ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 4, с. 469–493

УДК 531.36:62-50

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. С. Андреев[1,*], О. А. Перегудова[1,]**

[1] Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
** e-mail: asa5208@mail.ru*
*** e-mail: peregudovaoa@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.02.2021 г.
После доработки 08.03.2021 г.
Принята к публикации 19.03.2021 г.

В работе рассмотрена задача об устойчивости неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с бесконечным запаздыванием. Проведено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании предельного поведения ограниченного решения, асимптотической устойчивости нулевого решения по всем и части переменных в предположении существования соответствующего функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. Решены задачи о предельных свойствах движения механической системы с линейной эредитарностью, о стабилизации установившихся движений манипулятора с вязкоупругими цилиндрическим и сферическим шарнирами. Решена задача управления пятизвенным манипулятором с учетом вязкоупругости его шарниров.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, устойчивость, функционал Ляпунова, механическая система с вязкоупругими элементами, манипулятор, управление

DOI: 10.31857/S0032823521040020

1. Введение. Интенсивное развитие науки и техники стимулировало в начале 50-х годов резкое усиление интереса к теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Принято считать, что основу этой теории составили опубликованные ранее работы В. Вольтерра [1, 2], в которых было предложено учитывать влияние непрерывной последовательности предшествующих состояний системы или процесса на их дальнейшее изменение посредством интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Развитию теории в значительной степени способствовал прогресс математического и функционального анализа, других областей математики. Значимой в этом развитии явилась монография [3], в которой предложено использовать для анализа системы функциональное пространство, как более наглядное и удобное в исследовании соответствующих задач.

Вначале преимущественное развитие получила теория функционально-дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Теория таких уравнений с неограниченным запаздыванием лишь постепенно оформилась как ветвь современного математического анализа со своими специфическими проблемами и приложениями [4, 5]. Усилия многих исследователей в этой области были направлены на разработку основ общей теории, начиная с проблемы определения фазового пространства и правой части уравнения с неограниченным запаздыванием, решением соответствующей проблемы существования, единственности, непрерывной зависимости и продолжимости решений. Из многочисленных исследований по этой проблеме можно выделить работы [6–18]. В работах [9–15, 17, 18] дано аксиоматическое построение фазовых пространств, позволяющее решать указанную проблему для любых конкретных фазовых пространств и правых частей уравнений, удовлетворяющих введенным аксиомам. Как указано в [16], некоторые из этих аксиом являются трудно проверяемыми. Предложены иные условия решения проблемы в рамках функционального пространства ограниченных непрерывных функций.

Многочисленные приложения стимулировали интенсивные исследования проблемы устойчивости как для линейных, так и для нелинейных уравнений с неограниченным запаздыванием. Выделим основные на наш взгляд известные результаты, относящиеся к изучению устойчивости прямым методом Ляпунова в направлении данной работы.

Важным элементом определения устойчивости или оценки решения является выбор между нормами исходного банахова пространства (евклидовой нормы в случае конечномерного пространства) и нормой функционального пространства. Не всегда из свойства устойчивости в евклидовом пространстве следует аналогичное свойство в функциональном пространстве [4, 5]. Указанное выше аксиоматическое описание фазовых пространств позволило определить связь между определениями устойчивости в нормах конечномерного и фазового пространства [9, 10, 12, 13].

Как и в случае функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием [19–26], развитие прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости уравнений с неограниченным запаздыванием делится в основном на два направления: на основе функционалов и функций Ляпунова.

Для развития метода функционалов Ляпунова по отношению к соответствующей теории вводится знакоопределенность и свойство бесконечно малого высшего предела с использованием оценок как через норму как конечномерного пространства, так и через норму функционального пространства [4, 5].

В работах [27, 28] доказываются теоремы об асимптотической устойчивости, обобщающие теоремы типа Матросова, Руша, Красовского. В [14, 28] доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости и их обращении типа Красовского и Йошизавы. В [29] получены теоремы о предельном поведении и асимптотической устойчивости, развивающие предыдущие результаты автора этой работы. В [30, 31] доказаны теоремы об устойчивости на основе оценок сравнительного анализа для функционалов Ляпунова.

Динамическое свойство инвариантности положительного предельного множества ограниченного решения автономного уравнения [7, 9] позволило обобщить для такого уравнения теоремы типа Ла-Салля и Красовского о притяжении решений и асимптотической устойчивости [7].

