ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 677–686

УДК 531.36+517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

© 2020 г. В. В. Козлов[1,*]

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: kozlov@pran.ru*

Поступила в редакцию 19.06.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 01.10.2020 г.

Рассматривается задача о структуре спектра линеаризованных в окрестности положения равновесия уравнений движения механической системы в непотенциальном силовом поле. Особое внимание уделено случаю, когда поле сил циркуляционное и на систему еще действуют силы вязкого трения. Решение задачи об устойчивости основано на поиске инвариантных подпространств, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство системы.

Ключевые слова: циркуляционные силы, теорема о вириале, инвариантное подпространство, гамильтонова система

DOI: 10.31857/S0032823520060077

1. Введение. Речь идет о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

которые описывают движение механических систем в непотенциальном силовом поле. Здесь $M = M^T > 0$ – положительно определенная матрица, которая задает кинетическую энергию системы

$$T = (M\dot{x}, \dot{x})/2,$$

P – произвольная $n \times n$-матрица, которая однозначно представляется в виде суммы симметрической матрицы K и кососимметрической матрицы N. Матрица K определяет потенциальную энергию системы

$$V = (Kx, x)/2,$$

а кососимметрическая матрица N порождает так называемую *циркуляционную* силу $-Nx$. Симметричная матрица $D = D^T \geq 0$ задает диссипативную функцию Релея

$$(D\dot{x}, \dot{x})/2$$

Систематическое изложение теории таких систем можно найти в книгах [1–3].

Наличие циркуляционных сил в отсутствие диссипации может приводить к появлению комплексных четверок в спектре линейной системы (1.1) даже в том случае, когда потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий минимум [4]. Неустойчивость такого типа обычно называют *флаттером*. Может ли флаттер подавляться большими диссипативными силами? Большое число публикаций посвящено задаче о влиянии малых диссипативных сил на устойчивость равновесий циркуляционных систем (см. [1–3] и имеющиеся там ссылки). Был [5] детально исследован случай $n = 2$. Упомянем еще две недавние работы по условиям устойчивости циркуляционных систем без диссипации [6, 7].

Напомним, что степенью неустойчивости u линейной системы дифференциальных уравнений называется число собственных значений (считая кратности) из спектра этой системы, лежащих в правой комплексной полуплоскости. Степень неустойчивости по Пуанкаре p – это количество отрицательных элементов симметрической матрицы K после приведения ее к диагональному виду.

2. Теорема о неустойчивости.

Теорема 1. Если $p = n$, то независимо от циркуляционных и диссипативных сил степень неустойчивости линейной системы (1.1) также равна n.

Условие $p = n$ означает, что потенциальная энергия V имеет в положении равновесия $x = 0$ строгий максимум.

Доказательство теоремы 1 использует следующее, легко проверяемое равенство (обобщенная теорема о вириале)

$$\dot{f} = 2(T - V), \quad \text{где} \quad f = (M\dot{x}, x) + \frac{1}{2}(Dx, x)$$

Так как $p = n$, то $\dot{f}$ будет положительно определенной квадратичной формой в $2n$-мерном фазовом пространстве. Следовательно, по теореме Островского–Шнейдера [8], степень неустойчивости u равна отрицательному индексу инерции j^- квадратичной формы f. Эта форма нейтральная ($j^- = j^+ = n$). Действительно, полагая

$$\dot{x} = M^{-1}(v - Dx/2),$$

получаем $f = (v, x)$. Но это и доказывает нейтральность f.

3. Структура спектра в одном частном случае. Больший интерес представляет задача о стабилизации равновесия, когда потенциальная энергия имеет строгий минимум. Как хорошо известно, при отсутствии циркуляционных сил равновесие становится асимптотически устойчивым при добавлении сил вязкого трения с полной диссипацией (когда $D > 0$). Однако, если $D = 0$, то добавление циркуляционных сил может нарушить устойчивость даже в том случае, когда потенциальные силы центральные:

$$V = k(x, x)/2, \quad k = \text{const} > 0$$

Это – известный результат Д.Р. Меркина [4].

