
УДК 532.516:534:1

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА (ОТСОСА) СРЕДЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

© 2020 г. А. А. Гурченков^{1,2,*}

¹ ФИЦ “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет “МАИ”, Москва, Россия

*e-mail: challenge2005@mail.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 30.08.2020 г.

Принята к публикации 01.10.2020 г.

Изучаются движения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости, вращающейся вначале как твердое тело с постоянной угловой скоростью вместе с ограничивающими ее параллельными стенками, под действием внезапно начинающихся продольных колебаний одной из стенок. Стенки составляют произвольный угол с осью вращения. Неустановившийся поток индуцирован продольными колебаниями одной из стенок, вдувом (отсосом) среды, производимым перпендикулярно поверхности пористой пластины и внезапно включенным постоянным магнитным полем, направленным по нормали к стенкам.

Построены аналитические решения уравнений магнитной гидродинамики. Определены поле скоростей и векторы касательных напряжений вязкой электропроводной жидкости, действующие на стенки щели. Определено индуцированное магнитное поле в потоке электропроводной жидкости.

Рассматривается ряд частных случаев движения стенок. На основе полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенок щели.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, вязкая электропроводная жидкость, пограничные слои

DOI: 10.31857/S0032823520060065

Введение. Показано, что при отсутствии вращения магнитного поля и вдува (отсоса) среды и удалении неподвижной стенки на бесконечность, решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой [1]. Кроме того, при отсутствии магнитного поля и удалении неподвижной стенки на бесконечность решение совпадает с результатами [2], а при отсутствии магнитного поля и вдува (отсоса) среды решение переходит в решение [3].

В настоящей работе представлено обобщение исследования [4], в котором рассматривается нестационарный поток вязкой электропроводной несжимаемой жидкости во вращающейся щели при наличии внешнего однородного магнитного поля. Неустановившийся поток индуцирован продольными колебаниями одной из стенок. Далее изучается динамика неустановившегося течения вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока и внешнего магнитного поля. Задача в такой постановке, насколько известно автору,

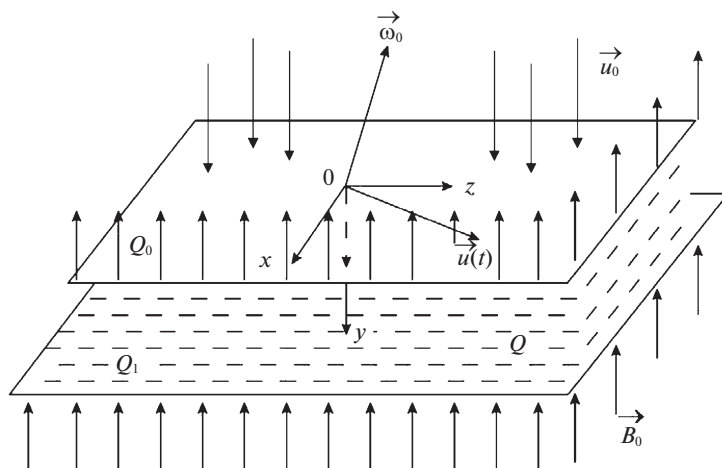


Рис. 1

поставлена впервые. В одном из последних исследований [5] рассматривалось течение электропроводной жидкости внутри вращающейся щели, но жидкость предполагалась идеальной и течение стационарным.

1. Аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики. Задача рассматривается в следующей постановке. Щель шириной l , образованная двумя бесконечными параллельно пористыми стенками Q_0 и Q_1 с изолирующими свойствами, заполнена вязкой электропроводной несжимаемой жидкостью. Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U . Щель вместе с жидкостью вращается как одно целое с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \text{const}$, причем вектор $\vec{\omega}_0$ образует с этими плоскостями постоянный угол β ($0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$). Частный случай в отсутствии магнитного поля и вдува (отсоса) среды ($\beta = \frac{\pi}{2}$) был исследован ранее [6].

