

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ШТАМПА НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕТЕРОГЕННОГО СЛОЯ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

© 2021 г. О. А. Беляк^{1,*}, Т. В. Суворова^{1,**}¹ Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: o_bels@mail.ru

**e-mail: suvorova_tv111@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2021 г.

После доработки 25.02.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается контактная задача о колебаниях штампа с плоским основанием на поверхности гетерогенного слоя при учете сил трения в области контакта. Микро-структура пористоупругого насыщенного флюидом слоя описывается уравнениями Био-Френкеля, в области контакта выполняется закон трения Кулона–Амонтона. Краевая задача сведена к разностному интегральному уравнению 1-го рода относительно контактных давлений. Построено приближенное решение интегрального уравнения с использованием метода граничных элементов. Исследовано влияние частоты вибрации, толщины слоя на контактные напряжения на примере маслосодержащего композита на основе фенилона, механические модули которого определены с помощью методов микромеханики и наноиндентирования.

Ключевые слова: динамическая контактная задача, трение в области контакта, гетерогенный слой

DOI: 10.31857/S0032823521030048

1. Введение. Контактным задачам теории упругости посвящены многочисленные исследования, отметим здесь монографии и статьи школы академика Бабешко В.А., где рассмотрены динамические контактные задачи для упругих слоистых оснований [1–4], для насыщенных пористоупругих сред такие задачи представлены в работах [5–9]. Особым интересом и актуальностью пользуются приложения контактных задач к трибологии. Решения широкого круга контактных задач в статической и квазистатической постановках для однородных упругих и вязкоупругих сред рассмотрены работах [10–12], для пористоупругих насыщенных сред, описываемых моделью Био-Френкеля рассмотрены в работах [13–15], в том числе в динамической постановке [7–9].

В настоящей работе рассматривается динамическая контактная задача для гетерогенного двухфазного слоя при учете трения в области контакта. Для описания микро-структуры основания, состоящего из изотропной вязкоупругой матрицы и вязкого флюида, использованы уравнения гетерогенной среды Био [16–18]. Практическое значение рассматриваемой задачи при конструировании новых наномодифицированных композиционных материалов [19–21] состоит в изучении влияния динамических эффектов, возникающих за счет вибрации, на трибологический процесс. С этой целью численные расчеты представлены для маслонаполненного композита с матрицей на основе фенилона и наноразмерных добавок, экспериментально определены модуль Юнга, в том числе, с помощью наноиндентирования, коэффициент Пуассона [21]. Изменение механических модулей многофазной среды при росте пористости получе-

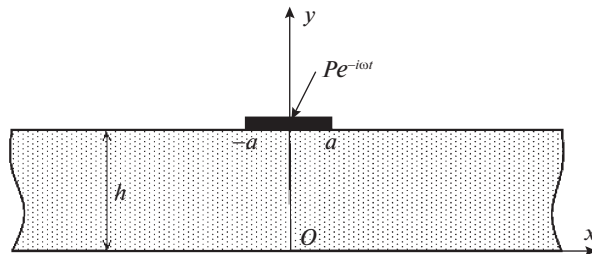


Рис. 1. Схема динамической контактной задачи.

но с помощью дифференциальной схемы метода самосогласования и конечно-элементных моделей со стохастически распределенными сферическими порами [22].

2. Постановка задачи. Рассматривается контактная задача о вибрации с частотой ω жесткого штампа с плоским основанием шириной $2a$ под действием приложенной к нему силы $\mathbf{P} = \{P_1 e^{-i\omega t}, P_2 e^{-i\omega t}\}$ изменяющейся по гармоническому закону, на верхней границе слоя $-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h$, занятого гетерогенной средой, состоящей из двух фаз: вязкоупругой пористой матрицы-скелета и вязкого флюида (рис. 1).

Будем полагать, что амплитуда приложенной силы такова, что в процессе колебаний не происходит нарушение контакта или возникновение зон скольжения. В области контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона—Кулона, а внутренняя микроструктура основания описывается уравнениями Био-Френкеля [16–18]. Считаем, что штамп и границы слоя непроницаемы для жидкой фазы, а режим колебаний является установившимся. После отделения временного множителя уравнения Био-Френкеля имеют вид:

$$\begin{aligned}
 N \Delta \mathbf{u} + \nabla ((A + N) \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \nabla \cdot \mathbf{v}) + \omega^2 (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} \mathbf{v}) + i \omega b (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= 0 \\
 \nabla (Q \nabla \cdot \mathbf{u} + R \nabla \cdot \mathbf{v}) + \omega^2 (\rho_{12} \mathbf{u} + \rho_{22} \mathbf{v}) - i \omega b (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= 0 \\
 \sigma_{ij}^s &= A e \delta_{ij} + 2 N e_{ij} + Q \varepsilon_{ij} \\
 \sigma^f &= Q e + R \varepsilon; \quad i, j = 1, 2 \\
 e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \\
 e &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij} \sigma^f,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $A, N, Q, R, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ — механические характеристики двухфазной среды, $\mathbf{e}$ и ε — тензоры деформации, соответствующие амплитудным значениям векторов перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$, σ^s — тензор напряжений, действующий на вязкоупругий скелет, σ^f — давления, действующие на флюид в порах, $b = m^2 \eta k_o^{-1}$, где η, k_o — динамическая вязкость флюида и проницаемость среды соответственно, m — пористость среды.

