, 2].

При соприкосновении таких поверхностей их контакт локализован на отдельных дискретно расположенных пятнах (область фактического контакта). Поскольку область фактического контакта составляет десятые или сотые доли номинальной области контакта (односвязной области, включающей в себя все пятна фактического контакта), то максимальные фактические давления на пятнах контакта превосходят номинальные (осредненные по номинальной области контакта) в сотни раз.

Дискретность контакта играет важную роль в протекании физических процессов, происходящих при контактном и фрикционном взаимодействии (упругих и пластических деформаций, адгезии и когезии, фрикционного разогрева, фазовых переходов), а также оказывает влияние на электросопротивление, массоперенос, изнашивание и усталостное разрушение поверхностных слоев материалов, на поверхностное натяже-

ние и смачивание поверхностей, на протекающие в зоне смазанного контакта гидродинамические явления и т.д.

Следует отметить, что задача дискретного контакта возникает также при исследовании контактного взаимодействия неоднородных тел, имеющих различного рода включения, композиционных материалов, тел сложной конфигурации, системы тел, близко расположенных друг к другу (системы резцов в инструменте, шарики в подшипнике) и т.д.

Первые постановки задач механики дискретного контакта относятся к началу 20 в. и неразрывно связаны с развитием теории трения и изнашивания деформируемых тел [3–5]. Ввиду сложности анализа контактных задач с неодносвязной областью контакта лишь некоторые из них могут быть решены точно. Упрощения, которые обычно делаются при решении задач о контактном взаимодействии деформируемых тел заданной макроформы с учетом их поверхностного микрорельефа, сводятся, как правило, к упрощенному описанию микрогеометрии поверхности (периодический рельеф, выступы заданной формы и т.д.) и к построению приближенных аналитических и асимптотических методов решения поставленных задач.

В связи с развитием вычислительной техники наблюдается тенденция к проведению расчетов контактных характеристик тел с шероховатыми поверхностями на основе прямого численного моделирования [6–8]. При этом отпадает необходимость модельного описания макро- и микрогеометрии поверхностей. Все данные о геометрии сопрягаемых поверхностей берутся на основе их профилометрирования. Однако несмотря на кажущуюся простоту и доступность компьютерного моделирования взаимодействия шероховатых поверхностей, актуальность и востребованность развития аналитических методов решения задач дискретного контакта не вызывает сомнений. Применение аналитических методов исследования дискретного контакта дает возможность не только оценить влияние микрогеометрии на характеристики контактного взаимодействия, силу трения, фрикционный разогрев и т.д., но и управлять этими процессами за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа.

Данная статья содержит обзор методов решения задач механики дискретного контакта, постановка которых связана с современными проблемами трибологии. Основное внимание в ней уделено анализу исследований периодических контактных задач для упругих тел в плоской и пространственной постановках, а также приближенным методам решения задач дискретного контакта с учетом, как формы отдельных выступов, так и плотности их расположения в пределах номинальной (конечной и бесконечной) области контакта. Будут приведены исследования задач дискретного контакта с усложненными граничными условиями, учитывающими адгезионное притяжение, наличие касательных напряжений в области контакта поверхностей, а также с учетом пластических деформаций взаимодействующих тел. Кроме того, будут изложены постановки и методы решения задач о фрикционном взаимодействии вязкоупругих тел в условиях дискретного контакта.

1. Общая постановка задачи дискретного контакта упругих тел при действии нормальной силы. В качестве примера постановки задачи дискретного контакта рассмотрим контакт упругого полупространства с жестким контртелом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством (плоскость Oxy совпадает с границей полупространства, а ось Oz направлена вглубь) (рис. 1).

Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на некоторую величину D под действием нормальной силы P область фактического контакта представляет собой конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i . Будем считать, что касательные напряжения в областях фактического контакта отсутствуют, а контактные давления

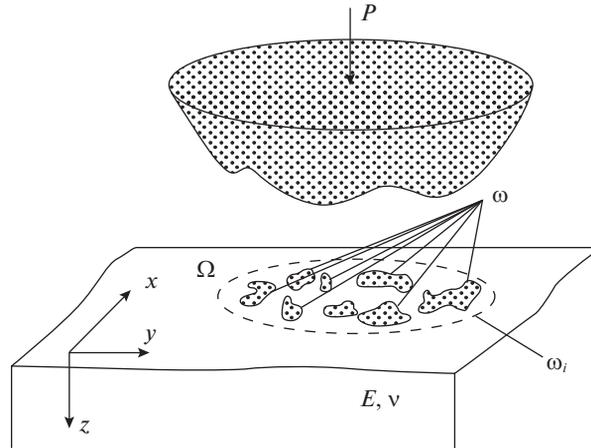


Рис. 1. Постановка задачи дискретного контакта.

$p_i(x, y)$ приводят к упругим перемещениям $u_z(x, y)$ в направлении оси Oz первоначально плоской границы упругого полупространства, определяемым соотношением [9]

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} \frac{p_i(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} \quad (1.1)$$

В каждой подобласти ω_i должно выполняться условие контакта

$$u_z(x, y) = D - F(x, y) \quad (1.2)$$

Если величина сближения D неизвестна, а задана суммарная нагрузка, действующая на систему выступов, то к уравнениям (1.1) и (1.2) следует добавить уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy = P \quad (1.3)$$

Аналогичным образом задача дискретного контакта формулируется для неоднородных тел, в том числе для тел с покрытиями [10]. При этом интегральный оператор в (1.1) заменяется на соответствующий оператор для двухслойного упругого полупространства.

2. Задачи дискретного контакта с ограниченной номинальной областью контакта. Задачи с ограниченной номинальной областью контакта встречаются при взаимодействии текстурированных поверхностей, например медицинских инструментов, рабочих органов роботов, манипуляторов и др.

При внедрении системы N жестких связанных между собой штампов в упругое основание область контакта состоит из N подобластей. Размеры областей контакта необходимо определять в соответствии с условием контакта, граничными условиями и условиями совместности. Имеющееся при этом неравномерное распределение нагрузок между отдельными пятнами контакта определяется высотными характеристиками контактирующих штампов, расстоянием между ними, а также местом расположения отдельного пятна контакта в пределах номинальной области взаимодействия.

2.1. Плоская постановка. Общее решение плоской задачи для множественного контакта без учета сил трения дано впервые Мухелишвили [11] с использованием мето-

дов ТФКП и затем Штаерманом [12] с использованием функций действительного переменного.

Контактное давление в случае внедрения системы штампов в упругую полуплоскость дается выражением [11]:

$$p(x) = \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)X(x)} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{g'(\xi)X(\xi)d\xi}{\xi-x} + \frac{2jU_{N-1}(x)}{X(x)}, \quad (2.1)$$

где $g(x)$ – функция начального зазора; N – количество участков контакта, $i = 1 \dots N$; a_i, b_i – координаты i -го участка контакта; $X(x) = \sqrt{(x-a_1)(x-b_1)\dots(x-a_N)(x-b_N)}$; $U_{N-1}(x) = G_0x^{N-1} + G_1x^{N-2} + \dots + G_{N-1}$; коэффициенты $G_0 \dots G_{N-1}$ определяются из системы уравнений, записанной на основании учета граничных условий на концах контактного сегмента; j – мнимая единица; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости соответственно.

Функция начального зазора определяется условием контакта:

$$g(x) = D - F(x), \quad (2.2)$$

где $F(x)$ – форма внедряемого тела.

Следует отметить, что возможны два типа задач. В задачах первого типа задана общая нагрузка, приложенная ко всем штампам. Как правило, функция $F(x)$ в этих задачах непрерывна и задана во всех интервалах $a_i \leq x \leq b_i$. Во втором типе задач заданы величины сил P_i или внедрений D_i для каждого штампа. В этом случае задана функция формы отдельного штампа $f_i(x)$ в каждом из интервалов $a_i \leq x \leq b_i$ с точностью до постоянных C_i , которые, вообще говоря, различны для рассматриваемых интервалов.

Решение плоской задачи дискретного контакта в замкнутой форме возможно только для простейших случаев. Для двух штампов с плоским основанием, расположенных на разных высотах, точное решение получено Штаерманом [12]. При условии, что штампы жёстко соединены, задана общая нагрузка P и $F(x) = C + \eta$ при $b < x < a$; $F(x) = C$ при $-b < x < -a$, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{\pm \left(-\frac{Eb\eta}{4(1-\nu^2)K(a/b)} - Px \right)}{\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}, \quad a < |x| < b, \quad (2.3)$$

где η – разность высот штампов; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода аргумента k .

При условии, что штампы не связаны между собой, расположены на одной высоте, и заданы различные нагрузки, действующие на каждый штамп P_1 и P_2 ; $f(x) = C_1$ при $-b < x < -a$; $f(x) = C_2$ при $b < x < a$, распределение контактных давлений имеет следующий вид:

$$p(x) = \frac{\pm \frac{\pi b}{2K(\sqrt{1-a^2/b^2})} (P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)x}{\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}, \quad a < |x| < b \quad (2.4)$$

В формулах (2.3) и (2.4) знак плюс берется при $x < 0$, знак минус – при $x > 0$.

Задача для двух параболических штампов ($N = 2$) радиуса R , расположенных на одной высоте и связанных между собой, рассмотрена Гладвеллом [13]. Для формы штампов, заданной непрерывной функцией

$$F(x) = \frac{x^4}{8Rl^2} - \frac{x^2}{4R} \quad (2.5)$$

с помощью методов ТФКП и многочленов Чебышева получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{E\sqrt{x^2(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{4(1 - \nu^2)Rl^2}, \quad a \leq |x| \leq b, \quad (2.6)$$

где $2l$ – расстояние между центрами штампов, причем должно выполняться соотношение $2l = \sqrt{2(b^2 + a^2)}$. Нагрузка на один штамп определяется формулой [13]

$$P = \frac{\pi E(b^2 - a^2)^2}{64(1 - \nu^2)Rl^2} \quad (2.7)$$

Так же, как и в задаче для двух плоских штампов, распределение давления под штампом имеет асимметричный вид с максимумом, смещенным к внутренней стороне штампа. Асимметрия давлений усиливается с ростом нагрузки. Распределения внутренних напряжений для данной задачи были получены на основе потенциала Мухелишвили в работе [14], в которой также выполнено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Рассмотрена [15] задача о внедрении двух клиновидных штампов в упругую полуплоскость в условиях нормального контакта и частичного проскальзывания. Решение задачи базируется на численном интегрировании уравнений Мухелишвили [11]. Показано, что в отличие от задачи Гладвелла для двух параболических штампов [13], в случае клиновидных штампов решение в замкнутой форме получить не удастся.

На основе численного решения уравнения (2.1) рассматривался [16, 17] контакт двух и трех одинаковых штампов, вершины которых описываются функцией $\cos x$. Исследован эффект взаимного влияния штампов, оказываемый на распределение контактных давлений и фактическую площадь контакта при различном количестве и расположении штампов.

Контакт цилиндрического штампа, имеющего синусоидальную волнистость, с упругой полуплоскостью рассмотрен в работе Новелла и Хиллса [18]. Задача решена итерационным методом в предположении, что распределения давления под выступами являются герцевскими, т.е. эффект взаимного влияния проявляется только в увеличении максимального давления и уменьшении фактической площади контакта. Показано, что сделанное допущение оправдано при низких плотностях контакта.

Изучены [19] задачи о внедрении в упругую полуплоскость без трения и в условиях частичного проскальзывания: гладкого штампа, описываемого многочленом восьмой степени; цилиндра и плоского штампа со скругленными углами, имеющих синусоидальную волнистость. Предложен численный метод для решения поставленных задач на основе сведения интегрального уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений, и использования итерационной схемы Ньютона–Рафсона. Показано усиление взаимного влияния пятен контакта с ростом амплитуды волнистости.