В работе Вольтерра [1, 2] исследовались непосредственно интегро-дифференциальные уравнения. Качественные свойства этих уравнений по отношению к свойствам общих систем уравнений с запаздыванием имеют целый ряд особенностей, позволяющих построить их более глубокую качественную теорию [4, 5, 32–38], решить важные прикладные задачи [19, 39–42].

Интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра разделяют на уравнения с конечным, неограниченным и бесконечным запаздыванием. Сам В. Вольтерра ограничивался, в основном, изучением уравнений первого типа. Качественные свойства решений, включая устойчивость, достаточно эффективно используются, если в качестве фазового пространства решений рассматривать исходное конечномерное пространство [34, 35, 38, 43–47]. При этом достигается решение важных прикладных задач [48–51].

Исследования уравнений третьего типа сопровождаются построением соответствующего фазового функционального пространства, как правило, с использованием методов общей теории уравнений с неограниченным запаздыванием [4, 5].

В первых двух разделах данной работы в рамках подхода [32, 33] для неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием выводятся качественные свойства решений, позволяющие решить задачи о локализации положительного предельного множества ограниченного решения, об асимптотической устойчивости нулевого решения на основе существования функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную.

Работы В.В. Румянцева [52, 53] явились основой для теории устойчивости по части переменных, имеющей многочисленные практические применения [54, 55]. Результаты исследований устойчивости относительно части переменных для функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием с решением задач механики представлены в работах [24, 26, 55]. Проблема устойчивости по части переменных для функционально-дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием является малоизученной и весьма перспективной в решении прикладных задач. Некоторые результаты в этом направлении получены в разделе 4.

Классические результаты по устойчивости и стабилизации положений равновесия и стационарных движений механических систем [56–61] получают широкое применение в управлении робототехническими системами. В разделе 5 данной работы изучается задача о влиянии наследственных свойств механической системы на устойчивость ее положений равновесия. В разделе 6 исследована задача о стабилизации установившихся движений манипуляторов с вязкоупругими цилиндрическими и сферическими шарнирами. В разделе 7 в качестве примера представлена модель управления пятизвенного манипулятора с вязкоупругими цилиндрическими и призматическим шарнирами.

2. Предварительные построения. Пусть R^p – линейное действительное пространство p-векторов x с некоторой нормой $\|x\|$, R – действительная ось, C_∞ – счетно-нормированное пространство всех непрерывных функций $\varphi : R^- \to R^p$ с полунормами

$$\|\varphi\|_l = \max(\|\varphi(s)\|, -l \le s \le 0), \quad l = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\beta = \text{const}$. Для непрерывной функции $x : (-\infty, \beta) \to R^p$ и каждого $t < \beta$ функцию $x_t \in C_\infty$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in R^-$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f\Big(t, x(t), \quad \int_{-\infty}^{t} g(t, s, x(s))ds\Big), \tag{2.1}$$

где $f : R \times R^p \times R^p \to R^p$ и $g : S \times R^p \to R^p$, есть некоторые непрерывные функции, $S = \{(t, s) : R \in R, s \le t\}$.

Решением уравнения (2.1), удовлетворяющим условию $x_\alpha = \varphi$, $(\alpha, \varphi) \in R \times C_\infty$, называется функция $x = x(t)$, $t \in (-\infty, \beta)$, $(\beta > \alpha)$, такая, что $x_\alpha(s) = \varphi(s)$, обращающая это уравнение в тождество при всех $t \in [\alpha, \beta)$.

Предположим, что функции f и g удовлетворяют условиям

$$\|f(t, x, g)\| \le m_1(H_1, H_2) \quad \forall (t, x, g) \in R \times D_1 \times D_2$$
$$D_j = D_j(H_j) = \{x \in R^p : \|x\| \le H_j\}, \quad j = 1, 2$$

$$\left\|f(t_2, x^{(2)}, g^{(2)}) - f(t_1, x^{(1)}, g^{(1)})\right\| \le L_1 |t_2 - t_1| + L_2 \left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\| + L_3 \left\|g^{(2)} - g^{(1)}\right\| \tag{2.2}$$

$$L_j = L_j(H_1, H_2), \quad j = 1,2,3$$

$$\forall (t_1, x^{(1)}, g^{(1)}), \quad (t_2, x^{(2)}, g^{(2)}) \in R \times D_1 \times D_2$$

$$\|g(t, s, x)\| \le m_2(H_1) \quad \forall (t, s, x) \in S \times D_1$$

$$\left\|g(t_2, s_2, x^{(2)}) - g(t_1, s_1, x^{(1)})\right\| \le L_4 |t_2 - t_1| + L_5 \|s_2 - s_1\| + L_6 \left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\| \tag{2.3}$$

$$L_j = L_j(H_1), \quad j = 4,5,6 \quad \forall (t_1, s_1, x^{(1)}), (t_2, s_2, x^{(2)}) \in S \times D_1$$