Граничные условия в случае слоя, лежащего без трения на жестком основании, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{21}(x, h) &= \mu \Gamma_{22}(x, h); \quad |x| \leq a \\
 \Gamma_{22}(x, h) &= q(x), \quad u_2(x, h) = v_2(x, h) = \delta; \quad |x| \leq a \\
 \Gamma_{22}(x, h) &= 0, \quad u_2(x, h) = v_2(x, h); \quad |x| > a \\
 u_2(x, 0) &= v_2(x, 0) = 0, \quad \Gamma_{21}(x, 0) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где δ — амплитуда перемещения штампа в вертикальном направлении, μ — коэффициент трения, $q(x)$ — неизвестные контактные давления.

Перейдем в соотношениях (2.1)–(2.2) к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} q_{11} &= (A + 2N)/N, & q_{12} &= Q/N, & q_{22} &= R/N \\ \gamma_{11} &= (\rho_{11} + ib/\omega)/\rho_{11}, & \gamma_{12} &= (\rho_{12} - ib/\omega)/\rho_{11} \\ \gamma_{22} &= (\rho_{22} + ib/\omega)/\rho_{11}, & \vartheta^2 &= \rho\omega^2 a^2/N, & \delta_0 &= \delta/a, \end{aligned}$$

линейные величины отнесены к полуширине штампа. Замыкают постановку краевой задачи (2.1)–(2.2) условие излучения волн на бесконечность, устанавливаемые аналогично случаю упругой среды [2]. Далее, будем разыскивать контактные давления $q(x)$ и горизонтальные смещения $u_1(x, 0)$ под штампом.

3. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению. Применим к уравнениям (2.1)–(2.2) интегральное преобразование Фурье [23] по переменной x . Представим перемещения в виде двух скалярных и векторного потенциалов [8]. В результате уравнения (2.1) расщепляются на три волновые уравнения, а потенциалы соответствуют трем типам волн: медленной и быстрой продольной, и поперечной волны, распространяющимся в гетерогенной среде со скоростями V_i , $i = 1, 2, 3$. В результате получим связь перемещений и напряжений для слоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} \mathbf{G}(\alpha, y) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \mathbf{v}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} \mathbf{G}_v(\alpha, y) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \mathbf{Q}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(x) e^{i\alpha x} dx, \quad \mathbf{q} = \{\Gamma_{21}(x), \Gamma_{22}(x)\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Контур Υ выбирается в соответствии с условиями излучения волн на бесконечность, α – параметр преобразования Фурье, $\mathbf{G}(\alpha, y)$, $\mathbf{G}_v(\alpha, y)$ – матрицы Грина для перемещений скелета и флюида соответственно.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\alpha, y) &= \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{E}(\alpha, y) (\mathbf{D}(\alpha, h))^{-1} \\ \mathbf{G}_v(\alpha, y) &= \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{E}_v(\alpha, y) (\mathbf{D}(\alpha, h))^{-1} \\ \mathbf{B}(\alpha) &= \begin{pmatrix} -i\alpha & -i\alpha & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & i\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}(\alpha, y) = (E_{ii}(\alpha, y))$, $\mathbf{E}_v(\alpha, y) = (E_{v,ii}(\alpha, y))$ – диагональные матрицы с элементами $E_{ii} = \text{ch } s_i y$, $E_{v,ii} = m_i \text{ch } s_i y$, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\alpha, y) &= \begin{pmatrix} -2i\alpha s_1 \text{sh } s_1 y & -2i\alpha s_2 \text{sh } s_2 y & (\alpha^2 + s_3^2) \text{sh } s_3 y \\ g_{01} \text{ch } s_1 y & g_{02} \text{ch } s_2 y & 2i\alpha s_3 \text{ch } s_3 y \\ m_{01} s_1 \text{sh } s_1 y & m_{02} s_2 \text{sh } s_2 y & i\alpha \gamma_{13} \text{sh } s_3 y \end{pmatrix} \\ g_{0i} &= 2\alpha^2 - \theta_i^2 (q_{11} + q_{12} + (q_{12} + q_{22})m_i) \\ m_{0i} &= 1 - m_i, \quad i = 1, 2, \quad \gamma_{13} = 1 + \gamma_{12}/\gamma_{22} \\ s_k &= \sqrt{\alpha^2 - \theta_k^2}; \quad k = 1, 2, 3 \\ \varsigma_3 &= (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)/\gamma_{22}, \quad \theta_i^2 = \rho_s \omega^2 a^2 \varsigma_i/N, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а m_i , ς_i , $i = 1, 2$ определяются соотношениями:

$$\begin{vmatrix} q_{12} & q_{11} \\ q_{22} & q_{12} \end{vmatrix} \zeta^2 + \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{12} \\ q_{12} & q_{11} \end{vmatrix} \right) \zeta + \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{11} \\ \gamma_{22} & \gamma_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$m_i = \frac{\gamma_{12} - \zeta_i q_{12}}{\zeta_i q_{22} - \gamma_{22}}$$