2.2. Пространственная постановка. Постановка и метод решения пространственной контактной задачи о внедрении при отсутствии сил трения N штампов заданной формы $f_i(r)$ (предполагается, что каждый штамп есть тело вращения, ось которого перпендикулярна недеформированной поверхности полупространства, r – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки на границе полупространства) в упругое по-

лупространство при заданных расстояниях l_{ij} между осями симметрии i -го и j -го штампов и их высотным распределением h_i даны в [20, 21]. В частности, для распределения нагрузок P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), действующих на штампы в зависимости от их пространственного расположения, получена следующая система уравнений:

$$P_i = \frac{2E}{1-\nu^2} \int_0^{a_i} (D_i - f(r)) \frac{rdr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_j \arcsin \frac{a_i}{l_{ij}} \quad (2.8)$$

$$D_i = h_i - D_0, \quad (2.9)$$

где D_0 – внедрение системы штампов в полупространство под действием заданной нагрузки $P = \sum_{i=1}^N P_i$.

В случае контактного взаимодействия с упругим полупространством системы гладких осесимметричных штампов для определения радиуса a_i отдельного пятна контакта получено дополнительное соотношение [22]:

$$D_i = -a_i \int_0^{a_i} \frac{f'(r)dr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{P_j}{\sqrt{l_{ij}^2 - a_i^2}} \quad (2.10)$$

Полученные уравнения были использованы [20] для расчета распределения нагрузок между штампами и анализа зависимости нагрузки от внедрения для системы N цилиндрических штампов с плоским основанием радиуса a при разном характере их пространственного расположения в системе. Численное исследование решения задачи показало существенное влияние параметра плотности контактов на распределение сил P_i между штампами и значение жесткости контакта P/D системы штампов. При этом жесткость контакта оставалась примерно одинаковой для моделей, отличающихся только формой областей, занимаемых штампами. Этот вывод аналогичен результату, полученному Галининым [23] при исследовании влияния формы штампа с плоским основанием на его внедрение в упругое полупространство при заданной нагрузке.

Выведена [20, 22] система уравнений для определения распределения усилий между N связанными между собой сферическими штампами при заданном их пространственном расположении в условиях внедрения такой системы в упругое полупространство под действием заданной суммарной силы P . На основании проведенного анализа решения задачи сделан вывод, что приближенные методы расчета [4, 24], не учитывающие взаимного влияния пятен контакта, дают завышенные значения контактной жесткости dP/dD и фактической площади контакта $A_r = \pi \sum_{i=1}^N a_i^2$; ошибка возрастает с увеличением числа пятен контакта и их плотности.

В работе Андрейкива и Панасюка [25] решение задачи о внедрении системы цилиндрических штампов с плоскими основаниями сведена к системе N двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для решения системы в случае удаленных штампов применен метод последовательных приближений.

Аргатовым и Назаровым [26] для исследования задачи о внедрении системы штампов с произвольной формой подошвы в упругое полупространство использован асимптотический метод сращиваемых разложений. С целью повышения точности расчета контактных характеристик метод был улучшен [27]; при этом задача построения асимптотики контактного давления сведена к одному (вместо нескольких последовательно решаемых) связанному интегральному уравнению.

В работе Аргатова, Ли и Попова [28] рассмотрены задачи о внедрении системы жестких и упругих цилиндрических штампов с плоским основанием в упругое полу-

пространство с учетом адгезионных сил и при их отсутствии. Получены асимптотические решения поставленных задач. Точность разработанного метода оценена сравнением с решением Коллинса [29] для внедрения двух цилиндрических штампов.

Контактная жесткость при внедрении системы N равновысоких и разновысоких цилиндрических штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки, исследовалась теоретически и экспериментально [30]. Задача дискретного контакта сведена к системе нелинейных уравнений и решена численно. Получены инженерные асимптотические выражения для оценки контактной жесткости системы, которые были сопоставлены с экспериментальными данными.

Контакт системы узких прямоугольных в плане штампов с упругим полупространством применительно к моделированию взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью рассмотрен Яковенко [31]. Получены аналитические выражения для определения внедрения системы выступов и распределения нагрузок на них. Предложен алгоритм расчета высотного распределения выступов, обеспечивающего их равномерную нагруженность.

3. Периодические контактные задачи. В механике контактных взаимодействий периодические контактные задачи играют важную роль при изучении эффекта взаимного влияния пятен контакта на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактных давлений, размер области контакта, зависимость сближения тел от действующих номинальных давлений). Анализ решения периодических контактных задач позволяет исследовать влияние параметров микрогеометрии поверхности (форма выступов, плотность их расположения и распределение по высоте) на податливость шероховатого слоя, электросопротивление и т.д.

3.1. Плоская периодическая задача при отсутствии касательных напряжений в области контакта. Для системы жестких штампов с плоским основанием, внедряющихся в упругую полуплоскость, решение периодической контактной задачи было впервые получено Садовским [32] с применением комплексной функции напряжений. Им было получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{P \left| \cos \frac{\pi x}{L} \right|}{L \sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{L} - \sin^2 \frac{\pi x}{L}}}, \quad (3.1)$$

где P – приложенная нормальная нагрузка; L – расстояние между штампами; a – полуширина штампа.

В случае, когда поверхности штампов наклонены на угол ε относительно границы упругой полуплоскости, и область контакта задана (полный контакт), решение для контактного давления было получено в виде [33]:

$$p(x) = \frac{\pi E \varepsilon \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{L}}{L(1 - \nu^2) \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{L} - \cos \frac{2\pi a}{L}}} + \frac{P \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{L}}{L \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{L} - \cos \frac{2\pi a}{L}}} \quad (3.2)$$

При этом значение нормальной нагрузки, обеспечивающее полный контакт штампов и полуплоскости, удовлетворяет неравенству:

$$P \geq \frac{L \varepsilon E}{2(1 - \nu^2)} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{L} \quad (3.3)$$

С использованием комплексной функции напряжений задача о вдавлении синусоидального волнистого штампа в упругую полуплоскость впервые решена Вестер-

гаардом [34]. Выражение для определения контактного давления в данной задаче имеет вид:

$$p(x) = \frac{\sqrt{2\pi E^* \Delta}}{\lambda} \cos \frac{\pi x}{\lambda} \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{\lambda} - \cos \frac{2\pi a}{\lambda}}, \quad (3.4)$$

где Δ , λ – амплитуда и период волнистой поверхности; E^* – приведенный модуль упругости материалов полуплоскости и волнистой поверхности, определяемый как

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3.5)$$

Также им впервые получено выражение, связывающее номинальное давление и полуширину участка контакта:

$$\bar{p} = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \quad (3.6)$$

Схожее по своей структуре решение для определения контактного давления при внедрении волнистой поверхности, описываемой функцией $f(x) = \Delta \left(1 - \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, получено Штаерманом [12].

Позднее, с использованием метода парных сумматорных уравнений, была решена [35] задача о внедрении синусоидальной волнистой поверхности в упругую полуплоскость, где впервые выведено соотношение между максимальным значением давления и приложенным номинальным давлением:

$$p_{\max} = 2\sqrt{p^* \bar{p}}, \quad (3.7)$$

где $p^* = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda}$ – номинальное давление, необходимое для полного контакта взаимодействующих тел.

Определение дополнительных смещений $\bar{\delta}$, т.е. усредненных смещений границы полуплоскости от фактического распределения давлений за вычетом смещения от номинального давления, в задаче о внедрении синусоидальной волнистой поверхности было впервые выполнено Кузнецовым [36]. Им было получено следующее соотношение:

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta \bar{p}}{p^*} \left(1 - \ln \frac{\bar{p}}{p^*}\right) \quad (3.8)$$

С использованием теории Герца [37] и решения задачи о нагружении плоской трещины нормальным давлением [38] Джонсоном были получены асимптотические выражения [39] для описания зависимости между средним давлением и полушириной участка контакта для случаев существенно низких и высоких нагрузок. Дальнейшее развитие подхода, основанного на механике разрушения, позволило [40] получить точное решение задач о контакте синусоидального штампа и полуплоскости в условиях отсутствия трения и частичного проскальзывания при одинаковых упругих постоянных материалов контактирующих тел.

Был предложен [33] общий метод решения плоских периодических задач теории упругости, использующий аппарат функций действительного переменного, путем сведения интегрального уравнения периодической контактной задачи [12]

$$\frac{E^*}{2} g'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \frac{x - \xi}{2} d\xi, \quad (3.9)$$

где $g'(x)$ — производная функции начального зазора, к уравнению, соответствующему задаче с единичной областью контакта:

$$E^* g'(v) = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(u)}{v - u} du, \quad (3.10)$$

где $u = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$, $v = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\alpha = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$. На основе указанного метода [41] была решена задача о внедрении в упругую полуплоскость волнистой поверхности с параметрически изменяемой формой выступов и впадин, описываемой следующей функцией:

$$F(x) = \Delta \left[1 - \frac{(m+1) \cos \frac{2\pi x}{\lambda}}{\left| m \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| + 1} \right], \quad (3.11)$$

где m — параметр формы, $m < 1$. Полученное выражение для определения контактного давления является обобщением решения Вестергаарда для синусоидальной волнистой поверхности:

$$p(x) = G(x) \frac{\sqrt{2\pi\Delta E^*}}{\lambda} \left| \cos \frac{\pi x}{\lambda} \right| \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{\lambda} - \cos \frac{2\pi a}{\lambda}}, \quad (3.12)$$

где

$$G(x) = (m+1)^2 \left(\left| m \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| + 1 \right)^{-2} \left(m \cos \frac{2\pi a}{\lambda} + 1 \right)^{-1} \quad (3.13)$$

Зависимость (3.13) позволяет проанализировать влияние формы волнистой поверхности на основные контактные характеристики.

С использованием разложения функции начального зазора по многочленам Чебышева и приведения периодической контактной задачи к задаче с единичной областью контакта были получены точные [42] и асимптотические [43] решения для двухуровневой волнистой поверхности, внедряющейся в упругое полупространство. В частности, показано, что наличие дополнительной к основной гармонике синусоидальной волнистости малой амплитуды и высокой частоты приводит к осциллирующему характеру не только контактного давления, но и интегральных контактных характеристик (в частности, зависимости размера области фактического контакта от номинального давления).

В более общем случае, когда производная функции зазора между контактирующими поверхностями описывается рядом Фурье

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \sin \frac{2\pi n x}{\lambda} + B_n \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} \right), \quad (3.14)$$

контактные давления будут определяться суммой номинального давления \bar{p} и выражения, являющегося обратным преобразованием Гильберта функции (3.14):

$$p(x) = \bar{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{\lambda} \right) \quad (3.15)$$

При полном контакте между поверхностями контактные давления непосредственно определяются формой зазора между ними. Процедуру их нахождения удобно выполнить с использованием быстрого преобразования Фурье [44]:

$$p(x) = \pi E^* F^{-1} [nF[h](n)] \quad (3.16)$$

В случае неполного контакта коэффициенты ряда Фурье A_n и B_n в формуле (3.15) должны определяться исходя из граничных условий и условия неотрицательности давления внутри областей контакта. В работе [45] вместо наложения дополнительных граничных условий использован вариационный принцип [46], основанный на минимизации полной дополнительной энергии. Проведенные вычисления [45] для синусоидальной волнистости показали, что в сравнении с точным решением наилучшая сходимость метода достигается при высоких нагрузках; при малых нагрузках наблюдалось значительное расхождение результатов.

В работах Мэннерса [47, 48] развит другой подход, основанный на использовании комплексных потенциалов для определения сингулярной части решения и поиске коэффициентов ряда Фурье для определения границ областей контакта. При определении границ областей контакта использовалось условие, что в зонах отсутствия контакта есть хотя бы одна точка, в которой производная функции начального зазора равна нулю. Данный метод показал высокую точность для всего диапазона приложенных нагрузок при численном определении коэффициентов A_n и B_n на основе решения системы алгебраических уравнений.