Свяжем с плоскостью Q_0 декартову систему координат Q_{xyz} с осями \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z так, что плоскость Q_{xz} совпадает с плоскостью Q_0 , а ось y направлена по нормали к ней вглубь жидкости. В этой системе координат стенки и жидкость покоятся. В момент $t \geq 0$ стенка Q_0 начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $u(t)$. В тот же момент времени вносится внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B_0 = \text{const}$ направленной по нормали к стенкам, и через верхнюю пластину Q_0 осуществляется вдув (отсос) жидкости со скоростью $u(t)$ по нормали к поверхности пластины. Схематично геометрия задачи представлена на рис. 1.

Далее исследуется распространение возмущений в однородной проводящей среде под действием однородного магнитного поля, продольных колебаний стенки и вдува (отсоса) среды.

Движение жидкости в системе Q_{xyz} , вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, в магнитогидродинамическом приближении (бесконечно проводящая жидкость) описывает-

ся уравнением магнитной гидродинамики, а также граничными и начальными условиями, которые в обычных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 \times (\bar{w}_0 \times \bar{r}) + 2\bar{w}_0 \times \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla U + \nu \Delta \bar{V} + \frac{1}{\mu \rho} \text{rot } \bar{B} \times \bar{B} \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\bar{V} \times \bar{B}) \\ \text{div } \bar{V} &= 0 \\ \text{div } \bar{B} &= 0, \quad \text{при } \bar{r} \in Q \\ \bar{V}(\bar{r}, t) &= (\bar{u}(t), u_0(t) \bar{e}_y) \quad \text{при } \bar{r} \in Q_0, \quad t > 0 \\ \bar{V}(\bar{r}, t) &= u_0(t) \bar{e}_y, \quad \text{при } \bar{r} \in Q_1, \quad t > 0 \\ \bar{B} &= B_0 \bar{e}_y \quad \text{при } \bar{r} \in Q_0, \quad t > 0 \\ \bar{B} &= B_0 \bar{e}_y \quad \text{при } \bar{r} \in Q_1, \quad t > 0 \\ \bar{V}(\bar{r}, 0) &= 0, \quad \text{при } t = 0 \\ \bar{B}(\bar{r}, 0) &= 0, \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь \bar{r} – радиус-вектор относительно полюса O , \bar{V} – скорость жидкости, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, U – потенциал внешних массовых сил, \bar{B} – магнитная индукция, μ – магнитная проницаемость, Q – объем жидкости.

Решение системы уравнений (1.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \rho (w_0 \times r)^2 + \rho U + 2\rho u_0(t) (xw_{0z} - zw_{0x}) - \rho y \frac{\partial u_0(t)}{\partial t} + \rho q(y, t) \\ \bar{V} &= V_x(y, t) \bar{e}_x + u_0(t) \bar{e}_y + V_z(y, t) \bar{e}_z \\ \bar{B} &= B_x(y, t) \bar{e}_x + B_0 \bar{e}_y + B_z(y, t) \bar{e}_z, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $w_{0x} = \bar{w}_0 \cdot \bar{e}_x$; $w_{0z} = \bar{w}_0 \bar{e}_z$, а $q(y, t)$ – неизвестная функция давления.

Для определения поля скоростей \bar{V} и индукции \bar{B} получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2\omega_0 y V_z &= \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - u(t) \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} - 2\omega_0 y V_x &= \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - u_0(t) \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{1}{\mu \rho} B_0 \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= 2V(\bar{w}_0 \times \bar{e}_y) - \frac{1}{\mu \rho} \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial V_z}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.3}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$\begin{aligned}
 \vec{V}(y, t) &= (\vec{u}(t), u_0(t)\vec{e}_y), \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0 \\
 \vec{V}(y, t) &= u_0(t)\vec{e}_y, \quad \text{при } y = l, \quad t > 0 \\
 \vec{B}(y, t) &= B_0\vec{e}_y, \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0 \\
 \vec{B}(y, z) &= B_0\vec{e}_y, \quad \text{при } y = l, \quad t > 0 \\
 \vec{V}(y, 0) &= 0, \quad \text{при } t = 0, \quad y > 0 \\
 \vec{B}(y, 0) &= 0, \quad \text{при } t = 0, \quad y > 0
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Введем комплексную структуру