С целью оптимизации вычислительных процессов проведем ряд аналитических преобразований и раскрытий неопределенностей, в результате матрица Грина примет вид:

$$\mathbf{G}(\alpha, y) = \frac{1}{D(\alpha)} (G_{ij}(\alpha, y)); \quad i, j = 1, 2$$

$$D(\alpha) = 2\alpha^2(2g_0 \operatorname{sh} s_1 h \operatorname{sh} s_2 h \operatorname{ch} s_3 h + \gamma_{13} g_4 \operatorname{sh} s_3 h) - (\alpha^2 + s_3^2) g_5 \operatorname{sh} s_3 h$$

$$g_0 = (m_1 - m_2) s_1 s_2 s_3$$

$$G_{11}(\alpha, h) = s_3(g_6 \alpha^2 + g_5) \operatorname{ch} s_3 h + \gamma_{13} \alpha^2 (g_{01} - g_{02}) \operatorname{ch} s_1 h \operatorname{ch} s_2 h \operatorname{sh} s_3 h$$

$$G_{12}(\alpha, h) = -i\alpha(2g_0 \operatorname{sh} s_1 h \operatorname{sh} s_2 h \operatorname{ch} s_3 h + 2\alpha^2 \gamma_{13} g_7 \operatorname{sh} s_3 h - (\alpha^2 + s_3^2) g_6 \operatorname{sh} s_3 h) \quad (3.3)$$

$$G_{21}(\alpha, h) = i\alpha(g_0 \operatorname{sh} s_1 h \operatorname{sh} s_2 h \operatorname{ch} s_3 h - (\gamma_{13} g_4 - g_5) \operatorname{sh} s_3 h)$$

$$G_{22}(\alpha, h) = (m_1 - m_2) s_1 s_2 \theta_3^2 \operatorname{sh} s_1 h \operatorname{sh} s_2 h \operatorname{sh} s_3 h$$

$$g_4 = \begin{vmatrix} g_{01} \operatorname{ch} s_1 h & g_{02} \operatorname{ch} s_2 h \\ s_1 \operatorname{sh} s_1 h & s_2 \operatorname{sh} s_2 h \end{vmatrix}, \quad g_5 = \begin{vmatrix} g_{01} \operatorname{ch} s_1 h & g_{02} \operatorname{ch} s_2 h \\ m_{01} s_1 \operatorname{sh} s_1 h & m_{02} s_2 \operatorname{sh} s_2 h \end{vmatrix}$$

$$g_6 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} s_1 h & \operatorname{ch} s_2 h \\ m_{01} s_1 \operatorname{sh} s_1 h & m_{02} s_2 \operatorname{sh} s_2 h \end{vmatrix}, \quad g_7 = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} s_1 h & \operatorname{ch} s_2 h \\ s_1 \operatorname{sh} s_1 h & s_2 \operatorname{sh} s_2 h \end{vmatrix}$$

В случае толщины слоя $h \rightarrow \infty$ соотношения (3.3) принимают вид:

$$D(\alpha) = 2\alpha^2(2g_0 + \gamma_{13} g_4) - (\alpha^2 + s_3^2) g_5$$

$$G_{11}(\alpha) = s_3(g_6 \alpha^2 + g_5) + \gamma_{13} \alpha^2 (g_{01} - g_{02})$$

$$G_{12}(\alpha) = -i\alpha(2g_0 + 2\gamma_{13} g_7 \alpha^2 - (\alpha^2 + s_3^2) g_6)$$

$$G_{21}(\alpha) = i\alpha(g_0 - (\gamma_{13} g_4 - g_5))$$

$$G_{22}(\alpha) = (m_1 - m_2) s_1 s_2 \theta_3^2$$

$$g_4 = g_{01} s_2 - g_{02} s_1, \quad g_5 = g_{01} m_{02} s_2 - g_{02} m_{01} s_1$$

$$g_6 = m_2 - m_1, \quad g_7 = s_2 - s_1$$

и совпадают с ранее полученными соотношениями для компонент матрицы Грина в случае гетерогенной полуплоскости [8].