3.2. Плоская периодическая задача при условии частичного проскальзывания. В условиях частичного проскальзывания к периодическому штампу (совокупности штампов) приложены нормальная и касательная нагрузки, при этом программа нагружения существенно влияет на поведение контактных характеристик. Как и в задачах с единичной областью контакта [23, 49], в периодических задачах с частичным проскальзыванием область контакта разделяется на подобласти сцепления и проскальзывания. В подобласти сцепления выполняется условие равенства тангенциальных перемещений точек взаимодействующих поверхностей, а в подобласти проскальзывания выполняется закон трения Кулона–Амонтона:

$$q(x) = -\mu p(x) \quad (3.17)$$

Здесь μ – коэффициент трения.

Общая постановка и метод решения различных контактных задач, в том числе периодических, с учетом сцепления и проскальзывания путем сведения к векторной задаче Римана предложены в работе Антипова и Арутюняна [50]. В этой и в других более ранних исследованиях показано, что математическая постановка задач с учетом сил трения в области контактного взаимодействия сводится к исследованию связанной системы интегральных уравнений для определения нормальных и касательных контактных напряжений, при этом в частном случае одинаковых упругих постоянных контактирующих материалов система становится несвязанной.

Чиаварелла [51, 52], применив теорию Каттанео и Миндлина [53, 54] и аналогию с задачей для единичной области контакта, получил зависимости касательных напряжений и ширины области проскальзывания от приложенных нормальных и касательных усилий для синусоидальной волнистости и поверхности, описываемой функцией квадрата косинуса, в случае взаимодействия материалов, имеющих одинаковые упругие постоянные.

Позднее Блоком и Киром [33] развит общий подход к решению задачи о частичном проскальзывании тел из одинаковых материалов, форма поверхности которых описывается периодическими функциями, и получено выражение для определения размеров областей сцепления и проскальзывания для периодической системы штампов, форма контактирующей поверхности которых описывается степенной функцией.

Распределение внутренних напряжений с учетом зон сцепления и проскальзывания при внедрении синусоидального штампа определено [55] с применением потенциала Колосова–Мухелишвили.

Получено [56] аналитическое решение задачи о контакте с упругой полуплоскостью упругого тела с заданной периодической системой канавок при одинаковых упругих

постоянных взаимодействующих тел. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта. Получены выражения для определения распределения нормальных и касательных усилий в зонах сцепления и проскальзывания. Установлено, что частичное проскальзывание может происходить только внутри канавок, где с ростом приложенного давления происходит увеличение зоны контакта. Если зона сцепления достигает границы канавки, контактирующие тела переходят к скольжению.

Для материалов, имеющих различные упругие постоянные, система уравнений для определения контактных напряжений является связанной. Антиповым [57] при помощи метода Винера–Хопфа была решена задача о взаимодействии с упругой полуплоскостью периодической системы жестких штампов с плоским основанием при наличии зон сцепления и проскальзывания.

В работе Блока и Кира [33] с целью получения аналитического решения задачи о частичном проскальзывании контактирующих тел с различными упругими постоянными применена аппроксимация, предложенная Гудманом [58], предполагающая, что влияние касательных усилий на нормальные давления пренебрежимо мало. На основе этого предположения были рассмотрены задачи как с полным сцеплением по всей площадке контакта, так и с частичным проскальзыванием для периодической системы штампов с плоским основанием и с синусоидальной волнистой поверхностью.

3.3. Плоская периодическая контактная задача в условиях полного скольжения. Периодическая задача при полном скольжении поверхностей предполагает учет при определении распределения контактных давлений, действующих в области контактного взаимодействия касательных напряжений, удовлетворяющих соотношению (3.17).

Кузнецов [59] впервые получил точное решение плоской периодической задачи фрикционного скользящего контакта жесткого волнистого индентора и упругой полуплоскости, используя формулы Колосова–Мухелишвили и теорию автоморфных функций. Для синусоидального индентора с поверхностным профилем:

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2R\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(x - \gamma)\right), \quad (3.18)$$

где R – радиус кривизны вершины профиля; γ – расстояние между центром площадки контакта и осью симметрии выступа, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{4G\lambda \cos \pi\alpha}{\pi R(\chi + 1)} \cos(\pi(x + 2\alpha a - 2\gamma)/\lambda) \sin^{\frac{1}{2}-\alpha}(\pi(a+x)/\lambda) \sin^{\frac{1}{2}+\alpha}(\pi(a-x)/\lambda), \quad (3.19)$$

где G – модуль сдвига; α – параметр, который зависит от упругих свойств материала полуплоскости и коэффициента трения: $\operatorname{tg} \pi\alpha = \mu \frac{\chi - 1}{\chi + 1}$, $0 \leq \alpha < 0.5$, $\chi = 3 - 4\nu$.

Полуширина области контакта и ее смещение определяются из системы трансцендентных уравнений, которая получается из условия, что контактное давление падает до нуля на границах участков контакта. Совокупное влияние коэффициента трения μ и плотности контакта a/λ на распределение контактного давления, а также на размер и положение контактных областей было проанализировано Кузнецовым и Гороховским [60]. На основе приближенного решения этой задачи [61] и в предположении, что $\gamma = \alpha = 0$, напряженно-деформированное состояние поверхностных слоев, контактирующих тел исследовалось при различных значениях коэффициента трения и ширины области контакта [62].

Аналогичные задачи о скольжении по упругой полуплоскости синусоидального штампа и периодической системы штампов с плоским основанием рассмотрены Блоком и Киrom [33]. Задачи были решены сведением основного уравнения к интеграль-

ному уравнению с ядром Коши второго рода. Для синусоидального штампа было получено следующее выражение для определения контактного давления при периоде волнистости $\lambda = 2\pi$:

$$p(x) = \frac{\Delta E^* \cos(a/2) \cos(x/2)}{\sin \pi m} \sin \left(l + \gamma - \frac{x}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^m \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1-m}, \quad (3.20)$$

где эксцентриситет зоны контакта γ определяется выражением:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos l}{\sin l - \psi^2 \sqrt{1 + \psi^2 m(1-m)}} \right) \quad (3.21)$$

В формулах (3.20) и (3.21) $\operatorname{tg} \pi m = 1/\beta\mu$; $l = (\pi m - \phi(2m-1))$; $\operatorname{tg} \phi = 1/\psi$.

Для периодической системы штампов с плоским основанием (a – полуширина подошвы штампа) зависимость для определения распределения контактного давления получена в виде [33]:

$$p(x) = \frac{P \sin \pi m \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{-m}}{2\pi \cos \frac{a}{2} \sin (\pi m - \phi(2m-1))} \quad (3.22)$$

Исследовано [63] скольжение волнистого штампа по упругой полуплоскости, при наличии анизотропии материалов контактирующих тел. Задача была сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта, а решение получено в виде рядов многочленов Якоби. Полученные результаты показали, что для ортотропных материалов размер зазора зависит от ориентации оси ортотропии. Для некоторых ориентаций этой оси зазоры увеличиваются с увеличением коэффициента трения μ . Данный результат отличается от поведения изотропных материалов, для которых увеличение коэффициента трения всегда приводит к уменьшению зазоров.

Носоновский и Эдамс [64] исследовали установившееся скольжение упругих тел, ограниченных волнистыми поверхностями, в рамках динамической контактной задачи. Решение основано на выводе интегрального уравнения с ядром Коши второго рода с помощью интегральных преобразований и рядов Фурье. Полученное уравнение решено численно с использованием многочленов Якоби. Для установившегося режима скольжения при заданных значениях коэффициента трения, свойств материалов контактирующих тел и скорости скольжения определена зависимость ширины области контакта от приложенных номинальных давлений и касательных усилий. Результаты указывают на уменьшение минимального усилия, необходимого для устранения зазора между контактирующими телами, с увеличением коэффициента трения и/или скорости скольжения. Резонанс возникает, когда скорость скольжения приближается к скорости распространения волны Рэлея в полуплоскости.

Скольжение системы параболических штампов с учетом трения и износа рассмотрено Солдатенковым [65]. Задача сведена к каноническому сингулярному интегральному уравнению на дуге окружности в комплексной плоскости. Получены асимптотические выражения для определения полуширины участка контакта и смещения ее центра в случае, когда размер области контакта мал по сравнению с расстоянием между штампами.

3.4. Пространственная задача. Пространственные периодические контактные задачи представляют значительный интерес вследствие того, что большинство шероховатых поверхностей, встречающихся в природе и технических приложениях, изотропны, т.е. высотные и шаговые параметры профилей шероховатости в продольном и поперечном направлениях сравнимы по величине. Кроме того, пространственные периодические контактные задачи возникают при наличии на контактирующих по-

верхностях особой текстуры, как правило, образованной физическими и химическими методами обработки, например лазером или обработкой давлением.

С точки зрения теории упругости пространственная периодическая контактная задача значительно сложнее плоской в силу отсутствия прямой резольвенты основного интегрального уравнения, в котором левая часть выражается бесконечной суммой (см. разд. 1, выражения (1.1) и (1.2)). На практике условие $N \rightarrow \infty$ в (1.1) заменяют конечной суммой и решение уравнений (1.1)–(1.3) выполняют с помощью итерационных процедур или метода граничных элементов.

При полном контакте между телами задача становится линейной и значительно упрощается. Пространственный аналог указанной ранее плоской задачи для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, рассматривался Джонсоном и др. [45]. На основе принципа суперпозиции показано, что для регулярного рельефа, описываемого функцией:

$$f(x, y) = \Delta(1 - \cos(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi y/\lambda)), \quad (3.23)$$

контактное давление при полном контакте определяется выражением:

$$p(x, y) = \bar{p} + \frac{\sqrt{2\pi} E^* \Delta}{\lambda} \cos(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi y/\lambda) \quad (3.24)$$

Для случая неполного контакта в данной работе получены два асимптотических решения, которые устанавливают соотношения для основных интегральных характеристик контакта — приложенного номинального давления, площади фактического контакта и среднего зазора между поверхностями, для случаев очень низких и очень высоких номинальных давлений. В первом случае асимптотическое решение получено на основе применения теории Герца и аппроксимации функции (3.23) параболой у вершины. Во втором случае малый зазор между поверхностями моделировался круговой трещиной, что позволило определить интегральные характеристики при почти полном контакте. В промежуток между указанными асимптотическими результатами решение строилось численно на основе поиска коэффициентов рядов Фурье при минимизации полной дополнительной энергии (аналогично случаю плоской задачи для синусоидальной волнистости).

Рассмотрен [66] случай полного контакта волнистой поверхности и полупространства при условии их сцепления. Из полученного решения следует, что с увеличением коэффициента Пуассона величина номинального давления, необходимого для достижения полного контакта, возрастает.

С использованием метода конечных элементов получены [67] соотношения для интегральных контактных характеристик, близкие к результатам Джонсона и др. [45]; кроме того, были предложены выражения, аппроксимирующие зависимости площади фактического контакта и среднего зазора между волнистой поверхностью и полупространством для всего диапазона приложенных номинальных давлений.

Результаты исследований [45], посвященных контактной задаче для волнистой поверхности (3.23), были уточнены [68] с использованием метода граничных элементов и быстрого преобразования Фурье. В частности, установлено наличие точек перегиба зависимости фактической площади контакта от номинального давления. Первая точка соответствует преобразованию контура области контакта от круга к фигуре, близкой к квадрату со скругленными углами. Вторая — слиянию соседних областей контакта.