$$\hat{V} = V_x(y, t) + iV_z(y, t) \quad \hat{u} = u_x + iu_z \quad \hat{B} = B_x(y, t) + iB_z(y, t)$$

Тогда система уравнений (1.4), граничные и начальные условия примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - i2\Omega \hat{V} &= v \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} - u_0(t) \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial y} \hat{B} \\
 \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \hat{V}}{\partial y}, \quad \text{где } \Omega = \omega_{0y}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}(0, t) &= \hat{u}(t), \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0 \\
 \hat{V}(l, t) &= 0, \quad \text{при } y = l, \quad t > 0 \\
 \hat{B}(0, t) &= 0, \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0 \\
 \hat{B}(l, t) &= 0, \quad \text{при } y = l, \quad t > 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\hat{V}(y, 0) = 0, \quad \hat{B}(y, 0) = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad y > 0$$

Исключая магнитную индукцию из уравнений (1.5), получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + v \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0(t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} &= 0 \\
 \hat{V}(0, t) &= \hat{u}(t) \\
 \hat{V}(l, t) &= 0 \\
 \hat{V}(y, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

С использованием интеграла Дюамеля представим решение уравнения (1.7) в виде

$$\hat{V}(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \hat{u}(t - \tau) \hat{V}_1(y, \tau) d\tau, \tag{1.8}$$

здесь $\hat{V}_1(y, t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + v \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0(t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial y^2} \frac{B_0^2}{\mu\rho} = 0$$

$$\hat{V}_1(0, t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad \hat{V}_1(l, t) = 0$$
(1.9)

Рассмотрим случай $u_0(t) = u_0 = \text{const}$.
 Введем образ Лапласа

$$\tilde{V}(y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \hat{V}(y, t) dt$$

В пространстве изображений задача (1.9) принимает вид

$$a(p) \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial y^2} - u_0 p \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial y} - (p^2 - i2\Omega p) \tilde{V}_1 = 0$$

$$\tilde{V}_1(0, p) = \frac{1}{p}, \quad \tilde{V}_1(l, p) = 0,$$
(1.10)

где $a(p) = vp + B_0^2/\mu\rho$.

Характеристическое уравнение (1.10) и его корни имеют вид

$$a\chi^2 - u_0 p \chi - (p^2 - i2\Omega p) = 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{u_0 p}{2a} \pm \sqrt{\frac{u_0^2 p^2}{4a^2} + \frac{p^2 - i2\Omega p}{a}} = \sigma \pm \omega,$$
(1.11)

где $\sigma = \frac{u_0 p}{2va}$; $\omega^2 = \frac{u_0^2 p^2}{4a^2} + \frac{p^2 - i2\Omega p}{a}$.

Решение уравнения (1.10) записывается в форме

$$\tilde{V}_1(y, p) = C_1(p) e^{(\sigma+\omega)y} + C_2(p) e^{(\sigma-\omega)y}$$

Определяя постоянные интегрирования из граничных условий, получаем

$$\hat{V}_1(y, p) = \frac{1}{p} e^{\sigma y} \frac{\text{sh}(l-y)\omega}{\text{sh } \omega l} = F(y, p) G(y, p),$$
(1.12)

где $F(y, p) = \frac{1}{p} e^{\sigma y}$, $G(y, p) = \frac{\text{sh}(l-y)\omega}{\text{sh } \omega l}$.