После удовлетворения граничных условий (2.2), приходим к интегральному уравнению 1-го рода с разностным ядром относительно неизвестного контактного давления:

$$\int_{-1}^1 k(x - \xi) q(\xi) d\xi = \delta_0 \quad (3.4)$$

Ядро интегрального уравнения (3.4) имеет вид:

$$k(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\mu G_{21}(\alpha, h) + G_{22}(\alpha, h)) / D(\alpha) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha \quad (3.5)$$

4. Построение решения интегрального уравнения. Элементы матрицы $\mathbf{G}(\alpha, h)$ являются мероморфными функциями в комплексной плоскости, с общими комплексными полюсами, определяемыми соотношением $D(\alpha) = 0$. Комплексные полюса определяют скорость и затухание поверхностных волн в гетерогенном слое. Проведен анализ поведения элементов матрицы $\mathbf{G}(\alpha, h)$ при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_{ii}(\alpha)/D(\alpha) = \frac{d_{ii}}{|\alpha|} \quad (4.1)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_{ij}(\alpha)/D(\alpha) = \frac{(-1)^i d_{ij}}{\alpha}; \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2$$

Аналитические методы регуляризации и решения уравнений с разностным ядром для упругих сред развиты в фундаментальных работах школы академика Бабешко В.А., например, в работах [1–4]. В настоящей работе для построения приближенного решения уравнения (3.4) применен метод граничных элементов, при этом в качестве регуляризатора уравнения использована функция $d_{ii}/\sqrt{\alpha^2 + R^2}$, $i = 1, 2$, не имеющая полюсов в комплексной плоскости и совпадающая по асимптотическому поведению с членом, несущим логарифмическую особенность. Для пористоупругого полупространства этот метод успешно апробирован и изложен в [7–9]. Выделим в (3.5) логарифмическую особенность:

$$k(x - \xi) = I(x - \xi) + K_0(R|x - \xi|)/\pi$$

$$I(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} L(\alpha) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha \quad (4.2)$$

$$L(\alpha) = \mu G_{21}(\alpha) + G_{22}(\alpha) - d_{22}/\sqrt{\alpha^2 + R^2},$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка [24]. Интеграл $I(x - \xi)$ в (4.2) является быстро сходящимся. Выбор $R \gg 1$ ускоряет сходимость при дальнейших вычислениях интегралов. Проведем дискретизацию области контакта для плоского штампа, выбрав точки коллокации x_i , ξ_i , равномерно распределенными, с шагом $h = 2/N$ на отрезке $[-1 + h/2, 1 - h/2]$, $\xi_k = -1 + h(k - 0.5)$; $k = 1, 2, \dots, N$. При этом полагаем $q(x)|_{x_i < x < x_{i+1}} = q(x_i) = q_i$; $i = 1, 2, \dots, N$.

В результате решение интегрального уравнения (3.4) сводится к конечной системе линейных уравнений N порядка, быстро сходящейся и обладающей квазидиагональной матрицей:

$$\sum_{m=1}^N r_{mn} q_n = \delta_0/h; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$r_{mn} = I(x_m - \xi_n) + c_1(\operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1)); \quad m \neq n,$$

$$d_0 = d_{22} \operatorname{sign}(x_m - \xi_n)/h \quad (4.3)$$

$$z_1 = \sqrt{(x_m - \xi_n)R}, \quad z_2 = \sqrt{(x_{m+1} - \xi_n)R}$$

$$r_{nn} = I_1(x_n - \xi_n) + 2d_{22} \operatorname{erf}(\sqrt{hR}/2)/h,$$

где $\operatorname{erf}(z)$ – интеграл вероятности [24].

Элементы матрицы системы (4.3) имеют максимальное значение на главной диагонали и быстро убывают по мере удаления от нее. Интеграл $I(x_m - \xi_n)$ вычисляется по контуру γ в комплексной плоскости, который выбирается в соответствии с условиями излучения, так, чтобы перемещения поверхности гетерогенного слоя убывали при удалении от вибрирующего штампа. Этот выбор производится после нахождения по-

люсов подынтегральных функций в (3.5) и их анализа при стремлении внутреннего трения среды к нулю [2]. Отметим, что для анализа скорости сходимости процесса оценивались элементы невязки для количества разбиений N и $3N$. Измельчение сетки производилось до относительного значения невязки, меньшего чем 10^{-4} . Горизонтальные смещения под штампом определялись через контактные давления следующим образом:

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N q_n \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \int_{\gamma} (\mu G_{11}(\alpha) + G_{12}(\alpha)) e^{i\alpha(x-\xi)} d\alpha d\xi \quad (4.4)$$

Заметим, что при построении численного алгоритма в соотношениях (3.2)–(3.4) для функций $\text{sh } s_i h$, $\text{ch } s_i h$; $i = 1, 2, 3$, необходимо выносить растущие при больших аргументах экспоненты за рамки вычислительного процесса.

5. Результаты численного анализа. На примере гетерогенного слоя моделировалось покрытие из композиционного материала с матрицей на основе ароматического полиамида фенилона, модифицированного наноразмерной добавкой (алюмо-магнелиевая шпинель) и наполнителем в виде цилиндрического масла [21]. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона композита определены экспериментально, в том числе, с помощью наноиндентирования [21]. Изменение этих модулей при различной пористости, а также модуля объемного сжатия дренированной среды получены с помощью конечно-элементного моделирования [22] и на основе дифференциальной схемы метода самосогласования. Коэффициенты уравнений (2.1) по известным модулям объемного сжатия вязкоупругой матрицы K_s , пористой среды с незаполненными порами K_b , флюида K_f , пористости m вычислялись по формулам, приведенным в [16, 18]. Численный анализ проводился при следующих данных: $K_s = 5.2$ ГПа, $K_f = 2$ ГПа, $N = 1.85$ ГПа, $\rho_s = 1.2 \times 10^3$ кг/м³, $\rho_f = 0.93 \times 10^3$ кг/м³, $K_b(m = 5\%) = 4.38$ ГПа, $K_b(m = 10\%) = 3.58$ ГПа, $K_b(m = 15\%) = 2.78$ ГПа, $K_b(m = 20\%) = 2.21$ ГПа.