На основе разложения функции (3.23) в двойной ряд Фурье в полярных координатах уточнены [69] асимптотические зависимости, полученные ранее [45]. Для случая низких значений нагрузок решена задача о внедрении единичного штампа, вершина которого описывается функцией (3.23), а для случая высоких значений — задача о круговой трещине под действием неосисимметричного давления. Полученные зависимо-

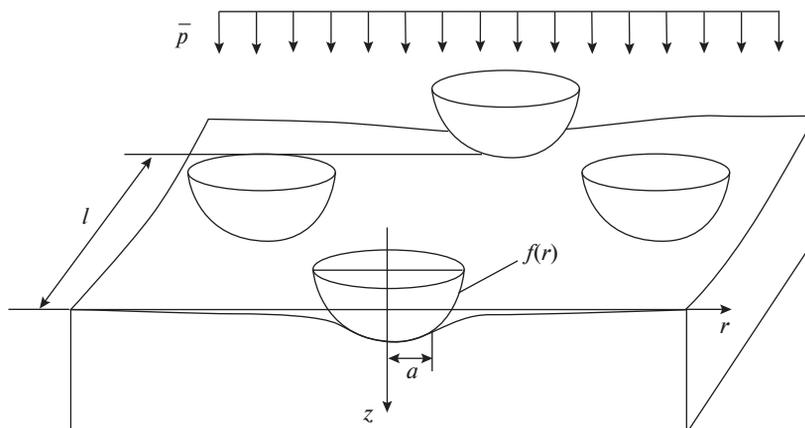


Рис. 2. Схема пространственной периодической контактной задачи для системы осесимметричных инденторов, внедряющихся в упругое полупространство.

сти фактической площади контакта и среднего зазора от номинального давления хорошо соотносятся с результатами численного моделирования [67, 68].

Периодическая контактная задача для системы осесимметричных гладких инденторов, форма контактирующей поверхности которых описывается функцией $f(r)$, взаимодействующей без сил трения с упругим полупространством, рассмотрена в [70] (рис. 2). Ее решение построено с использованием соотношений, полученных Галиным [23] для распределения давления под штампом при действии на границе полупространства вне штампа заданной распределенной пригрузки. В результате для определения контактного давления $p(r, \theta)$ под каждым штампом получено интегральное уравнение Фредгольма, ядро $K(r, \theta, r', \theta')$ которого представлено бесконечным сходящимся рядом:

$$p(r, \theta) - \iint K(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r), \quad (3.25)$$

а функция $G(r)$ зависит от формы $f(r)$ контактирующей поверхности отдельного индентора и определяется соотношением:

$$G(r) = \frac{E^*}{4\pi^2} \int_0^a \Delta f(r') H_1(r, r') dr', \quad (3.26)$$

где

$$H_1(r, r') = \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{R(r, r', \theta')} \arctg \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{a^2 - r'^2}}{aR(r, r', \theta')} d\theta' \quad (3.27)$$

$$R(r, r', \theta') = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2},$$

a – радиус единичного пятна контакта.

Предложен алгоритм приближенного решения этой задачи, основанный на замене ядра интегрального оператора в (3.25) конечной суммой (метод локализации).

3.5. Метод локализации. Показано [21], что решение интегрального уравнения (3.25) может быть с высокой степенью точности приближено решением следующего уравнения:

$$p(r, \theta) - \iint \sum_{i=1}^n K_i(r, \theta, r', \theta') p(r', \theta') r' dr' d\theta' = G(r) + \bar{N}PQ(r, A_n), \quad (3.28)$$

где ядро есть конечная сумма первых членов ряда, которым представляется функция $K(r, \theta, r', \theta')$ в (3.25), а дополнительная функция, входящая в правую часть уравнения, получена путем интегрирования остаточного члена этого ряда. Эта функция представляет собой произведение следующих множителей: \bar{N} – среднее количество пятен контакта на единице площади, P – нагрузка, действующая на каждое пятно контакта и функции $Q(r, A_n)$, определяемой соотношением:

$$Q(r, A_n) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}} \quad (3.29)$$

В соотношении (3.29) A_n – радиус круга, в котором расположены все инденторы, влияние которых учтено ядром интегрального оператора в уравнении (3.28). Показано [21, 70], что за счет выбора этого радиуса решение уравнения (3.28) можно с любой степенью точности приблизить к решению исходного уравнения (3.25). Доказанное утверждение позволило предложить приближенный подход к решению периодических контактных задач с дискретной областью взаимодействия – метод локализации. Суть его состоит в том, что в контактных задачах с дискретной областью взаимодействия с определенной степенью точности влияние фактических давлений на удаленных от рассматриваемого пятна контакта может быть учтено путем рассмотрения в этой области номинального давления $\bar{p} = P\bar{N}$.

Результаты расчетов [21] показывают, что даже при предельно плотном расположении сферических инденторов радиуса R ($a/l = 0.5$, где l – расстояние между вершинами инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки), погрешность в определении давления из уравнения (3.28) при $n = 0$ не превышает 20%, а распределения давления, рассчитанные при $n = 1$ и $n = 2$, различаются менее чем на 0.1%. При увеличении параметра a/l эта оценка улучшается. Следует отметить, что при $n = 0$ для определения давления под каждым штампом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $f(r)$, имеем более простую формулу:

$$p(r) = \frac{E^*}{4\pi^2} \int_0^a \Delta f(r') H_1(r, r') dr' + \frac{2}{\pi} \bar{N} P \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}} \right), \quad (3.30)$$

в которой ядро интегрального оператора определено выражением (3.27).

Подход, основанный на методе локализации, был использован [10] и [70] для расчета контактных давлений и внутренних напряжений при внедрении периодической системы равновысоких инденторов сферической формы в упругое однородное и двухслойное упругое полупространство, а также для расчета внедрения в упругое [70] и [71] (однородное и двухслойное) полупространство периодической системы разноуровневых инденторов (расположенных на двух и трех различных высотных уровнях). Расчеты показали существенное влияние высотного распределения инденторов и их плотности на контактные характеристики и величину номинального давления, необходимого для вступления в контакт инденторов следующего высотного уровня.

Исследование напряженного состояния внутри упругого полупространства при его взаимодействии с периодической системой одноуровневых сферических инденторов [21, 70] показало, что увеличение напряжений имеет место в приповерхностном слое на глубине, соизмеримой с половиной периода, причем характер этого распределения существенно зависит от параметра a/l , характеризующего плотность контакта. Возрастание плотности контакта приводит к возникновению на некоторой глубине под поверхностью полупространства (рис. 3) концентрации напряжений, которая может привести к развитию пластических деформаций и зарождению микротрещин. Полученные результаты качественно совпадают с выводами, сделанными ранее [72] при

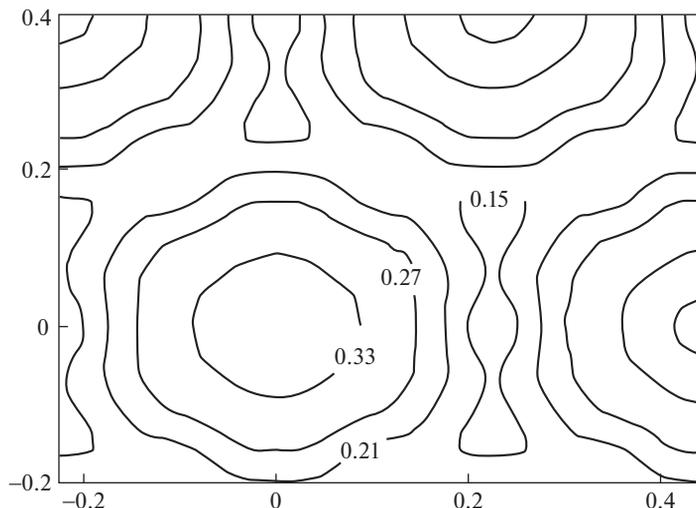


Рис. 3. Изолинии функции максимальных касательных напряжений τ_{\max}/\bar{p} в плоскости $z/R = 0.08$ при $a/R = 0.2$ и $l/R = 0.44$.

исследовании контактного взаимодействия синусоидального штампа с упругой полуплоскостью.

Показано [73], что метод локализации применим также для решения плоской периодической контактной задачи. При внедрении периодической системы гладких штампов с формой контактирующей поверхности, заданной непрерывной функцией $F(x)$, выражение для контактного давления под отдельным штампом системы имеет вид:

$$p(x) = \frac{E^* \sqrt{a^2 - x^2}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{F'(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - x)} + \frac{2P}{\pi l} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{l^2 - 4a^2}} \right), \quad (3.31)$$

где l – расстояние между штампами (период).

Выражение (3.31) по своей структуре совпадает с соотношением (3.30), полученным при рассмотрении периодической задачи в пространственной постановке.

Сравнение расчетов контактного давления [73] по приближенной формуле (3.31), полученной на основе метода локализации, с известными точными решениями периодических задач для синусоидального [34] и пилообразного [33] штампов, а также для периодической системы параболических штампов [74], показало, что контактные характеристики определяются с применением метода локализации с высокой степенью точности даже при достаточно высокой плотности контакта ($2a/l \approx 0.7$) (рис. 4). Установлено, что увеличение плотности контакта приводит к росту максимальных контактных давлений и уменьшению размера единичного пятна контакта. Сама эпюра давлений на единичном пятне контакта в большей степени определяется формой штампа (отдельной неровности).

Преимущество применения метода локализации при решении задач дискретного контакта связано с его относительной простотой и возможностью провести расчетные оценки влияния плотности контакта и формы штампа (отдельной неровности) на характеристики контактного взаимодействия (размер области контакта, распределение контактных давлений и т.д.) при разных параметрах микрогеометрии контактирующих поверхностей.

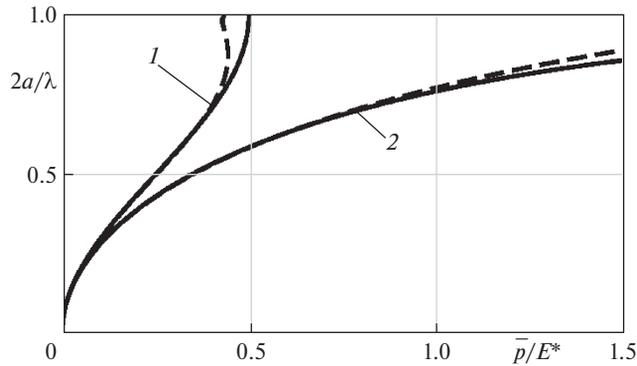


Рис. 4. Зависимость размера области контакта от номинального давления в плоской периодической контактной задаче: 1 – синусоидальная волнистая поверхность; 2 – периодическая система цилиндрических штампов; сплошная линия – точное решение; штриховая линия – решение по методу локализации.

4. Задачи дискретного контакта с учетом взаимодействия поверхностей в межконтактном зазоре.

4.1. Наличие промежуточной среды в зазоре между поверхностями. Наличие среды в зазоре между контактирующими поверхностями (жидкость, газ) существенно изменяет поведение контактных характеристик с ростом приложенного номинального давления. Исследование влияния сжимаемой жидкости, заполняющей объем между синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскостью, на контактные характеристики проведено Кузнецовым с помощью комплексных потенциалов и аппарата автоморфных функций [75]. Было показано, что наличие жидкой среды в зазоре между волнистой поверхностью и полуплоскостью резко уменьшает размер области контакта, при этом чем ниже сжимаемость жидкости, тем меньше ширина участка контакта.

В дальнейшем направление, связанное с решением плоских периодических контактных задач при наличии в зазоре промежуточной среды (жидкости и/или газа), было развито в работах Мартыняка с соавторами. Для решения задач данного типа был развит метод межконтактных зазоров [76].

Исследована [77] задача контакта двух упругих изотропных полуплоскостей из различных материалов, граница одной из которых имеет периодическую систему канавок. Межконтактные зазоры заполнены газом, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Поставленная задача сведена к системе трех уравнений: сингулярного интегрального уравнения для высоты зазора и двух трансцендентных уравнений для ширины зазора и давления газа. Выявлены резкие изменения зависимостей ширины и объема зазоров, сближения и податливости контакта от внешней нагрузки в начале и в конце фазового перехода газ–жидкость.