Разложим функцию $G(y, p) = \frac{\text{sh}(l-y)\omega}{\text{sh } \omega l}$ на простые дроби [7]:

$$G(y, p) = 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n (y-l)}{n} \frac{u_0^2 p^2 + 4a(p^2 - i2\Omega p)}{u_0^2 p^2 + 4(p^2 - i2\Omega p)a + 4\lambda_n^2 a^2},$$
(1.13)

где $\lambda_n = \pi n/l$.

Согласно известным формулам операционного исчисления [8] найдем оригиналы функций $F(y, p)$, $G(y, p)$

$$f(y, t) = \exp\left(\frac{u_0}{2v} y - \alpha t\right) J_0\left(2\sqrt{\frac{u_0}{2v} \alpha y t}\right),$$
(1.15)

где $\alpha = B_0^2/\mu\rho v$, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

$$g(y, t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n(l-y)}{n} \right) \frac{\partial}{\partial t} (A_n e^{p_1 n t} + B_n e^{p_2 n t} + C_n e^{p_3 n t}),$$

где

$$A_n = \frac{p_{1n}^2 + p_{1n} s + d}{(p_{1n} - p_{2n})(p_{1n} - p_{3n})}, \quad B_n = \frac{p_{2n}^2 + p_{2n} s + d}{(p_{2n} - p_{1n})(p_{2n} - p_{3n})} \quad (1.16)$$

$$C_n = \frac{p_{3n}^2 + p_{3n} s + d}{(p_{3n} - p_{1n})(p_{3n} - p_{2n})},$$

$p_{1n..3n}$ — корни кубического уравнения

$$p^3 + \alpha_n p^2 + b_n p + c_n = 0,$$

и введены обозначения: $s = \alpha - i2\Omega + \frac{u_0^2}{4\nu}$, $a_n = 2 - i2\Omega + \frac{u_0^2}{4\nu} + \nu\lambda_n^2$, $b_n = 2\nu\alpha\lambda_n^2 - i2\alpha\Omega$, $c_n = \nu\alpha^2\lambda_n^2$, $d = -i2\Omega\alpha$.

Тогда выражение для \hat{V}_1 дается сверткой функций $f(y, t)$ и $g(y, t)$

$$\hat{V}_1(y, t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n(l-y)}{n} \right) \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (A_n e^{p_{1n}(t-\tau)} + B_n e^{p_{2n}(t-\tau)} + C_n e^{p_{3n}(t-\tau)}) J_0 \left(2\sqrt{\frac{u_0}{2\nu}} \alpha y r \right) d\tau$$

или, проведя дифференцирование

$$\hat{V}_1(y, t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n(l-y)}{n} \right) \int_0^t (A_n p_{1n} e^{p_{1n}(t-\tau)} +$$

$$+ B_n p_{2n} e^{p_{2n}(t-\tau)} + C_n p_{3n} e^{p_{3n}(t-\tau)}) J_0 \left(2\sqrt{\frac{u_0}{2\nu}} \alpha y r \right) d\tau \quad (1.17)$$

Таким образом, решение задачи (1.7) определяется формулами (1.8) и (1.17)

$$\hat{V}(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \hat{u}(t-\tau) \hat{v}_1(y, t) d\tau \quad (1.18)$$

Векторы касательных направлений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели, находятся по формулам

$$\hat{f}_0 = \rho\nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \hat{u}(\tau) \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial y}(0, t-\tau) d\tau$$

и

$$\hat{f}_l = \rho\nu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \hat{u}(\tau) \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial y}(l, t-\tau) d\tau$$

Вектор магнитной индукции находится из соотношения

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \hat{V}}{\partial y}; \quad \hat{B}(y, t) = B_0 \int_0^t \hat{u}(t-\tau) \frac{\partial V_1(y, \tau)}{\partial y} d\tau,$$

где $\hat{V}_1(y, r)$ определяется формулой (1.17).