Чтобы лучше разобраться с этим кругом вопросов, рассмотрим частный случай, когда одновременно

$$M = I, \quad D = cI, \quad K = kI,$$

где I – единичная матрица, а c и k положительные постоянные. Как известно, любую симметрическую положительно определенную матрицу можно привести к единичной. Здесь же предполагается, что три матрицы M, D и K одновременно приведены к специальному диагональному виду. В новых переменных уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + Nx = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

Спектр этого линейного дифференциального уравнения второго порядка состоит из корней характеристического многочлена

$$|(\lambda^2 + c\lambda + k)I + N| \tag{3.2}$$

Хорошо известно, что собственными значениями кососимметрической матрицы N могут быть пары чисто мнимых чисел $\pm i\omega$, либо нули. Таким образом, из (3.2) вытекает, что собственные значения λ удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + c\lambda + k = \pm i\omega, \tag{3.3}$$

где ω – вещественное число, которое может быть и нулем. Следовательно, задача об устойчивости линейной системы (3.1) сводится к выяснению расположения на комплексной плоскости корней квадратного уравнения (3.3).

Возводя обе части (3.3) в квадрат, получаем многочлен четвертой степени

$$\lambda^4 + 2c\lambda^3 + (2k + c^2)\lambda^2 + 2ck\lambda + k^2 + \omega^2 = 0, \tag{3.4}$$

который в случае асимптотической устойчивости должен быть гурвицевым. Известные условия дают решение нашей задачи: все корни многочлена (3.4) лежат в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда $kc^2 > \omega^2$. Следовательно, если

$$c > \frac{\max|\omega|}{\sqrt{k}}, \tag{3.5}$$

то положение равновесия $x = 0$ линейной системы (3.1) будет асимптотически устойчивым. Максимум в (3.5) берется по всем собственным числам кососимметрической циркуляционной матрицы N.

Наоборот, если $kc^2 < \omega^2$, то многочлен (3.4) имеет два корня в левой полуплоскости и два в правой. Этот факт выводится из метода Рауса–Гурвица (более тонкого по сравнению с общеизвестной теоремой Гурвица) [9]. Поэтому если хотя бы для одной частоты ω выполняется неравенство $kc^2 < \omega^2$, то линейная система (3.1) неустойчива. Причем эта неустойчивость типа флаттера, поскольку многочлен (3.4), очевидно, не имеет вещественных положительных корней.

Суммируя сказанное, можно сделать следующий вывод. Пусть матрица циркуляционных сил имеет собственные значения $\pm i\omega_j$ (среди ω_j могут быть равные, а также нули). Если имеется ровно p "частот"' ω_j, удовлетворяющих неравенству $kc^2 < \omega^2$, то степень неустойчивости u линейной системы (3.1) равна $2p$. Так как количество пар ненулевых собственных чисел кососимметрической матрицы N порядка n не превосходит $n/2$, то степень неустойчивости системы (3.1) не превосходит n. При увеличении коэффициента вязкого трения c степень неустойчивости не возрастает и становится нулем при достаточно больших значениях коэффициента c.

Отметим еще, что если потенциальные силы отсутствуют ($k = 0$), то при $N \neq 0$ в системе (3.1) будет наблюдаться флаттер для всех значений коэффициента трения c.

Как будет показано ниже, эти выводы (с некоторыми уточнениями) справедливы и в общем случае (для произвольных симметрических матриц $D > 0$ и $K \geq 0$).

4. Инвариантные подпространства. Всюду дальше будем считать, что матрица M приведена к единичной I. При этом структура и свойства остальных матриц D, K и N останутся прежними.

Для решения задачи об устойчивости используем прием, связанный с поиском инвариантных n-мерных подпространств фазового пространства, однозначно проектирующих на конфигурационное пространство. Такие подпространства следует искать в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Эта n-мерная плоскость будет инвариантной для линейной системы (1.1) тогда и только тогда, когда $n \times n$-матрица A удовлетворяет следующему квадратному уравнению

$$A^2 + DA + P = 0 \tag{4.2}$$

Пусть $\|\cdot\|$ – операторная норма матрицы. Напомним, что

$$\|X\| = \max_{\|x\|=1} \|Xx\|$$

В частности, $\|I\| = 1$ и $\|X^T\| = \|X\|$. Ясно, что операторная норма зависит от выбора нормы в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n = \{x\}$. Например, для “стандартной” нормы

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

имеем

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2\right)^{1/2},$$

где x_{ij} – элементы матрицы X.