Рассмотрена [78] задача контакта жесткого тела с волнистой поверхностью и упругой полуплоскости при наличии в зазоре между контактирующими телами газа и несжимаемой жидкости, не смачивающей поверхности тел. Падение давления в жидкости и в газе описывается уравнением Лапласа. С использованием метода комплексных потенциалов [11] контактная задача сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта для высоты зазоров и системе двух трансцендентных уравнений для расчета ширины зазоров и областей, заполненных жидкостью. Установлено, что сближение поверхностей уменьшается с увеличением поверхностного натяжения жидкости.

Уменьшение объема жидкости приводит к уменьшению ширины области, заполненной жидкостью.

В работе Шварца и Ястребова [79] рассмотрена связанная задача течения жидкости в зазоре между упругими телами с волнистыми поверхностями под давлением. Давление жидкости принималось сопоставимым с контактным давлением. Получено приближенное аналитическое и численное (методом конечных элементов) решение задачи. Показано, что внешнее давление, необходимое для герметизации стыка, не зависит от давления на выходе.

4.2. Учет адгезионного взаимодействия поверхностей. Наличие межмолекулярного (адгезионного) взаимодействия поверхностей изменяет характер напряженно-деформированного состояния контактирующих тел и влияет на их контактные характеристики – площадь фактического контакта, сближение поверхностей под нагрузкой и т.д. При дискретном характере взаимодействия поверхностей области действия межмолекулярных сил тоже дискретны. Наибольшее количество работ в данной области посвящены плоской периодической контактной задаче, при этом рассматривается адгезионное взаимодействие сухих поверхностей, описываемое упрощенными моделями: ДКР (Джонсон–Кендалл–Робертс) [80] или Можи–Дагдейла (МД) [81]. В модели ДКР предполагается, что межмолекулярные силы действуют внутри области контакта, вызывая постоянное отрицательное перемещение, а распределение давлений складывается из решения задачи для ограниченной области контакта (положительное давление, вызываемое сжатием) и сингулярного решения, обеспечивающего равномерное смещение по области контакта (отрицательное давление, вызванное растяжением).

В модели МД предполагается, что вне области контакта (в зазоре) действует постоянное отрицательное давление, являющееся аппроксимацией потенциала Леннарда–Джонса, описывающего действие межмолекулярных сил. Как правило, модель ДКР используют для материалов с малым модулем упругости, а модель МД подходит как для мягких материалов, так и для более жестких. Применимость модели оценивают с помощью параметра Тэйбора [82]:

$$\mu_T = \left(\frac{Rw^2}{E^{*2} z_0^3} \right)^{1/3}, \quad (4.1)$$

где R – приведенный радиус кривизн контактирующих тел в точке их первоначального контакта, w – работа межмолекулярных сил; z_0 – равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила адгезии равна нулю, E^* – приведенный модуль упругости контактирующих материалов. При $\mu_T \ll 1$ модель МД переходит в модель ДМТ (Дерягин–Муллер–Топоров) [83], в которой учитываются растягивающие напряжения, вызванные адгезионными силами, вне области контакта, в предположении, что они не влияют на распределение напряжений внутри области контакта. При $\mu_T \gg 1$ модель МД переходит в модель ДКР.

Джонсоном [84] рассмотрена плоская периодическая контактная задача с учетом адгезионных сил, рассматриваемых в рамках модели ДКР. В соответствии с моделью ДКР, контактное давление складывалось из положительного сдвигаемого $p_1(x)$, определяемого решением Вестергаарда (3.4), и отрицательного $p_2(x)$, вычисляемого согласно решению Койтера [85] для периодической системы трещин:

$$p_2(x) = -\bar{p}_2 \left(1 - \left(\frac{\cos \pi a / \lambda}{\cos \pi x / \lambda} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (4.2)$$

где \bar{p}_2 – среднее значение отрицательной компоненты давления; λ – период. С использованием коэффициента интенсивности напряжений на границе области контак-

та была определена скорость высвобождения энергии упругой деформации и получено следующее соотношение между номинальным давлением \bar{p} и полушириной области контакта a :

$$\bar{p} = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} - \sqrt{\frac{2E^* w}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{\lambda}} \quad (4.3)$$

Также в работе Джонсона [84] получено асимптотическое решение пространственной задачи при наличии адгезии и условия почти полного контакта для волнистой поверхности (3.23). Для случаев плоской и пространственной задачи рассмотрены условия отрыва поверхностей.

Зильберманом и Перссоном [86] получено уточненное решение задачи контакта синусоидальной волнистой поверхности и упругой полуплоскости с учетом адгезии в рамках ДКР модели, в котором учитывались зависимости упругой энергии и энергии адгезии от формы деформированной поверхности полуплоскости. Показано хорошее совпадение аналитических и численных результатов, полученных методом молекулярной динамики.

Исследован [87] упругий контакт волнистой поверхности и полуплоскости с учетом адгезии, описываемой МД моделью. Задача решена численно-аналитическим способом с применением квадратур для вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши. Показано, что зависимость размера области контакта от номинального давления характеризуется разрывами и гистерезисом. Установлено, что при нулевой нагрузке существует такая область контакта заданного размера, при которой с повышением номинального давления может происходить скачок в режим полного контакта.

Приведено [88] сравнение результатов, полученных для плоской задачи об адгезионном контакте жесткого тела с синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскости с использованием ДКР и МД моделей адгезии. В отличие от [87] в работе [88] при построении решения по МД модели применялось условие равенства коэффициентов интенсивности сжимающих и растягивающих напряжений на границе области контакта. Показано, что когда размер области контакта приближается к периоду волнистой поверхности, модель ДКР неприменима, и для количественной оценки поверхностных сил, действующих вне зоны контакта, следует использовать МД-модель.

Предложена [89] асимптотическая модель адгезионного контакта волнистой поверхности и полуплоскости, предполагающая, что растягивающие усилия в зоне адгезии можно представить в виде разности решений Вестергаарда (3.1.4) для зоны адгезии и зоны контакта. Получены аналитические выражения для определения контактных характеристик, которые показали хорошее соответствие с расчётами по МД модели адгезионного контакта [88].

Изучено [90] адгезионное взаимодействие периодической системы сферических штампов с упругим полупространством. Рассмотрены случаи как молекулярной, так и капиллярной адгезии. Задача решена с помощью метода локализации (см. п. 3.5). Проанализированы распределение контактного давления, деформированная форма упругого полупространства, размер областей контакта и другие характеристики в зависимости от формы штампов, расстояния между ними, величины поверхностной энергии (случай молекулярной адгезии) или толщины пленки жидкости, покрывающей полупространство (случай капиллярной адгезии). Показано, что форма штампов оказывает существенное влияние только на распределение контактных давлений; поведение других контактных характеристик существенно зависит от плотности пятен фактического контакта и свойств поверхности или покрывающих ее тонких пленок.

5. Моделирование влияния параметров микрогеометрии на характеристики контактно-го взаимодействия на макроуровне. При контактном взаимодействии деформируемых тел, обладающих поверхностным рельефом, существует два масштаба длины, один из

которых связан с характерным размером L номинальной области контакта Ω , а второй – с характерным размером неровности и расстояния между ними l . Соотношение между этими характеристиками может меняться в процессе контактного взаимодействия. Так, при незначительных нагрузках возможна ситуация, когда величины L и l соизмеримы и в контакте находится конечное число выступов. Тогда для определения контактных характеристик может быть применен метод, изложенный в разд. 2 этой статьи.

В том случае, когда радиус номинальной области контакта значительно превосходит характерный размер единичного пятна контакта, расчет контактных характеристик производится на двух масштабных уровнях. С этой целью вводится понятие податливости шероховатого слоя [12] или функции $C[p(x, y)]$ дополнительного смещения [21], которая зависит от параметров микрогеометрии поверхности. Эта функция входит в интегральное уравнение для определения номинальных (осредненных) контактных давлений $p(x, y)$ и номинальной области контакта Ω на макроуровне, которое при заданной макроформе $F(x, y)$ штампа, внедряемого в упругое полупространство на величину δ , имеет вид:

$$C[p(x, y)] + \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = \delta - F(x, y) \quad (5.1)$$

Штаерман [12] предложил определять функцию $C[p(x, y)]$ экспериментально, а для решения контактной задачи в плоской постановке использовал ее линейную аппроксимацию.

Для некоторых типов поверхностей с регулярным микрорельефом функция дополнительного смещения может быть определена аналитически или в виде аппроксимации численных результатов решения соответствующих контактных задач на микроуровне.

Подход к определению функции дополнительного смещения $C[p(x, y)]$ [21, 91, 92] основан на моделировании контактного взаимодействия с упругим полупространством шероховатого номинально плоского тела с заданным регулярным периодическим рельефом поверхности, при этом рассчитываемая функция дополнительного смещения зависит от формы и пространственного расположения неровностей и учитывает взаимное влияние пятен контакта. Для ее определения используются решения периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках [93].

На основе анализа решений периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках показано [93], что функция дополнительной податливости может быть приближена степенной функцией с достаточной степенью точности только при малых номинальных давлениях и не пригодна для описания перехода от дискретного к полному контакту на микроуровне.

После определения функции $C[p(x, y)]$ номинальные характеристики контактного взаимодействия на макроуровне определяются на основании решения интегрального уравнения (5.1). Разработаны [12, 94, 95] методы его решения при различных видах функции $C[p(x, y)]$ и для наиболее часто встречающихся в контактных задачах ядер $K(x, y, x', y')$ интегральных операторов.

На основании решения контактной задачи для цилиндрического и сферического штампов на макроуровне с учетом функции дополнительного смещения, рассчитанной из решения контактной задачи на микроуровне для системы штампов, моделирующей микрогеометрию поверхности, проведен анализ [21, 92, 96] влияния микрогеометрии как на номинальные (осредненные) характеристики взаимодействия тел (номинальную область контакта, внедрение при заданной величине нагрузки), так и на фактическую область контактного взаимодействия, значения максимальных фактических давлений, зазор между поверхностями и т.д.

На основе решения задачи о взаимодействии с учетом сил молекулярного притяжения двух номинально плоских полупространств, одно из которых является упругим, а поверхность другого обладает регулярным рельефом, проведен [97, 98] анализ функции дополнительного смещения от приложенного номинального давления и эффективной удельной работы адгезии при различных параметрах адгезионного взаимодействия и микрогеометрии поверхности.

6. Задачи механики дискретного контакта для неупругих тел.

6.1. Контакт при наличии упругих и пластических деформаций. При контакте тел из материалов, обладающих пластическими свойствами, например металлов, при увеличении приложенной нагрузки начинается пластическое течение в поверхностном слое. При этом дискретность области контактного взаимодействия оказывает существенное влияние на зарождение и развитие зон пластического течения.

Одно из первых исследований в данном направлении выполнено Чайлдсом [99], который рассмотрел пластический контакт жесткого плоского штампа и поверхности с пилообразным микрорельефом с использованием метода линий скольжения. Им показано, что как только поля линий скольжения отдельных выступов начинают перекрываться, дальнейшее деформирование выступов будет затруднено и тело будет деформироваться целиком. Угол наклона выступов существенно влияет на напряженно-деформированное состояние тел в контакте и значение нагрузки, при котором дальнейшее деформирование выступов шероховатости будет невозможно. Было также отмечено, что при сближении тел в направлении нормали к поверхности состояние полного контакта для идеально-пластических тел недостижимо.

Гао и др. [100] использовали метод конечных элементов для решения контактной задачи о сжатии упругопластической синусоидальной волнистой поверхности жестким штампом. Изменение напряженно-деформированного состояния волнистой поверхности описывалось безразмерным параметром

$$\Lambda = \frac{E^* \Delta}{\sigma_m \lambda}, \quad (6.1)$$

где Δ , λ — амплитуда и период волнистой поверхности соответственно; σ_m — предел текучести деформируемого материала. Выявлено, что для значений Λ порядка единицы первоначальное почти герцевское распределение давлений на каждом пятне контакта становится более равномерным со средним значением, близким к твердости материала. Однако при больших значениях Λ пластические деформации под соседними пятнами контакта могут привести к увеличению среднего давления, которое может достигать $5.8\sigma_m$ при высоких плотностях контакта. Было отмечено [101] схожее повышение давления при использовании теории дислокационной пластичности для описания пластической деформации волнистой поверхности. К аналогичным выводам пришли авторы статьи [102], в которой методом конечных элементов была решена задача упругопластического контакта трехмерной волнистой поверхности с полупространством. Также было показано, что не существует верхнего предела роста давления при увеличении амплитуды волнистой поверхности вследствие преобладания гидростатических напряжений при высоких плотностях контакта.