Вязкость матрицы композита учитывалась в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения, поскольку фенилон отличается малой склонностью к ползучести под действием напряжений [25], а использование нанодобавок с целью модификации матрицы композита позволяет подавлять релаксационные процессы [25]. Согласно такому подходу модуль сдвига имеет вид $N(1 + i\gamma_0)$, где величина γ_0 пропорциональна тангенсу угла механических потерь вязкоупругого материала [26–29]. Вследствие этой зависимости присутствует малая комплексная составляющая в коэффициентах уравнения (2.1) N, A, Q, R [18, 27], $10^{-3} < \gamma_0 < 0.5 \times 10^{-1}$. Диапазон изменения параметра γ_0 был оценен на основании анализа влияния различных наноразмерных добавок на величину внутреннего трения композиционного материала с матрицей из фенилона [27]. Отметим, что на скорость сходимости процесса решения системы уравнений в соотношениях (4.3) параметр γ_0 влияние не оказывает, а изменение контактных давлений для приведенного диапазона изменения γ_0 при этом не превышает 2%. Коэффициент проницаемости гетерогенной среды изменялся в диапазоне $10^{-14} < k_o < 10^{-10}$ м² [30], а извилистость поровых каналов соответствовала случаю частиц сферической формы [31].

В рамках численного эксперимента исследовались нормальные и касательные контактные напряжения при вибрации на верхней границе слоя штампа с плоским основанием при заданной единичной осадке. На основании проведенных исследований установлен ряд общих закономерностей поведения контактных напряжений при учете трения в области контакта, как для гетерогенного полупространства, приведенные в работах [7–9], так и для слоя. При возрастании коэффициента трения значительно

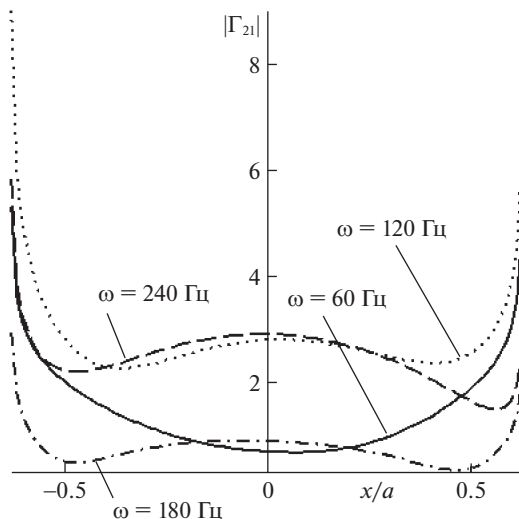


Рис. 2. Влияние частоты колебаний штампа на распределение модуля касательных контактных напряжений.

увеличивается несимметричность распределения напряжений под штампом, появляется выраженный экстремум. Зависимость нормальных и касательных контактных напряжений от пористости гетерогенного основания [7, 8], проницаемости композита, вязкости жидкой фракции, определяющей степень межфазной адгезии и взаимодействия фаз [9], носит нелинейный характер. Модули контактных напряжений уменьшаются при увеличении пористости и насыщенности флюидом [7, 8].

Наибольшее отличие от гетерогенного полупространства имеют зависимости контактных напряжений от частоты колебаний штампа, от толщины слоя. Рис. 2 иллюстрирует распределение под штампом модуля касательных контактных напряжений Γ_{21} при разных частотах колебаний $\omega = 60$ Гц, $\omega = 120$ Гц, $\omega = 180$ Гц, $\omega = 240$ Гц, $\eta/k_o = 0.3 \times 10^9$, $m = 0.2$, $\mu = 0.3$, $h/a = 1$. При увеличении частоты не наблюдается монотонное изменение контактных напряжений, имеется диапазон частот, где контактные напряжения имеют максимальное значение, этот диапазон зависит от всех параметров задачи.

Среднее за период изменение количества энергии источника колебаний, отдаваемое в среду через область контакта, следуя [4], определяется соотношением:

$$E = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 (\mathbf{u}, \mathbf{q}) dx,$$

где $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ — скалярное произведение векторов, с учетом соотношений (2.2), (3.1). На основании численного анализа контактных напряжений и горизонтальных перемещений можно оценить энергетическое воздействие за период колебаний, от которого, в том числе, зависит износостойкость композиционного материала, при этом изменение амплитуды силы трения за период колебаний играет ключевую роль. Эту закономерность иллюстрирует рис. 3, где показаны изменение нормальных контактных напряжений Γ_{22} за период колебаний T для двух значений частоты колебаний штампа $\omega = 60$ Гц (слева) и $\omega = 120$ (справа). Сплошная линия соответствует $t = 0$, пунктирная $t = T/4$, штриховая $t = T/2$, штрих-пунктирная $t = 3T/4$. Диапазон изменения нормальных контактных напряжений пропорционален энергетическому воздействию при колебаниях штампа, имеет максимальное значение при $\omega = 100$ – 180 Гц для