Далее мы предполагаем, что $|P| \neq 0$. Это эквивалентно условию единственности равновесия $x = 0$ линейной системы (1.1).

Теорема 2. Если

$$\|D^{-1}\| \cdot \|D^{-1}P\| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \|D^{-1}\| \cdot \|PD^{-1}\| < \frac{1}{4}, \tag{4.3}$$

то фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{x, \dot{x}\}$ системы (1.1) есть прямая сумма инвариантных n-мерных плоскостей

$$\sum = \{\dot{x} = Ax\} \quad \text{и} \quad \sum{}' = \{\dot{x} = A'x\},$$

где A и A' – невырожденные вещественные $n \times n$-матрицы, причем

$$\|A\| \le \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|D^{-1}\| \cdot \|D^{-1}P\|}}{2\|D^{-1}\|} \tag{4.4}$$

$$A' = -D + B, \quad \|B\| \le \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|D^{-1}\| \cdot \|PD^{-1}\|}}{2\|D^{-1}\|} \tag{4.5}$$

Существование двух различных решений квадратного матричного уравнения (4.2) с указанными свойствами доказано [10] с помощью метода сжимающих отображений. Инвариантные плоскости $\sum$ и $\sum'$ пересекаются только в начале координат. Это свойство эквивалентно невырожденности матрицы $A - A'$, что также доказано [10] с использованием условий (4.3).

Из теоремы 2 вытекает, в частности, что спектр линейной системы (1.1) есть объединение спектров матриц A и A'.

Чтобы лучше понять теорему 2, рассмотрим частный случай, когда $D = cI$ (как в разд. 3). Тогда при больших значениях коэффициента вязкого трения c два условия (4.3) заведомо выполнены и нормы матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ допускают асимптотическую оценку

$$\|P\|/c + o(c^{-1})$$

Применим теорему 2 к оценке степени неустойчивости линейной системы (1.1), в которой $M = I$. Прежде напомним, что для любой симметрической положительно определенной матрицы X найдется только одна матрица $X^{1/2}$, тоже симметрическая и положительно определенная, такая, что $X = X^{1/2}X^{1/2}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4.3) и дополнительно

$$\left\|D^{-1/2}\right\|^2 \frac{1-\sqrt{1-4\left\|D^{-1}\right\|\left\|PD^{-1}\right\|}}{2\left\|D^{-1}\right\|} < 1 \tag{4.6}$$

Тогда $u \le n$.

Напомним, что $u = n$, если $p = n$ (теорема 1). Положим снова $D = cI$. Тогда при $c \to \infty$ левая часть неравенства (4.6) будет

$$\|P\|/c^2 + o(c^{-2})$$

Для доказательства теоремы рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (4.1) на инвариантном подпространстве $\sum'$ с матрицей $A' = -D + B$. Ясно, что

$$\frac{1}{2}(x,x)^{\bullet} = (x, A'x) = -(Dx,x) + (Bx,x) \tag{4.7}$$

Полагая $D^{1/2}x = z$, будем иметь равенство

$$(Dx,x) = (z,z) = \|z\|^2 \tag{4.8}$$

Далее,

$$(Bx,x) = (BD^{-1/2}z, D^{-1/2}z) = (D^{-1/2}BD^{-1/2}z, z)$$

Следовательно,

$$|(Bx,x)| \le \left\|D^{-1/2}BD^{-1/2}\right\|\|z\|^2$$

Так как $\left\|D^{-1/2}BD^{-1/2}\right\| \le \left\|D^{-1/2}\right\|^2\|B\|$, то согласно (4.5), эта норма не превосходит левой части неравенства (4.6), то есть не превосходит единицы. Но тогда (с учетом (4.8)) правая часть равенства (4.7) будет отрицательно определенной квадратичной формой. Следовательно, по теореме Ляпунова, все собственные числа матрицы A' лежат в левой комплексной полуплоскости. Отсюда сразу вытекает, что $u \le n$. Что и требовалось.