В работе Мэннерса [103] на основе теории линий скольжения проведен асимптотический анализ пластического контакта двумерной волнистой поверхности и полуплоскости. Показано, что в случае идеальной пластичности для полного сплющивания волнистой поверхности необходимо приложить бесконечное давление, что соответствует результатам Чайлдса [99] для пилообразного рельефа. В случае упругопластического материала полный контакт поверхностей достигается при высоких, но конечных значениях номинального давления, что соответствует численным результатам Гао и др. [100].

6.2. Фрикционный контакт вязкоупругих тел. Циклическое деформирование поверхностных слоев материала, происходящее вследствие дискретности контактного взаи-

модействия и обусловленное наличием микрорельефа, играет важную роль в формировании сил трения в условиях скольжения тел с шероховатыми поверхностями. Для описания механизма диссипации энергии в условиях циклического деформирования поверхностных слоев материала используются вязкоупругие модели.

В данном разделе дан обзор исследований, посвященных анализу совместного влияния параметров микрогеометрии поверхности и неупругих деформаций контактирующих тел на контактные характеристики и силу трения при скольжении тел, поверхность которых имеет регулярный рельеф. Ряд аспектов этой проблемы изучался путем решения контактных задач в квазистатической постановке при разном способе описания микрорельефа поверхности жесткого контртела, взаимодействующего с вязкоупругим материалом в условиях трения скольжения [21, 91, 104–114].

Рассмотрены контактные задачи в плоской постановке о движении периодической системы штампов по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с упругой полуплоскостью [104–106]. Деформации слоя описывались одномерными моделями Максвелла [104, 105] и Кельвина [106]. Проведен анализ зависимости деформационной составляющей коэффициента трения, возникающей при скольжении индентора, от параметров его рельефа, реологических характеристик поверхностного слоя и скорости скольжения. В частности, показано, что деформационная составляющая коэффициента трения μ_d является немонотонной функцией безразмерного параметра $\zeta_0 = (a + b)/(2VT_\epsilon)$, который зависит от времени запаздывания T_ϵ и скорости V скольжения индентора и представляет собой отношение времени, за которое элемент проходит расстояние, равное полуширине площадки контакта $(a + b)/2$ отдельной неровности, ко времени запаздывания вязкоупругого материала. Коэффициент трения стремится к нулю при $\zeta_0 \rightarrow 0$ и $\zeta_0 \rightarrow \infty$. Эти предельные случаи соответствуют решению задачи в упругой постановке. Аналогичные результаты получены при решении пространственной контактной задачи о скольжении системы сферических неровностей по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина [107, 108].

С целью изучения влияния на контактные характеристики и силу трения не только формы вершин неровностей, но и впадин шероховатой поверхности исследовались контактные задачи о скольжении двоякопериодической волнистой поверхности по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина, характеризующей спектром времен релаксации [109–111]. Рассматривались случаи полного [109] и дискретного контакта [110, 111].

Разработаны также методы расчета деформационной составляющей силы трения при скольжении индентора с многоуровневой шероховатостью по вязкоупругому основанию [112]. Построено [113] аналитическое решение контактной задачи в плоской постановке о скольжении штампа с периодическим рельефом по границе вязкоупругой полуплоскости в условиях полного контакта в предположении отсутствия касательных контактных напряжений; определены условия осуществления полного контакта и дан анализ распределения контактных давлений и зависимости силы трения от скорости и параметров микрогеометрии поверхности для профилей, описываемых различными периодическими функциями.

Представлено [114] аналитическое решение задачи контакта жесткого синусоидального штампа по вязкоупругой полуплоскости. Решение задачи базируется на методе Хантера [115] для единичной области контакта. Результаты показывают, что в зависимости от номинального давления и скорости скольжения может произойти переход от полного контакта к частичному. Получены зависимости деформационной составляющей коэффициента трения, размера области контакта и дополнительного смещения от реологических и упругих свойств материала полуплоскости, геометрических параметров волнистой поверхности, номинального давления и скорости скольжения.

На основе решения задачи о скольжении жесткого трехмерного штампа периодической структуры по вязкоупругому основанию при наличии несжимаемой жидкости в зазоре между контактирующими поверхностями [116] дан анализ влияния жидкости на сопротивление движению штампа и на распределение давлений в области контакта. В частности, показано, что наличие жидкости в зазоре приводит к уменьшению размера единичного пятна контакта и деформационной составляющей силы трения.

Рассмотрены [117–119] контактные задачи в плоской и пространственной постановках о скольжении жесткого тела с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания с учетом сил молекулярного притяжения в зазоре между поверхностями. На основании проведенных исследований установлено, что при наличии адгезионного притяжения увеличивается фактическая область контакта и переход от дискретного к полному контакту происходит при меньших нагрузках; адгезионное притяжение приводит к возникновению области контакта даже при отрицательных нагрузках, при этом с увеличением силы адгезии сила трения возрастает.

Заключение. Проведенный обзор показывает значительный интерес ученых к исследованию контактных задач для неодносвязной области взаимодействия, который обусловлен большой практической значимостью результатов их решения как для развития направления инженерии технических поверхностей и элементов трибосопряжений, так и в области разработки новых материалов и конструкций.

Математические модели основаны на решении краевых задач со смешанными граничными условиями для упругих, вязкоупругих и упругопластических сред. Показано, что в современных исследованиях большое внимание уделяется учету дополнительных сил, действующих в зазоре между контактирующими поверхностями (адгезионное взаимодействие, теплообмен, наличие жидкости и т.д.).

Результаты решения задач дискретного контакта дают возможность оценить влияние параметров микрогеометрии поверхностей на распределение контактных давлений, фактическую площадь контакта, а также на силу трения в условиях фрикционного взаимодействия поверхностей. Следует отметить, что в условиях фрикционного взаимодействия параметры микрогеометрии контактирующих поверхностей влияют также и на характер разрушения поверхностных слоев материалов, поскольку возникающее циклическое поле напряжений вызывает накопление в них усталостных повреждений.

Результаты исследований задач с дискретной областью взаимодействия используются не только для оценки характеристик взаимодействия различных элементов конструкций, но и для разработки способов управления их функциональными характеристиками за счет выбора оптимального поверхностного рельефа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-18-50346.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.Я. Физика и микрогеометрия технических поверхностей. Минск: Беларуская навука, 2016. 248 с.
2. Thomas T.R. Rough Surfaces. London: Imperial College Press, 1999. 278 p.
3. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 228 с.
5. Рыжов Э.В., Сулов А.Г., Федоров В.П. Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 176 с.
6. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. xii+518 p.
7. Yastrebov V.A. Numerical Methods in Contact Mechanics. London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. xviii+392 p.

8. Hills D., Andresen H., Barber J.R. et al. Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology / Ed. by Paggi M. and Hills D. Cham: Springer, 2020. vii+330 p.
9. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТЛ, 1955. 491 с.
10. Горячева И.Г., Торская Е.В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 642–652.
11. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1933. 382 с.
12. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
13. Gladwell G.M.L. Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
14. Dezyani M., Sharafbafi F., Irani S. A new solution for the two-zonal contact problem // Arab. J. Sci. Eng. 2013. V. 38. № 6. P. 1509–1518.
15. Ghanati P., Adibnazari S. A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. P. 1825–1836.
16. Vergne P., Villechaise B., Berthe D. Elastic behavior of multiple contacts: asperity interaction // J. Tribol-T ASME. 1985. V. 107. № 2. P. 224–228.
17. Berthe D., Vergne P. An elastic approach to rough contact with asperity interactions // Wear. 1987. V. 117. № 2. P. 211–222.
18. Nowell D., Hills D.A. Hertzian contact of ground surfaces // J. Tribol-T ASME. V. 111. № 1. P. 175–179.
19. Sundaram N., Farris T.N. Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME. 2009. V. 131. № 2. P. 1–12.
20. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
21. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
22. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribol. Int. 1991. V. 24. № 1. P. 29–35.
23. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
24. Greenwood J.A., Williamson G.P.B. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 295. № 1442. P. 300–319.
25. Андрейкив А.Е., Панасюк В.В. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела граничных условий // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 26–32.
26. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // В кн. Механика контактных взаимодействий / Под ред. Воровича И.И. и Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.
27. Аргатов И.И. Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // ЖВММФ. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
28. Argatov I., Li Q., Popov V.L. Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. P. 1447–1472.
29. Collins W.D. Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1963. V. 274. № 1359. P. 507–528.
30. Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H. Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // J. Mech. Phys. Solids. 2018. V. 111. P. 277–289.
31. Яковенко А.А. Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Российский ж. биомеханики. 2017. Т. 21. № 4. С. 418–428.
32. Sadowsky M. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1928. V. 8. № 2. P. 107–121.
33. Block J.M., Keer L.M. Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. 2008. V. 3. P. 1207–1237.

34. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks // *J. Appl. Mech. T-ASME.* 1939. V. 6. P. 49–52.
35. *Dundurs J., Tsai K.C., Keer L.M.* Contact between elastic bodies with wavy surfaces // *J. Elast.* 1973. V. 3. P. 109–115.
36. *Кузнецов Е.А.* Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1982. № 1. С. 84–93.
37. *Hertz H.* Ueber die Berührung fester elastischer Körper // *J. für die reine und angewandte Mathematik.* 1881. V. 92. P. 156–171.
38. *Sneddon I.N.* The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 1946. V. 187. № 1009. P. 229–260.
39. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
40. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: The fracture mechanics approach // *J. Tribol-T ASME.* 2018. V. 140. № 1. P. 1–11.
41. *Tsukanov I.Y.* Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // *P.I. Mech. Eng. J.- J. Eng.* 2017. V. 231. № 3. P. 332–340.
42. *Цуканов И.Ю.* Периодическая контактная задача для поверхности с двухуровневой волнистостью // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 372–380.
43. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol.* 2018. V. 2018. P. 1–8.
44. *Ju Y., Farris T.N.* Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems // *J. Tribol-T ASME.* 1996. V. 118. № 2. P. 320–328.
45. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // *Int. J. Mech. Sci.* 1985. V. 27. № 6. P. 383–396.
46. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics // *J. Inst. Math. Appl.* 1977. V. 20. № 2. P. 199–219.
47. *Manners W.* Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 1998. V. 454. № 1980. P. 3203–3221.
48. *Manners W.* Methods for analyzing partial contact between surfaces // *Int. J. Mech. Sci.* 2003. V. 45. № 6–7. P. 1181–1199.
49. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // *ПММ.* 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
50. *Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
51. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, I: Theory // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. № 18. P. 2349–2362.
52. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, II: Examples // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. № 18. P. 2363–2378.
53. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei.* 1938. V. 27. P. 342–348.
54. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // *J. Appl. Mech. T-ASME.* 1949. V. 16. P. 259–268.
55. *Klimchuk T., Ostryk V.* Stress distributions in the Cattaneo–Mindlin problem on a contact with slip and adhesion of two cylindrical bodies // *Front. Mech. Eng.* 2020. V. 6. P. 1–11.
56. *Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М.* Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 695–709.
57. *Antipov Y.A.* Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. № 15. P. 2093–2125.
58. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // *J. Appl. Mech. T-ASME.* 1962. V. 29. № 3. P. 515–522.
59. *Кузнецов Е.А.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения // *Прикл. механика.* 1976. Т. 12. № 10. С. 37–44.
60. *Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А.* О фактическом контактном давлении // *Проблемы трения и изнашивания.* 1977. Вып. 12. С. 10–13.

61. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Влияние шероховатости на напряженное состояние тел при фрикционном взаимодействии // Прикл. мех. 1978. Т. 14. № 9. С. 62–68.
62. Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A. Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // Wear. 1981. V. 73. № 1. P. 41–58.
63. Криштафович А.А., Мартыняк Р.М. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с волнистыми поверхностями // Трение и износ. 2000. Т. 21. № 5. С. 1–8.
64. Nosonovsky M., Adams G.G. Steady-state frictional sliding of two elastic bodies with a wavy contact interface // J. Tribol-T ASME. 2000. V. 122. № 3. P. 490–495.
65. Солдатенков И.А. Периодическая контактная задача плоской теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
66. Wang X., Xu Y., Jackson R.L. Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions // Tribol. Lett. 2017. V. 65. № 4. P. 156–170.
67. Rostami A., Jackson R.L. Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng. 2013. V. 227. № 12. P. 1376–1385.
68. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. № 1. P. 171–183.
69. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // Tribol. Lett. 2019. V. 67. № 4. P. 107–113.
70. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
71. Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Contact of multi-level periodic system of indenters with coated elastic half-space // FU Mech. Eng. 2019. V. 17. № 2. P. 149–159.
72. Kuznetsov Y.A., Gorokhovskiy G.A. Stress distribution in a polymeric material subjected to the action of a rough-surface indenter // Wear. 1978. V. 51. № 2. P. 299–308.
73. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. P. 1–10.
74. Кузнецов Е.А. О применении автоморфных функций в плоской теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 35 – 44.
75. Kuznetsov Ye.A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear. 1985. V. 102. № 3. P. 177–194.
76. Martynyak R.M. The method of functions of intercontact gaps in problems of local loss of contact between elastic half-spaces // Math. Meth. Phys.-Mech. Fields. 2000. V. 43. № 1. P. 102–108.
77. Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. 2017. V. 222. № 2. P. 131–142.
78. Kozachok O.P., Martynyak R.M. Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24. № 11. P. 3381–3393.
79. Shvarts A.G., Yastrebov V.A. Fluid flow across a wavy channel brought in contact // Tribol. Int. 2018. V. 126. P. 116–126.
80. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
81. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid. Interf. Sci. 1991. V. 150. № 1. P. 243–269.
82. Tabor D. Surface forces and surface interactions // J. Colloid. Interf. Sci. 1977. V. 58. № 2. P. 2–13.
83. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // J. Colloid. Interf. Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
84. Johnson K.L. The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct. 1995. V. 32. № 3–4. P. 423–430.
85. Koiter W. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // Ingng. Arch. 1959. V. 28. P. 168–172.
86. Zilberman S., Persson B.N.J. Nanoadhesion of elastic bodies: roughness and temperature effects // J. Chem. Phys. 2003. V. 118. № 14. P. 6473–6480.

87. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // *J. Appl. Mech. T-ASME*. V. 71. № 6. P. 851–856.
88. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // *J. Polym. Sci. Pol. Phys.* 2001. V. 39. № 11. P. 1195–1214.
89. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // *Int. J. Solids Struct.* 2016. V. 102–103. P. 66–76.
90. *Маховская Ю.Ю.* Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // *Изв. РАН. МТТ*. 2003. Т. 38. Вып. 2. С. 39–48.
91. *Goryacheva I.* *Contact Mechanics in Tribology*. Dordrecht: Springer. 1997. xiv+346 p.
92. *Goryacheva I.G.* Mechanics of discrete contact // *Tribol. Int.* 2006. V. 39. № 5. P. 381–386.
93. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 991. № 1. P. 1–8.
94. *Горячева И.Г.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // *ПММ*. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 99–105.
95. *Галанов Б.А.* Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упруго-пластических деформациях неровностей // *ПММ*. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1020–1029.
96. *Горячева И.Г.* Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро- и микрогеометрии поверхностей // *Трение и износ*. 1999. Т. 20. № 3. С. 239–248.
97. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // *Изв. РАН. МТТ*. 2017. Т. 52. № 4. С. 101–111.
98. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*. 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.
99. *Childs T.H.C.* The persistence of asperities in indentation experiments // *Wear*. 1973. V. 25. № 1. P. 3–16.
100. *Gao Y.F., Bower A.F., Kim K.S. et al.* The behavior of an elastic-perfectly plastic sinusoidal surface under contact loading // *Wear*. 2006. V. 261. № 2. P. 145–154.
101. *Sun F., Van der Giessen E., Nicola L.* Interaction between neighboring asperities during flattening: a discrete dislocation plasticity analysis // *Mech. Mater.* 2015. V. 90. P. 157–165.
102. *Krithivasan V., Jackson R.L.* An analysis of three-dimensional elasto-plastic sinusoidal contact // *Tribol. Lett.* 2007. V. 27. № 1. P. 31–43.
103. *Manners W.* Plastic deformation of a sinusoidal surface // *Wear*. V. 264. № 1–2. P. 60–68.
104. *Goryacheva I.G., Sadeghi F.* Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // *Wear*. 1995. V. 184. № 2. P. 125–132.
105. *Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D.* Internal stresses in contact of rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // *J. Tribol-T ASME*. 1996. V. 118. № 1. P. 131–136.
106. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // *Трение и износ*. 1997. Т. 18. № 1. С. 5–12.
107. *Любичева А.Н.* Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа // *Трение и износ*. 2008. Т. 29. № 2. С. 125–133.
108. *Любичева А.Н.* Численное моделирование скольжения системы сферических инденторов по вязкоупругому телу // *Вестн. Нижегород. унив. им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4–5. С. 2324–2325.
109. *Ноздрин М.А., Маховская Ю.Ю., Шептунов Б.В.* Расчет деформационной составляющей силы трения при скольжении тела по вязкоупругому основанию // *Вестн. ИГЭУ*. 2009. № 3. С. 48–50.
110. *Шептунов Б.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А.* Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию // *Трение и износ*. 2013. Т. 34. № 2. С. 109–119.

111. Ноздрин М.А., Шептунов Б.В. Модель трения твердого тела с регулярным рельефом и вязкоупругого полупространства // Физика, химия и механика трибосистем. 2015. № 12. С. 24–29.
112. Солдатенков И.А. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.
113. Горячева И.Г., Горячев А.П. Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 1. С. 103–116.
114. Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P. The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2014. V. 470. № 2169. P. 1–14.
115. Hunter S.C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // J. Appl. Mech. T-ASME. V. 28. № 4. P. 611–617.
116. Горячева И.Г., Шпенёв А.Г. Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки // ПММ. 2012. Т. 76. № 5. С. 754–763.
117. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Моделирование трения на разных масштабных уровнях // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 100–110.
118. Goryacheva I., Makhovskaya Y. Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // J. Strain Anal. Eng. 2015. V. 51. № 4. P. 286–293.
119. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И. Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.

Development of Discrete Contact Mechanics with Applications to Study the Frictional Interaction of Deformable Bodies

I. G. Goryacheva^{a,#} and I. Yu. Tsukanov^{a,##}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: goryache@ipmnet.ru*

^{##} *e-mail: tsukanov@ipmnet.ru*

The review highlights the current state of research in the field of discrete contact mechanics, including the main approaches to the formulation of problems, methods of analytical and numerical solution, specific results and areas of their practical use. The article is aimed at specialists in the contact mechanics and tribology, and may also be of interest to researchers in the field of surface engineering, interested in deformable bodies interaction control.

Keywords: contact mechanics, discrete contact, surface microrelief, elasticity, viscoelasticity, elastoplastic deformation, friction, contact characteristics, real contact area, mutual influence of contact spots.

Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-18-50346

REFERENCES

1. Grigoriev A. Ya. Physics and Microgeometry of Technical Surfaces. (Fizika i mikrogeometriya tekhnicheskikh poverhnostej) Minsk: Belaruskaya navuka, 2016. 248 p. (in Russian)
2. Thomas T.R. Rough Surfaces. London: Imperial College Press, 1999. 278 p.
3. Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Komalov V.S. Friction and Wear. Calculation Methods. Oxford: Pergamon Press, 1982. ix+464 p.
4. Demkin N.B. Contact of Rough Surfaces. (Kontaktirovanie sherohovatykh poverhnostej) Moscow: Nauka, 1970. 228 p. (in Russian)
5. Ryzhov E.V., Suslov A.G., Fedorov V.P. Technological Support of the Operational Properties of Machine Parts. (Tekhnologicheskoe obespechenie ekspluatatsionnykh svoystv detalej mashin) Moscow: Mashinostroenie, 1979. 176 p. (in Russian)

6. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. xii+518 p.
7. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. xviii+392 p.
8. *Hills D., Andresen H., Barber J.R. et al.* Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology / Ed. by *Paggi M. and Hills D.* Cham: Springer, 2020. vii+330 p.
9. *Lurie A.I.* Spatial Problems of the Theory of Elasticity (Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti). Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1955. 491 p. (in Russian)
10. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* A periodical contact problem for a system of dies and elastic layer adhered to another base // *Sov. J. Frict. Wear*, 1995, vol. 16, no. 4, pp. 642–652.
11. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. xxxi+732 p.
12. *Shtayerman I.Ya.* Contact Problem of the Theory of Elasticity. Leningrad: Gostekhteorizdat (in an English translation by Foreign Technology Div., FTD-MT-24-61-70), 1970. 314 p.
13. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
14. *Dezyani M., Sharafbafi F., Irani S.* A new solution for the two-zonal contact problem // *Arab. J. Sci. Eng.*, 2013, vol. 38, no. 6, pp. 1509–1518.
15. *Ghanati P., Adibnazari S.* A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts // *Arch. Appl. Mech.*, 2019, vol. 89, pp. 1825–1836.
16. *Vergne P., Villechaise B., Berthe D.* Elastic behavior of multiple contacts: asperity interaction // *J. Tribol-T ASME*, 1985, vol. 107, no. 2, pp. 224–228.
17. *Berthe D., Vergne P.* An elastic approach to rough contact with asperity interactions // *Wear*, 1987, vol. 117, no. 2, pp. 211–222.
18. *Nowell D., Hills D.A.* Hertzian contact of ground surfaces // *J. Tribol-T ASME*, vol. 111, no. 1, pp. 175–179.
19. *Sundaram N., Farris T.N.* Multiple contacts of similar elastic materials // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 2009, vol. 131, no. 2, pp. 1–12.
20. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Contact Problems in Tribology. (Kontaktnye zadachi v tribologii). Moscow: Mashinostroenie, 1988. 253 p. (in Russian)
21. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
22. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Multiple contact model in the problems of tribomechanics // *Tribol. Int.*, 1991, vol. 24, no. 1, pp. 29–35.
23. *Galin L.A.* Contact Problems. Dordrecht: Springer, 2008. xiii+315 p.
24. *Greenwood J.A., Williamson G.P.B.* Contact of nominally flat surfaces // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1966, vol. 295, no. 1442, pp. 300–319.
25. *Andrejkiiv A.E., Panasyuk V.V.* A mixed elastic problem for a half-space with circular interfaces of boundary conditions // *Mech. Solids*, 1972, no. 3, pp. 26–32.
26. *Argatov I.I., Nazarov S.A.* Method of spliced expansions for problems with small contact zones // in: *Mechanics of Contact Interactions (Mekhanika kontaktnyh vzaimodejstvij)* / Ed. by *Vorovich I.I. and Aleksandrov V.M.* Moscow: Fizmatlit, 2001, pp. 73–82. (in Russian)
27. *Argatov I.I.* Refinement of the asymptotic solution obtained by the method of splicing expansions in the contact problem of elasticity // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2000, vol. 40, no. 4, pp. 623–632.
28. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // *Arch. Appl. Mech.*, 2019, vol. 89, pp. 1447–1472.
29. *Collins W.D.* Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1963, vol. 274, no. 1359, pp. 507–528.
30. *Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H.* Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 111, pp. 277–289.