2. Поле скоростей потока, индуцированное движением одной из стенок. Пусть одна из плоскостей Q_0 , составляющих границы щели, движется в продольном направлении со скоростью $\bar{u}(t) = u(0)e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha + i\omega$.

Рассмотрим “нормальные” колебания вязкой электропроводной жидкости во вращающейся щели, т.е. будем изучать класс движений, в которых все временные факторы зависят от времени, посредством множителя $e^{\lambda t}$. Тогда система уравнений (1.5), граничные и начальные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda \hat{v} - i2\Omega \hat{v} &= \nu \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - u_0 \lambda \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu \rho} \frac{\partial \hat{B}}{\partial y} \\ \lambda \hat{B} &= B_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \\ \hat{v}(0, t) &= \hat{u} \quad \text{при } y = 0, \\ \hat{v}(l, t) &= 0 \quad \text{при } y = l, \\ \hat{v}(y, 0) &= 0, \quad \hat{B}(y, 0) = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad y > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Исключая из системы (2.1) магнитную индукцию для функции $\hat{v}(y)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\nu + \beta) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - u_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - (\lambda - i2\Omega) \hat{v} = 0; \quad 0 < y < l \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$\hat{v}(0) = \hat{u}(0), \quad \hat{v}(l) = 0, \tag{2.3}$$

где $\beta = B_0^2 / \mu \rho \lambda$.

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{\lambda \hat{u}}{2\nu(\lambda + \alpha)} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 u_0^2}{4\nu^2(\lambda + \alpha)^2} + \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu(\lambda + \alpha)}} \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$\sigma = \frac{\lambda u_0}{2\nu(\lambda + \alpha)}; \quad q^2 = \sigma^2 + \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu(\lambda + \alpha)}$$

Тогда $\chi_{1,2} = \sigma \pm q$. Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\hat{V}(y) = e^{\sigma y} (c_1 e^{qy} + c_2 e^{-qy}),$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные. Определяя постоянные интегрирования из граничных условий (2.3), получаем “нормальные” колебания вязкой электропроводной жидкости во вращающейся щели в постоянном магнитном поле при наличии поперечного потока

$$\hat{V}(y, t) = e^{\lambda t} \hat{u}(0) e^{\sigma y} \frac{\text{sh } q(l - y)}{\text{sh } ql} \tag{2.5}$$

С помощью решений (2.5) находим векторы касательных напряжений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели

$$\hat{f}_0 = \rho v e^{\lambda t} \hat{u}(0) \frac{\sigma \operatorname{sh} ql - q \operatorname{ch} ql}{\operatorname{sh} ql} \quad (2.6)$$

$$\hat{f}_e = -\rho v e^{\lambda t} \hat{u}(0) \frac{q e^{\sigma l}}{\operatorname{sh} ql} \quad (2.7)$$

Из выражений (2.5)–(2.7) видно, что поле скоростей жидкости и силы трения существенно зависят от комплексного параметра q , связывающего параметры гармонических колебаний пластин и вращения щели.

3. Структура пограничных слоев. Исследуем подробнее выражение для поля скоростей (2.5). Выражение для комплексных декрементов затухания можно записать в виде

$$\sigma = \frac{u_0 (m - in)}{2 m^2 + n^2} = \frac{u_0}{2} \frac{m}{m^2 + n^2} - \frac{u_0}{2} \frac{in}{m^2 + n^2} = \sigma_1 + i\sigma_2,$$

где

$$m = v - \frac{\alpha B_0^2}{\mu \rho (\alpha^2 + \omega^2)}; \quad n = -\frac{\omega B_0^2}{\mu \rho (\alpha^2 + \omega^2)}$$

Тогда, после некоторых преобразований поле скоростей жидкости можно представить в виде двух бегущих волн

$$\hat{v}(y, t) = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)}, \quad (3.1)$$