5. Случай, когда в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий минимум.

Теорема 4. Пусть $K > 0$, выполнены условия (4.3), (4.6) и дополнительно

$$\left\|K^{-1/2}\right\| \frac{1-\sqrt{1-4\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|}}{2\left\|D^{-1}\right\|} < 1 \tag{5.1}$$

Тогда равновесие $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Чтобы лучше понять новое условие (5.1), положим $D = cI$ и $P = K = kI$. Тогда левая часть (5.1) будет равна

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad \text{где} \quad z = \frac{2\sqrt{k}}{c}$$

Легко проверить, что эта величина всегда меньше 1 при всех $0 < z < 1$. Отметим еще, что под радикалами в формулах (4.6) и (5.1) присутствуют нормы разных матриц PD^{-1} и $D^{-1}P$.

Обсудим влияние больших диссипативных сил на возможность стабилизации положения равновесия системы (1.1). С этой целью рассмотрим случай, когда элементы матрицы D^{-1} малы (то есть мала норма $\|D^{-1}\|$). Наоборот, тогда норма матрицы диссипативных сил D будет большой. Легко проверить, что тогда все условия теоремы 4 будут выполнены и поэтому добавление больших диссипативных сил оказывает стабилизирующее воздействие. Впрочем, этот общий результат был получен ранее в терминах условий на максимальные и минимальные по величине собственные значения матриц D, K и N (см. [11, 12]).

Для доказательства вычислим полную производную квадратичной формы $(Dx, x)/2$ в силу линейной системы (4.1), где матрица A удовлетворяет квадратному уравнению (4.2) и неравенству (4.4):

$$\frac{1}{2}(Dx, x)^{\bullet} = (D\dot{x}, x) = (DAx, x) = \frac{1}{2}((DA + A^T D)x, x)$$

Ясно, что

$$DA + A^T D = -2K - (A^2 + A^{T2})$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(Dx, x)^{\bullet} = -(Kx, x) - \frac{1}{2}((A^2 + A^{T2})x, x) \tag{5.2}$$

Так как $K > 0$, то можно сделать подстановку $K^{1/2}x = z$. В новых переменных правая часть (5.2) примет следующий вид:

$$-(z, z) - \frac{1}{2}(K^{-1/2}(A^2 + A^{T2})K^{-1/2}z, z)$$

Оценим норму матрицы во втором слагаемом:

$$\frac{1}{2}\left\|K^{-1/2}(A^2 + A^{T2})K^{-1/2}\right\| \le \left\|K^{-1/2}\right\|^2 \|A\|^2$$

Если величина справа меньше 1, то производная в (5.2) отрицательно определена. Но тогда (по теореме Ляпунова) все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости. С учетом (4.4) неравенство $\left\|K^{-1/2}\right\|^2 \|A\|^2 < 1$ эквивалентно (5.1).

6. Большие диссипативные силы. Решения матричного уравнения (4.2) можно представить в виде сходящихся степенных рядов. С этой целью заменим матрицу диссипативных сил D на cD, где c — большой параметр. Положим $A = cX$ и $\varepsilon = 1/c^2$. Тогда уравнение (4.2) примет следующий вид:

$$X^2 + DX + \varepsilon P = 0 \tag{6.1}$$

Будем искать его решения в виде ряда по степеням ε:

$$X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots \tag{6.2}$$

Теорема 5. Квадратное матричное уравнение (6.1) имеет два различных решения в виде степенных рядов (6.2) с $X_0 = -D$ и $X_0 = 0$, сходящихся при

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_1 = \left\|D^{-1}\right\|^{-1}\left\|D^{-1}P\right\|^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \left\|D^{-1}\right\|^{-1}\left\|PD^{-1}\right\|^{-1}$$

Для решения с матрицей $X_0 = 0$ остальные коэффициенты $X_1, X_2, \ldots$ находятся из следующих равенств:

$$DX_1 + P = 0, \quad DX_2 + X_1^2 = 0, \quad DX_3 + (X_1X_2 + X_2X_1) = 0, \quad \ldots \tag{6.3}$$