31. *Yakovenko A.A.* Simulation of contact interaction of a gripping tool with a biological tissue // *Russ. J. Biomech.*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 355–364.
32. *Sadowsky M.* Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie // *ZAMM*, 1928, vol. 8, no. 2, pp. 107–121.
33. *Block J.M., Keer L.M.* Periodic contact problems in plane elasticity // *J. Mech. Mater. Struct.*, 2008, vol. 3, pp. 1207–1237.
34. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 1939, vol. 6, pp. 49–52.
35. *Dundurs J., Tsai K.C., Keer L.M.* Contact between elastic bodies with wavy surfaces // *J. Elast.*, 1973, vol. 3, pp. 109–115.
36. *Kuznetsov Ye.A.* A periodic contact problem accounting for the additional load acting beyond the indenter // *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mekh. Tverd. Tela*, 1982, no. 1, pp. 84–93 (in Russian).
37. *Hertz H.* Ueber die Berührung fester elastischer Körper // *J. für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, vol. 92, pp. 156–171.
38. *Sneddon I.N.* The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1946, vol. 187, no. 1009, pp. 229–260.
39. *Johnson K.L.* *Contact Mechanics*. Cambridge: Univ. Press, 1985. xii+452 p.
40. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: The fracture mechanics approach // *J. Tribol-T ASME*, 2018, vol. 140, no. 1, pp. 1–11.
41. *Tsukanov I.Y.* Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // *P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng.*, 2017, vol. 231, no 3, pp. 332–340.
42. *Tsukanov I.Yu.* Periodic contact problem for a surface with two-scale waviness // *Mech. Sol.*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. 129–136.
43. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Adv. Tribol*, 2018, vol. 2018, pp. 1–8.
44. *Ju Y., Farris T.N.* Spectral analysis of two-dimensional contact problems // *J. Tribol-T ASME*, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 320–328.
45. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // *Int. J. Mech. Sci.*, 1985, vol. 27, no. 6, pp. 383–396.
46. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics // *J. Inst. Math. Appl.*, 1977, vol. 20, no. 2, pp. 199–219.
47. *Manners W.* Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1998, vol. 454, no. 1980, pp. 3203–3221.
48. *Manners W.* Methods for analyzing partial contact between surfaces // *Int. J. Mech. Sci.*, 2003, vol. 45, no. 6–7, pp. 1181–1199.
49. *Galín L.A.* Indentation of punch with friction and adhesion // *Prikl. Mat. Mech.*, 1945, vol. 9, no. 5, pp. 413–424. (in Russian)
50. *Antipov Yu.A., Arutyunyan N.Kh.* Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion // *JAMM*, 1991, vol. 55, no. 6, pp. 887–901.
51. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, I: Theory // *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, no. 18, pp. 2349–2362.
52. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, II: Examples // *Int. J. Solids Struct.*, 1998, vol. 35, no. 18, pp. 2363–2378.
53. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, 1938, vol. 27, pp. 342–348.
54. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 1949, vol. 16, pp. 259–268.
55. *Klimchuk T., Ostryk V.* Stress distributions in the Cattaneo–Mindlin problem on a contact with slip and adhesion of two cylindrical bodies // *Front. Mech. Eng.*, 2020, vol. 6, pp. 1–11.
56. *Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M.* Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 621–630.
57. *Antipov Y.A.* Galin’s problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol. 37, no. 15, pp. 2093–2125.

58. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // *J. Appl. Mech. T-ASME*, 1962, vol. 29, no. 3, pp. 515–522.
59. *Kuznetsov E.A.* Periodic contact problem for half-plane allowing for forces of friction // *Sov. Appl. Mech.*, 1976, vol. 12, no. 10, pp. 1014–1019.
60. *Kuznetsov E.A., Gorokhovskiy G.A.* On actual contact pressure // *Probl. Treniya Iznashyvaniya*, 1977, vol. 12, pp. 10–13. (in Russian)
61. *Kuznetsov E.A., Gorokhovskiy G.A.* Effect of roughness on the stress state of bodies in frictional contact // *Sov. Appl. Mech.*, 1978, vol. 14, no. 9, pp. 950–955.
62. *Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A.* Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // *Wear*, 1981, vol. 73, no. 1, pp. 41–58.
63. *Kryshchafovych A.A., Martynyak R.M.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *J. Frict. Wear*, 2000, vol. 21, no. 5, pp. 1–8.
64. *Nosonovsky M., Adams G.G.* Steady-state frictional sliding of two elastic bodies with a wavy contact interface // *J. Tribol-T ASME*, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 490–495.
65. *Soldatenkov I.A.* The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 245–255.
66. *Wang X., Xu Y., Jackson R.L.* Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions // *Tribol. Lett.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 156–170.
67. *Rostami A., Jackson R.L.* Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // *P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng.*, 2013, vol. 227, no. 12, pp. 1376–1385.
68. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // *Tribol. Lett.*, 2014, vol. 56, no. 1, pp. 171–183.
69. *Tsukanov I.Y.* An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // *Tribol. Lett.*, 2019, vol. 67, no. 4, pp. 107–113.
70. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
71. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Contact of multi-level periodic system of indenters with coated elastic half-space // *FU Mech. Eng.*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 149–159.
72. *Kuznetsov Y.A., Gorokhovskiy G.A.* Stress distribution in a polymeric material subjected to the action of a rough-surface indenter // *Wear*, 1978, vol. 51, no. 2, pp. 299–308.
73. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // *Front. Mech. Eng.*, 2020, vol. 6, pp. 1–10.
74. *Kuznetsov Ye.A.*, On the use of automorphic functions in plane elasticity theory // *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mekh. Tverd. Tela*, 1978, no. 6, pp. 35 – 44. (in Russian)
75. *Kuznetsov Ye.A.* Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // *Wear*, 1985, vol. 102, no. 3, pp. 177–194.
76. *Martynyak R.M.* The method of functions of intercontact gaps in problems of local loss of contact between elastic half-spaces // *Math. Meth. Phys.-Mech. Fields*, 2000, vol. 43, no. 1, pp. 102–108.
77. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 222, no. 2, pp. 131–142.
78. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Math. Mech. Solids*, 2018, vol. 24, no. 11, pp. 3381–3393.
79. *Shvarts A.G., Yastrebov V.A.* Fluid flow across a wavy channel brought in contact // *Tribol. Int.*, 2018, vol. 126, pp. 116–126.
80. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
81. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid. Interf. Sci.*, 1991, vol. 150, no. 1, pp. 243–269.
82. *Tabor D.* Surface forces and surface interactions // *J. Colloid. Interf. Sci.*, 1977, vol. 58, no. 2, pp. 2–13.

83. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // *J. Colloid. Interf. Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
84. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // *Int. J. Solids Struct.*, 1995, vol. 32, no. 3–4, pp. 423–430.
85. *Koiter W.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // *Ingng. Arch.*, 1959, vol. 28, pp. 168–172.
86. *Zilberman S., Persson B.N.J.* Nanoadhesion of elastic bodies: roughness and temperature effects // *J. Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, no. 14, pp. 6473–6480.
87. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // *J. Appl. Mech. T-ASME*, vol. 71, no. 6, pp. 851–856.
88. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // *J. Polym. Sci. Pol. Phys.*, 2001, vol. 39, vol. 11, pp. 1195–1214.
89. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 102–103, pp. 66–76.
90. *Makhovskaya Yu.Yu.* Discrete contact of elastic bodies in the presence of adhesion // *Mech. Solids*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 39–48.
91. *Goryacheva I.* *Contact Mechanics in Tribology.* Dordrecht: Springer, 1997. xiv+346 p.
92. *Goryacheva I.G.* Mechanics of discrete contact // *Tribol. Int.*, 2006, vol. 39, no. 5, pp. 381–386.
93. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 991, no. 1, pp. 1–8.
94. *Goryacheva I.G.* Plane and axisymmetric contact problems for rough elastic bodies // *JAMM*, 1979, vol. 43, no. 1, pp. 99–105.
95. *Galanov B.A.* Spatial contact problems for rough elastic bodies under elastoplastic deformations of the unevenness // *JAMM*, 1984, vol. 48, no. 6, pp. 1020–1029.
96. *Goryacheva I.G.* Calculation of contact characteristics with consideration of surface macro- and microgeometric parameters // *J. Frict. Wear*, 1999, vol. 20, no. 3, pp. 239–248.
97. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 4, pp. 435–443.
98. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350.
99. *Childs T.H.C.* The persistence of asperities in indentation experiments // *Wear*, 1973, vol. 25, no. 1, pp. 3–16.
100. *Gao Y.F., Bower A.F., Kim K.S. et al.* The behavior of an elastic-perfectly plastic sinusoidal surface under contact loading // *Wear*, 2006, vol. 261, no. 2, pp. 145–154.
101. *Sun F., Van der Giessen E., Nicola L.* Interaction between neighboring asperities during flattening: a discrete dislocation plasticity analysis // *Mech. Mater.*, 2015, vol. 90, pp. 157–165.
102. *Krithivasan V., Jackson R.L.* An analysis of three-dimensional elasto-plastic sinusoidal contact // *Tribol. Lett.*, 2007, vol. 27, no. 1, pp. 31–43.
103. *Manners W.* Plastic deformation of a sinusoidal surface // *Wear*, vol. 264, no. 1–2, pp. 60–68.
104. *Goryacheva I.G., Sadeghi F.* Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // *Wear*, 1995, vol. 184, no. 2, pp. 125–132.
105. *Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D.* Internal stresses in contact of rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // *J. Tribol-T ASME*, 1996, vol. 118, no. 1, pp. 131–136.
106. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Effect of surface imperfect elasticity on a sliding contact of rough elastic bodies // *J. Frict. Wear*, 1997, vol. 18, no. 1, pp. 1–8.
107. *Lyubicheva A.N.* Analysis of the mutual influence of contact spots in sliding of the periodic system of asperities on a viscoelastic base of the winkler type // *J. Frict. Wear*, 2008, vol. 29, no. 2, pp. 92–98.
108. *Lyubicheva A.N.* Numerical simulation of sliding of a system of spherical indenters over a viscoelastic body // *Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4–5, pp. 2324–2325. (in Russian)

109. *Nozdrin M.A., Makhovskaya Yu.Yu., Sheptunov B.V.* Calculation of a deformation component of friction force during sliding of a body on a viscoelastic base // *Vestn. IGEU*, 2009, no. 3, pp. 48–50. (in Russian)
110. *Sheptunov B.V., Goryacheva I.G., Nozdrin M.A.* Contact problem of die regular relief motion over viscoelastic base // *J. Frict. Wear*, 2013, vol. 34, no. 2, pp. 83–91.
111. *Nozdrin M.A., Sheptunov B.V.* Friction model of a rigid body with a regular relief and a viscoelastic half-space // *Physics, Chemistry and Mechanics of Tribosystems*, 2015, no. 12, pp. 24–29. (in Russian)
112. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // *J. Frict. Wear*, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.
113. *Goryacheva I.G., Goryachev A.P.* Contact problems of the sliding of a punch with a periodic relief on a viscoelastic half-plane // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 1, pp. 73–83.
114. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 2014, vol. 470, no. 2169, pp. 1–14.
115. *Hunter S.C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // *J. Appl. Mech. T-ASME*, vol. 28, no. 4, pp. 611–617.
116. *Goryacheva I.G., Shpenev A.G.* Modelling of a punch with a regular base relief sliding along a viscoelastic foundation with a liquid lubricant // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 754–763.
117. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Modeling of friction at different scale levels // *Mech. Solids*, 2010, no. 3, pp. 390–398.
118. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // *J. Strain Anal. Eng.*, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 286–293.
119. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu., Morozov A.V., Stepanov F.I.* Friction of Elastomers. Modeling and Experiment (*Trenie elastomerov. Modelirovanie i eksperiment.*). Moscow–Izhevsk: Institut. Comput. Sci., 2017. 204 p. (in Russian)