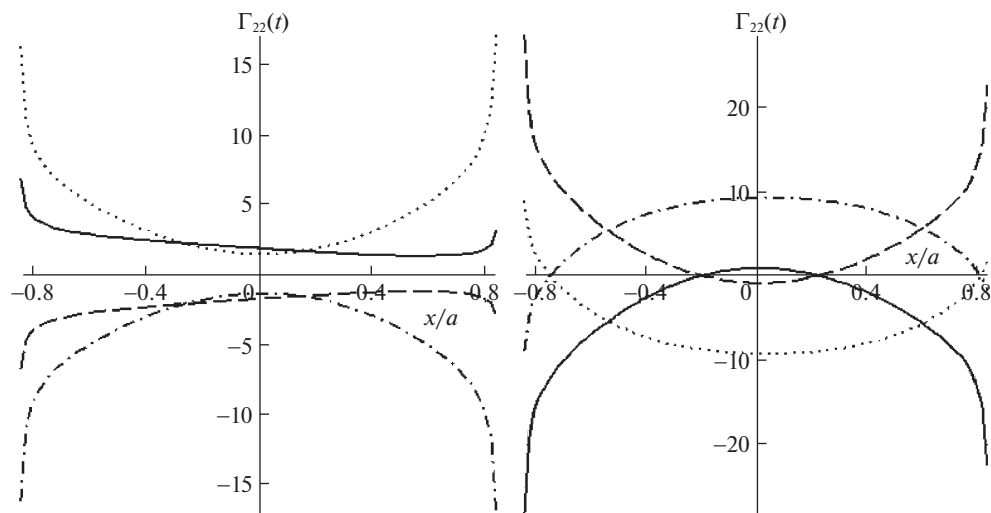


Рис. 3. Изменение нормальных контактных напряжений за период колебаний T .

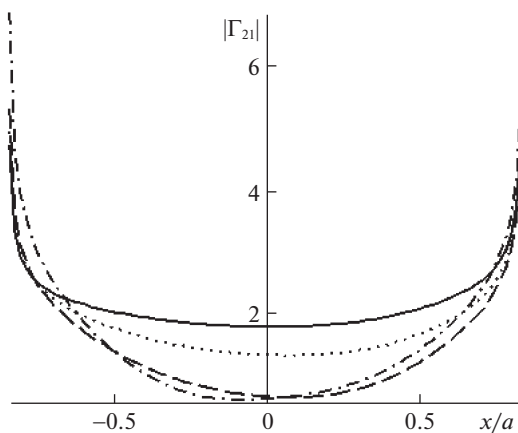


Рис. 4. Влияние толщины слоя на распределение модуля касательных напряжений под штампом.

данной гетерогенной среды. При этом необходимо учитывать не только нормальные, но и горизонтальные перемещения в области контакта.

Если количество поверхностных волн остается неизменным, контактные давления меняются монотонно, прослеживается нелинейная зависимость их от толщины слоя. В случае двух распространяющихся поверхностных мод распределение касательных напряжений по области контакта при возрастании толщины слоя иллюстрирует рис. 4, где сплошная линия соответствует $h/a = 0.5$, пунктирная — $h/a = 0.75$, штриховая — $h/a = 1.0$, штрих-пунктирная — $h/a = 1.25$, $\omega = 60$ Гц. Зависимость контактных напряжений от частоты колебаний, толщины покрытия, пористости, вязкости флюида в порках нелинейная.

Заключение. Построено аналитико-численное решение динамической контактной задачи для гетерогенного слоя в рамках модели Био при учете сил трения в области контакта. На основании проведенного численного анализа контактных напряжений показана необходимость учета не только механических характеристик гетерогенной