Отсюда

$$X_1 = -D^{-1}P, \quad X_2 = -D^{-1}(D^{-1}P)^2, \quad \ldots$$

Далее получаем последовательно

$$\|X_1\| = \left\|D^{-1}P\right\|, \quad \|X_2\| \le \left\|D^{-1}\right\| \left\|D^{-1}P\right\|^2$$

$$\|X_3\| \le 2\left\|D^{-1}\right\|^2 \left\|D^{-1}P\right\|^3, \quad \ldots$$

Итак,

$$\|X_k\| \le \kappa_k \left\|D^{-1}\right\|^{k-1} \left\|D^{-1}P\right\|^k,$$

причем, согласно (6.3), коэффициенты κ_k удовлетворяют следующему рекуррентному правилу:

$$\kappa_{k+1} = \kappa_1\kappa_k + \kappa_2\kappa_{k-1} + \ldots + \kappa_k\kappa_1, \quad \kappa_1 = 1$$

Таким образом, $\{\kappa_k\}$ – это хорошо известные в комбинаторике *числа Каталана*. Их производящая функция $\sum_1^\infty \kappa_k z^k$ равна

$$(1 - \sqrt{1 - 4z})/2$$

Следовательно,

$$\|X\| \le \sum_{k=1}^\infty \kappa_k \|X_k\| \le \left\|D^{-1}\right\|^{-1} \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k \kappa_k \left(\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|\right)^k =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|}}{\left\|D^{-1}\right\|}$$

(ср. с формулой (4.4)). Но тогда степенной ряд (6.2) будет сходящимся при выполнении условия $\varepsilon < \varepsilon_1/4$. Аналогично решается вопрос о сходимости ряда (6.2), когда $X_0 = -D$. Теорема доказана.

При малых $\varepsilon > 0$ дифференциальные уравнения (4.1) имеют следующий явный вид:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Dx + \sqrt{\varepsilon}PD^{-1}x + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{6.4}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\varepsilon}D^{-1}x - \varepsilon^{3/2}D^{-1}(D^{-1}P)^2x + O(\varepsilon^{5/2}) \tag{6.5}$$

Так как $D > 0$, то спектр линейной системы (6.4) целиком лежит в левой комплексной полуплоскости, если $\varepsilon > 0$ мало. Это частный случай теоремы 3.

Теорема 6. Пусть

$$\left\| D^{-1/2} N P^{-1} D^{1/2} \right\| < 1 \tag{6.6}$$

Тогда при малых ε (или, что то же самое, при больших c) степень неустойчивости линейной системы (1.1) равна степени неустойчивости Пуанкаре p.

Отметим, что условие (6.6) не меняется при замене D матрицей cD, $c > 0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим “главную” часть системы (6.5):

$$D\dot{x} = -(K + N)x \tag{6.7}$$

Опущенный множитель $\sqrt{\varepsilon}$ не влияет на ее степень неустойчивости. Следствием (6.7) будет равенство

$$\frac{1}{2}(Kx, x)^{\bullet} = -(D\dot{x}, \dot{x}) - (Nx, \dot{x}) \tag{6.8}$$

Полагая $z = D^{1/2}\dot{x}$, правую часть представим в виде

$$-(z, z) - (D^{-1/2} N P^{-1} D^{1/2} z, z)$$

Ввиду условия (6.6) эта сумма представляет отрицательно определенную квадратичную форму. Этот вывод справедлив и для “полного” уравнения (6.5), если ε – достаточно малое положительное число. Но тогда (по теореме Островского–Шнейдера [8]) из равенства (6.8) вытекает, что степень неустойчивости линейной системы (6.5) при малых $\varepsilon > 0$ в точности равна p (индексу инерции потенциальной энергии системы). Что и требовалось.

Если $D = cI$, то условие (6.6) принимает более простой вид:

$$\left\| N(K + N)^{-1} \right\| < 1 \tag{6.9}$$

Оно показывает, что потенциальные силы в определенном смысле доминируют над циркуляционными. Если $K = 0$, то неравенство (6.9), конечно, не справедливо. Именно этот случай мы и рассмотрим в заключение. Поскольку выше предполагалось, что $|P| \neq 0$, то и $|N| \neq 0$. В частности, число степеней свободы n четно.