где

$$\hat{A}_1 = \exp\left(\frac{-\alpha t - \frac{y}{\delta_1}}{2 \operatorname{sh} ql}\right) \hat{u}(0) e^{q l}, \quad \hat{A}_2 = \frac{\exp\left(-\alpha t + \frac{y}{\delta_2}\right) \hat{u}(0)}{2 \operatorname{sh} ql} e^{-q l},$$

а показатель экспоненты определяется множителем

$$q = A + iB,$$

$$\text{где } A = \left(\frac{\sqrt{C^2 + D^2} + C}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = \left(\frac{\sqrt{C^2 + D^2} - C}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C = \frac{u_0^2 (m^2 - n^2)}{4 (m^2 + n^2)^2} + \frac{-\alpha m + n(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}, \quad D = -\frac{u_0^2}{4} \frac{2mn}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{\alpha n + m(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}.$$

При этом волновые числа имеют вид

$$\delta_1 = \frac{1}{A - \sigma_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{A + \sigma_1}, \quad k_1 = B - \sigma_2, \quad k_2 = B + \sigma_2$$

Эти волны распространяются по оси навстречу друг другу с разными фазовыми скоростями, т.к. волновые числа k_1, k_2 различны. Кроме того, скорости зависят от частоты. Это означает, что поток вязкой электропроводной жидкости представляет собой дисперсионную среду.

Групповые скорости этих волн $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ также различны. Они зависят от коэффициентов затухания и вращения системы, магнитной индукции и параметров жидкости. Амплитуды этих волн зависят от глубины щели, величины проекции угловой ско-

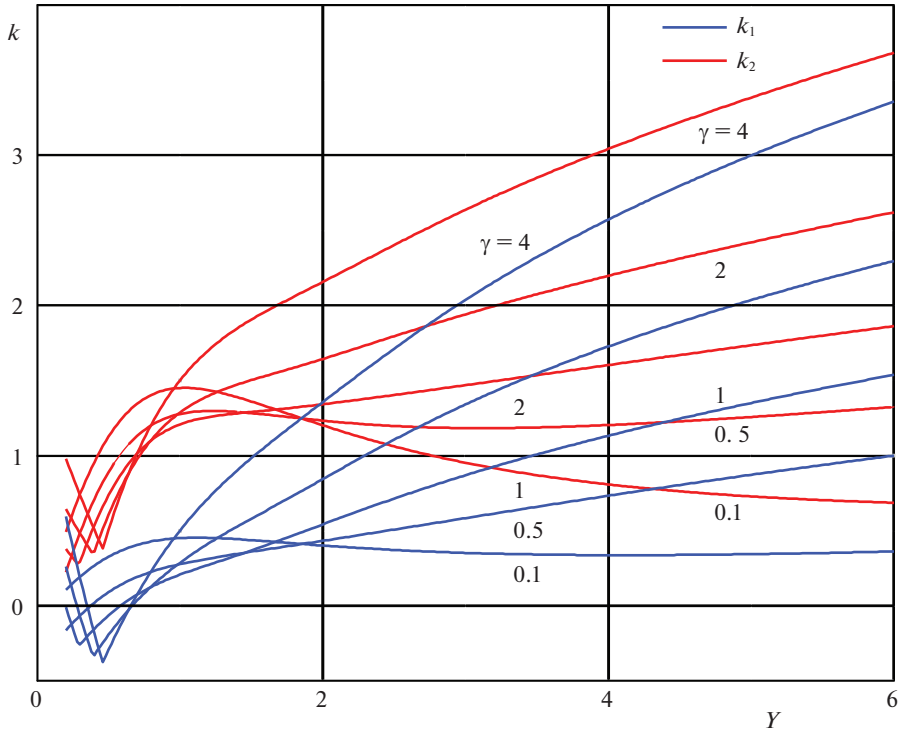


Рис. 2

рости на ось y , параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости. Отметим, что каждая из этих волн затухает на глубине δ_1, δ_2 соответственно.