среды, ее пористости, флюидонасыщенности среды, степени взаимодействия фаз, но и частоты колебаний и толщины слоя. Дана оценка энергетического воздействия в контактной области за период колебаний, которое играет ключевую роль в износостойкости конструированного гетерогенного композиционного материала. Проведенные исследования позволяют найти оптимальное соотношение механических свойств композитного материала, работающего в условиях динамического нагружения, управлять трибологическим процессом с помощью подбора толщины слоя и состава композита.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20-08-00614-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
5. *R. He, L. Wang, H. Y. Yu* Time harmonic point load and dynamic contact problem of contacting fluid and poroelastic half-spaces // Soil Dyn. & Earthq. Engng. 2012. V. 36. P. 20–31.
6. *Ватulyan A.O.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
7. *Колесников В.И., Беляк О.А., Колесников И.В. и др.* О математической модели для прогнозирования трибологических свойств маслonaполненных композитов при вибрации // Докл. РАН. 2020. Т. 491. С. 44–47.
8. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // Mater. Phys. & Mech. 2020. V. 46. № 1. P. 139–148.
9. *Беляк О.А., Суворова Т.В.* О влиянии взаимодействия фаз гетерогенного основания на контактные напряжения при колебаниях штампа с трением // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотр. 2020. Т. 17. № 3. С. 29–36.
10. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
11. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
12. *Chen W., Wang Q., Huan Z. et al.* Semi analytical viscoelastic contact modeling of polymer based materials // J. Tribology. 2011. V. 133. № 4. P. 041404.
13. *Liu M., Huang H.* Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement // Int. J. Solids & Struct. 2019. V. 165. P. 34–49.
14. *Суворова Т.В., Беляк О.А.* Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 529–539.
15. *Беляк О.А., Суворова Т.В.* Влияние микроструктуры основания на силы трения при движении плоского штампа // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотр. 2018. № 3. С. 25–31.
16. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Сб. пер. иностр. статей. 1963. Вып. 6. № 82. С. 103–134.
17. *Ковтун А.А.* Об уравнениях Био и их модификациях // Уч. зап. СПбГУ. 2011. Вып. 44. № 444. С. 3–26.
18. *Degrade G., Roeck G. De, Breck P. Van Den et al.* Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // Int. J. Solids & Struct. 1998. V. 35 (34–35). P. 4753–4778.
19. *Долгополов К.Н., Колесников И.В., Мельников Э.Л.* Применение антифрикционных полимерных самосмазывающихся материалов класса “Масляниты” в узлах трения скольжения // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2018. № 4. С. 23–26.
20. *Sytar V.I., Kuzayev I.M., Sukhyu K.M. et al.* Influence of the nature and concentration of porogens on the structure and properties of phenylone // Voprosy khimii i khimicheskoi tekhnologii. 2019. № 6. P. 213–220.
21. *Иваночкин П.Г., Суворова Т.В., Данильченко С.А. и др.* Комплексное исследование полимерных композитов с матрицей на основе фенилона С-2 // Вестн. РГУПС. 2018. В. 4. С. 18–25.

22. Belyak O.A., Suvorova T.V. Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two phase microstructure // *Solid State Phenom.* 2020. V. 299. P. 124–129.
23. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
24. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
25. Абакумова Н.М., Гудимов М.М., Финогенов Г.Н. и др. Физико-механические свойства ароматических полиамидов марки фенилон // *Пластич. массы.* 1973. № 9. С. 30–32.
26. Афашагова З.Х., Буря А.И., Козлов Г.В. и др. Структура и свойства дисперсно-наполненных нанокмпозитов фенилон/аэросил // *Механика композ. матер.* 2007. Т. 13. № 4. С. 479–492.
27. Иваночкин П.Г., Беляк О.А. Влияние наноразмерных наполнителей на вязкоупругие свойства композиционных материалов с матрицей на основе фенилона // *Новые матер. и технol. в машиностр.* 2020. № 32. С. 25–29.
28. Guyer R.A., Kim H. Alicia, Derome D. et al. Hysteresis in modeling of poroelastic systems: Quasi-static equilibrium // *Phys. Rev. E.* 2011. № 83. P. 061408.
29. Chandra R., Singh S.P., Gupta K. A study of damping in fiber-reinforced composites // *J. Sound&Vibr.* 2003. V. 262. № 3. P. 475–496.
30. Chevillotte F., Jaouen L., Bécot F. On the modeling of visco-thermal dissipations in heterogeneous porous media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 138. № 6. P. 3922–3929.
31. Wu A., Yang B., Xi Y. et al. Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing // *J. Central South Univ. Technol.* 2007. V. 14. № 2. P. 220–224.

Vibrations of a Punch on the Surface of a Heterogeneous Layer with Account of Friction in the Contact Area

O. A. Belyak^{a,#} and T. V. Suvorova^{a,##}

^a Rostov State Transport University, Rostov on Don, Russia

[#]e-mail: o_bels@mail.ru

^{##}e-mail: suvorova_tv111@mail.ru

The contact problem of vibrations of a punch with a flat base on the surface of a heterogeneous layer is considered, taking into account the friction forces in the contact area. The microstructure of a porous-elastic layer saturated with a fluid is described by the Biot–Frenkel equations; in the contact area, the Coulomb–Amonton law of friction is fulfilled. The boundary value problem is reduced to a difference integral equation of the first kind for contact pressures. An approximate solution of the integral equation is constructed using the boundary element method. The influence of vibration frequency, layer thickness on contact stresses was investigated on the example of an oil-containing composite based on phenylene, the mechanical moduli of which were determined using micromechanical methods.