Теорема 7. Пусть $K = 0$ и $|N| \neq 0$. Тогда при малых ε (или, что то же самое, при больших c) степень неустойчивости линейной системы (1.1) равна n.

Из системы (6.5) вытекает равенство

$$\frac{1}{2}(D^{-1}Nx, Nx)^{\bullet} = \varepsilon^{3/2}(D^{-2}(ND^{-1}N)x, ND^{-1}Nx) + O(\varepsilon^{5/2})$$

Так как $|N| \neq 0$, то при малых $\varepsilon > 0$ квадратичная форма справа положительно определена. Поскольку слева стоит полная производная по времени от также положительной определенной квадратичной формы, то (по теореме Ляпунова) степень неустойчивости линейной системы (6.5) равна n при малых $\varepsilon > 0$. Но тогда (с учетом теоремы 3) степень неустойчивости “полной” линейной системы (1.1) также равна n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 330 с.
2. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.
3. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Walter. Berlin; Boston: de Gruyter, 2013. 429 p.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Байков А.Е., Красильников П.С.* О эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 74–88.
6. *Bulatovic R.M.* A stability criterion for circulatory systems // Acta Mech. 2017. V. 228. P. 2713–2718.
7. *Awrejcewicz J., Losyeva N., Puzyrov V.* Stability and boundedness of the solutions of multi-parameter dynamical systems with circulatory forces // Symmetry. 2020. V. 12. № 8. art. 1210.
8. *Ostrowski A., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. & Appl. 1967. V. 4. P. 72–84.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
10. *Козлов В.В.* Инвариантные плоскости, индексы инерции и степени устойчивости линейных уравнений динамики // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 258. С. 154–161.
11. *Сейранян А.П.* О теоремах Метелицына // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 39–43.
12. *Клим В., Сейранян А.П.* Неравенство Метелицына и критерии устойчивости механических систем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 225–233.

On the Stability of Circulatory Systems under the Presence of Forces of Viscous Friction

V. V. Kozlov[a,#]

[a] *Steklov Mathematical Institute of the RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: kozlov@pran.ru*

We consider the problem of the structure of the spectrum of the equations of motion of a mechanical system linearized in a neighborhood of an equilibrium position in a non-potential force field. Particular attention is paid to the case when the force field is circulatory and there are also forces of viscous friction acting on the system. The solution of the stability problem is based on the search of invariant subspaces that are univalently projected onto the configuration space of the system.

Keywords: circulatory forces, virial theorem, invariant subspace, Hamiltonian system

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 330 p. (in Russian)
2. *Mailybaev A.A., Seyranian A.P.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. 403 p.
3. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics; Berlin, Boston: Walter de Gruyter, 2013. 429 p.
4. *Merkin D.R.* Gyroscopic systems. Moscow: Nauka, 1974. 344 p. (in Russian)
5. *Baikov A.E., Krasil'nikov P.S.* The Ziegler effect in a non-conservative mechanical system // JAMM, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 51–60.

6. *Bulatovic R.M.* A stability criterion for circulatory systems // Acta Mech., 2017, vol. 228, pp. 2713–2718.
7. *Awrejcewicz J., Losyeva N., Puzyrov V.* Stability and boundedness of the solutions of multi-parameter dynamical systems with circulatory forces // Symmetry, 2020, vol. 12, no. 8, art. 1210.
8. *Ostrowski A., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. & Appl., 1967, vol. 4, pp. 72–84.
9. *Gantmakher F.R.* The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1967. 576 p. (in Russian)
10. *Kozlov V.V.* Invariant planes, indices of inertia, and degrees of stability of linear dynamic equations // Proc. Steklov Institute of Mathematics, 2007. vol. 258, pp. 154–161. (in Russian)
11. *Seyranian A.P.* On the theorems of Metelitsyn // Izv. RAN, Mekhanika Tverdogo Tela, 1994, vol. 3, pp. 39–43. (in Russian)
12. *Kliem W., Seyranian A.P.* Metelitsyn's inequality and stability criteria for mechanical systems // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 199–205.