Выберем индукцию $B_0^2 = 2\nu\alpha\rho$ и введем безразмерную переменную $Y = \omega/\alpha$. Тогда выражения для составляющих σ и определяющие величину комплексных амплитуд волн (3.1) функции C и D примут вид

$$\sigma_1 = \frac{u_0}{2\nu} \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2} = \frac{u_0}{2\nu} \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \frac{u_0}{2\nu} \cdot \frac{2\omega\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} = \frac{u_0}{2\nu} \frac{2Y}{Y^2 + 1}$$

$$C = \left(\frac{u_0}{2\nu}\right)^2 \left(\frac{(Y^2 - 1)^2 - 4Y^2}{(Y^2 + 1)^2} + \gamma \frac{1 - Y^2 - 2Y(Y - s)}{Y^2 + 1} \right)$$

$$D = \left(\frac{u_0}{2\nu}\right)^2 \left(\frac{4Y(Y^2 - 1)}{(Y^2 + 1)^2} + \gamma \frac{(Y - s)(Y^2 - 1) - 2Y}{Y^2 + 1} \right),$$

где $s = 2\Omega/\alpha$ и $\gamma = \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{u_0}{2\nu}\right)^2$.

На рис. 2 представлены графики зависимости волновых чисел $k_1 = B - \sigma_2$; $k_2 = B + \sigma_2$; от Y (частота ω) при фиксированном $s = 2$ и скорости длува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha\nu/\gamma}$ для различных значений γ .

В рассматриваемом случае $k(\omega)$ — волновое число, вообще говоря, комплексное. Его действительная часть характеризует зависимость фазовой скорости волны от частоты, а мнимая часть — зависимость коэффициента затухания амплитуды волны от частоты. Дисперсия, как правило, связана с внутренними свойствами материальной среды, обычно выделяются частотная (временная) дисперсия, когда поляризация в диспергирующей среде зависит от значений поля в предшествующие моменты времени (память), и пространственная дисперсия, когда поляризация в данной точке зависит от значений поля в некоторой области (нелокальность). Из графиков видно, что при малых скоростях вдува (большие значения параметра γ) волновые числа монотонно возрастают с увеличением частоты колебаний стенки. При больших скоростях вдува (γ мало) волновое число k_1 , слабо меняясь, выходит на константу, в то время как волновое число k_2 имеет ярко выраженный максимум при $Y = 1$ и с увеличением частоты колебаний стенки остается постоянной.

Анализ зависимостей волновых чисел $\delta_1 = (A - \sigma_1)^{-1}$; $\delta_2 = (A + \sigma_1)^{-1}$ от Y (частоты ω) при фиксированных s ($s = 2$) и скорости вдува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha v/\gamma}$ для различных значений γ показал, что существуют особые точки нестационарной задачи, в которых δ_1 обращается в бесконечность, а производная $d\delta_2/dY$ терпит разрыв первого рода, поэтому вопрос распространения волновых пакетов в данной среде нуждается в дополнительном исследовании. Для волны, излучаемой колеблющейся стенкой, особыми точками являются $Y = 1$, $Y = 4$ и ряд точек из промежутка $1 < Y < 2$ в окрестности которых волновое число δ_1 терпит разрыв. В то же время скорость волнового пакета V_{g1} терпит разрыв только в точке $Y = 1$.

Для неподвижной стенки особой точкой является $Y = 1$, в которой волновое число δ_2 имеет конечный скачок и с ростом частоты стремится к нулю, причем независимо от скорости вдува.

Анализ зависимости скоростей волновых пакетов от Y (частоты ω) при фиксированном s ($s = 2$) и скоростях вдува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha v/\gamma}$ для различных значений γ показал, что групповая скорость V_{g1} терпит разрыв второго рода при $Y = 1$, а при дальнейшем росте частоты стремится к некоторой константе. Характер волнового пакета, излучаемого неподвижной стенкой, носит сложный характер. В особой точке $Y = 1$ кривая V_{g2} распадается на серии кривых, которые зависят от скорости вдува среды.