Keywords: dynamic contact problem, heterogeneous layer, contact area with friction

REFERENCES

1. Babeshko V.A. Generalized Method of Factorization in Spatial Dynamic Mixed Problems of Theory of Elasticity. (Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskikh smeshannyh zadachah teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1984. 256 p. (in Russian)
2. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains. (Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej) Moscow: Nauka, 1979. 319 p. (in Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements in contact problems with a variable friction coefficient // *Dokl. Phys.*, 2018 vol. 63, no. 6, pp. 239–243.
4. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F. Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. (Dinamika neodnorodnyh linejno-uprugih sred). Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)
5. He R., Wang L., Yu H. Y. Time harmonic point load and dynamic contact problem of contacting fluid and poroelastic half-spaces // *Soil Dyn.&Earthq. Engng.*, 2012, vol. 36, pp. 20–31.
6. Vatulyan A.O. Coefficient Inverse Problems of Mechanics. (Koefficientnye obratnye zadachi mekhaniki) Moscow: Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian)

7. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A., Kolesnikov I.V., Suvorova T.V.* A mathematical model for prediction of the tribological properties of oil-filled composites under vibration // *Dokl. Phys.*, 2020, vol. 65, no. 4, pp. 149–152.
8. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // *Mater. Phys.&Mech.*, 2020, vol. 46, no. 1, pp. 139–148.
9. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Effect of interaction of heterogeneous base phases on contact stresses at punch oscillations with friction // *Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 29–36. (in Russian)
10. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
11. *Goryacheva I.G., Dobyichin M.N.* Contact Problems in Tribology (Kontaktnye zadachi v tribologii) Moscow: Mashinostroenie, 1988. 253 p. (in Russian)
12. *W. Chen, Q. Wang, Z. Huan et al.* Semi analytical viscoelastic contact modeling of polymer based materials // *J. Tribology*, 2011, vol. 133, no. 4, pp. 041404.
13. *Suvorova T.V., Belyak O.A.* Contact problems for a porous composite in the presence of friction forces // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 329–336.
14. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Influence of the microstructure of the base on the friction forces during the movement of the flat stamp // *Ecol. Bull. BSEC Sci. Centers*, 2018, no. 3, pp. 25–31. (in Russian)
15. *Liu M., Huang H.* Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement // *Int. J. Solids&Struct.*, 2019, vol. 165, pp. 34–49.
16. *Bio M.A.* Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium // *Coll. Transl. Foreign. Articles*. 1963, no. 82, iss. 6, pp. 103–134.
17. *Kovtun A.A.* On the equations Bio and their modifications // *Proc. St. Petersburg State Univ.*, 2011, no. 444, Iss. 44, pp. 3–26.
18. *Degrade G., Roeck G.D., Breck P. et al.* Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media // *Int. J. Solids&Struct.*, 1998, vol. 35 (34–35), pp. 4753–4778.
19. *Dolgoplov K.N., Kolesnikov I.V., Melnikov E.L.* Application of self-lubricating antifriction polymer materials of “oily” material (“maslyanit”) class in sliding friction units // *Repair. Recovery. Modernization*, 2018, no. 4, pp. 23–26.
20. *Sytar V.I., Kuzyayev I.M., Sukhyy K.M. et al.* Influence of the nature and concentration of porogens on the structure and properties of phenylone // *Voprosy khimii i khimicheskoi tekhnologii*, 2019, no. 6, pp. 213–220.
21. *Ivanochkin P.G., Suvorova T.V., Danilchenko S.A. et al.* Complex research of polymer composites with a matrix on the basis of phenilon C-2 // *Vestn. RGUPS*, 2018, no. 4, pp. 18–25.
22. *Belyak O.A., Suvorova T.V.* Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two phase microstructure // *Solid State Phenom.*, 2020, vol. 299, pp. 124–129.
23. *Brichkov Y.A., Prudnikov A.P.* Integral Transforms of Generalized Functions. Moscow: Nauka, 1977. 288 p. (in Russian)
24. *Bateman G, Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y.: McGraw-Hill, 1953. 296 p.
25. *Abakumova N.M., Gudimov M.M., Finogenov G.N. et al.* Physico-mechanical properties of aromatic polyamides phenylilone brand // *Int. Polymer Sci.&Technol.*, 1973, no. 9, pp. 30–32. (in Russian)
26. *Afashagova Z.H., Burya A.I., Kozlov G.V., et al.* Structure and properties of dispersed-filled phenilon/aerosil nanocomposites // *J. Compos. Mech.&Design*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 479–492. (in Russian)
27. *Ivanochkin P.G., Belyak O.A.* Influence of nanosized fillers on the viscoelastic properties of composite materials with a matrix based on phenylone // *New Mater.&Technol. in Mech. Engng.*, 2020, no. 32, pp. 25–29. (in Russian)
28. *Guyer R.A., Kim H. Alicia, Derome D. et al.* Hysteresis in modeling of poroelastic systems: Quasi-static equilibrium // *Phys. Rev. E.*, 2011, no. 83, pp. 061408.
29. *Chandra R., Singh S.P., Gupta K.* A study of damping in fiber-reinforced composites // *J. Sound&Vibr.*, 2003, vol. 262, no. 3, pp. 475–496.
30. *Chevillotte F., Jaouen L., Bécot F.* On the modeling of visco-thermal dissipations in heterogeneous porous media // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2015, vol. 138, no. 6, pp. 3922–3929.
31. *Wu A., Yang B., Xi Y. et al.* Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing // *J. Central South Univ. Technol.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 220–224.