Полагая скорость пограничного потока $u_0 = 0$ получаем

$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{v}{\alpha} \left(1 + \frac{4\Omega^2}{\alpha^2} \right)}, \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{v} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\Omega^2} \right)^{-1}},$$

что совпадает с ранее полученным результатом [4].

При $\alpha = 0$ волновые числа k_1 и δ_1 обращаются в нуль, при этом $k_2 = v/u_0$ и $\delta_2 = u_0/v$, т.е. волна, бегущая вдоль оси Oy от плоскости Q_0 к плоскости Q_1 отсутствует, а присутствует волна, бегущая от стенки Q_1 к стенке Q_0 , которая затухает на расстоянии δ_2 .

Заключение. Проведен анализ нестационарного течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации при наличии поперечного потока. Найдены аналитические решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладывается. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенки щели. Для случая “нормальных” колебаний одной из стенок рассмотрен случай резонанса, и исследова-

на структура пограничных слоев, прилегающих к пластинам. Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более сложных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955, 521 с.
2. Гурченков А.А., Яламов Ю.И. Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
3. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 251–255.
4. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 770–778.
5. Холодова Е.С. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, 2019. 451 с.
6. Thornley Cl. On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech. Appl. Math. 1968. V. 21. № 4. P. 455–462.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 632 с.
8. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.

Unsteady Flow of a Viscous Electrically Conductive Fluid between Rotating Parallel Walls in the Presence of Blowing (Suction) of the Medium and the Magnetic Field

A. A. Gurchenkov^{a,b,#}

^a FRC “Informatics and Control” RAS, Moscow, Russia

^b National Research University “MAI”, Moscow, Russia

[#]e-mail: challenge2005@mail.ru

We study the movements of a viscous electrically conductive incompressible fluid, which initially rotates as a solid with a constant angular velocity together with the parallel walls bounding it, under the action of suddenly beginning longitudinal vibrations of one of the walls. The walls make an arbitrary angle with the axis of rotation. An unsteady flow is induced by longitudinal vibrations of one of the walls, injection (suction) of the medium, produced perpendicular to the surface of the porous plate, and a suddenly switched on constant magnetic field directed normal to the walls.

Analytical solutions of the equations of magnetohydrodynamics are constructed. The velocity field and vectors of tangential stresses of a viscous conductive fluid acting on the walls of the slot are determined. The induced magnetic field in the flow of an electrically conductive fluid is determined.

A number of particular cases of wall motion are considered. On the basis of the results obtained, individual structures of the boundary layers at the walls of the gap are investigated.

Keywords: equations of magnetohydrodynamics, viscous conductive fluid, boundary layers

REFERENCES

1. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 521 p. (in Russian)
2. *Gurchenkov A.A., Yalamov Yu.I.* Unsteady flow on a porous plate in the presence of injection (suction) of the medium // *J. Appl. Mech. & Techn. Phys.*, 1980, no. 4, pp. 66–69. (in Russian)
3. *Gurchenkov A.A.* The unsteady motion of a viscous fluid between rotating parallel walls // *JAMM*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 239–243.
4. *Gurchenkov A.A.* Unsteady motion of a viscous electrically conductive fluid between rotating parallel walls in the presence of a magnetic field // *JAMM*, 2019, vol. 83, no. 5–6, p. 770–778.
5. *Kholodova E.S.* Thesis for the degree of doctor Phys.-Math. Sci., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2019, 451 p. (in Russian)
6. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // *Quart J. Mech. Appl. Math.*, 1968, V. 21, no. 4, pp. 455–462.
7. *Prudnikov AP, Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Moscow: Nauka, 1981. 632 p. (in Russian)
8. *Dech G.* Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and z-transform. Moscow: Nauka, 1971. 288 p. (in Russian)
9. *Korn G., Korn T.* Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers. Moscow: Nauka, 1978. 832 p. (in Russian)