Кроме того, предположим, что

$$\begin{gathered} \|g(t, s, x)\| \le m_3(s - t, H_1) \quad \forall (t, s, x) \in S \times D_1(H_1) \\ \int_{-\infty}^{0} m_3(\nu, H_1) d\nu \le m_{30}(H_1) \end{gathered} \tag{2.4}$$

В пространстве C_∞ введем метрику

$$\rho(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{\left\|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\right\|_l}{1 + \left\|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\right\|_l} \tag{2.5}$$

Согласно [20, 32, 33] имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4) (в том числе, при $L_1 = L_4 = L_5 = 0$). Тогда для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in R \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi(s)\| \le H\}$ существует единственное решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $x_\alpha = \varphi$, определенное при $t \in (-\infty, \beta)$, $\beta > \alpha$, непрерывно зависящее от $(\alpha, \varphi) \in R \times C_\infty$.

Введем пространства B_f и B_g непрерывных функций $f : R \times R^p \times R^p \to R^p$ и $g : S \times R^p \to R^p$ соответственно, удовлетворяющих условиям (2.2)–(2.4). Определим сходимость в B_f и B_g согласно открыто-компактной топологии [62].

Аналогично построениям из [44, 45] уравнению (2.1) можно сопоставить семейство предельных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x(t), \quad \int_{-\infty}^{t} g^*(t, s, x(s)) ds), \quad (f^*, g^*) \in B_f \times B_g \tag{2.6}$$

Определение 2.1. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное при всех $t \in R$, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| \le H \ \forall t \in R$. Функция $\varphi^* \in C_\infty$ называется предельной для этого решения, если $\exists t_n \to \infty$, такая, что соответствующая последовательность

$$x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) = x(t_n + s, \alpha, \varphi)$$

сходится к φ^* в C_∞ при $n \to \infty$, или $\rho(x_t^{(n)}(\alpha, \varphi), \varphi^*) \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ всех таких функций образует в C_∞ положительное предельное множество данного решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$. Покажем, что это множество имеет следующее свойство квазиинвариантности.

Теорема 2.2. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное при всех $t \in R$, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| \le H_1 \ \forall t \in R$. Тогда множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ непусто, компактно, связно и квазиинвариантно.

Доказательство. Как и в [44], из условий (2.2) и (2.4) можно найти, что каждое ограниченное решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ равномерно непрерывно по $t \geq \alpha$

$$|x(t_2,\alpha,\varphi) - x(t_1,\alpha,\varphi)| \leq m_1(H_1, m_{30}(H_1)) \quad \forall t_1, t_2 \geq \alpha \tag{2.7}$$

Покажем, что множество $\Omega^+(\alpha,\varphi)$ решения $x = x(t,\alpha,\varphi)$ является непустым.

Пусть $t_n \to \infty$ – произвольная последовательность. Для последовательности функций $x^{(n)}(t) = x(t_n + t,\alpha,\varphi)$ при всех $t_1, t_2 \in [\alpha - t_n, 0]$ имеет место оценка (2.7). Отсюда выводим существование подпоследовательности $\{t_n^{(k)}\} \subset \{t_n\}$ и функции $\varphi^* \in C_\infty$, таких, что $\{x^{(k)}(t)\}$ сходится к $x = \varphi^*(t)$ равномерно по $t \in [-T, 0]$ при каждом $T > 0$. И, значит, $\rho(x_t^{(k)}, \varphi^*) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, $\Omega^+(\alpha,\varphi)$ непусто.

Стандартным подходом, как и для функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием [24, 26], можно показать, что $\Omega^+(\alpha,\varphi)$ связно, а именно, это множество нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств, и оно компактно. Очевидно, что оно является компактным.

Покажем, что множество $\Omega^+(\alpha,\varphi)$ является квазиинвариантным, а именно, для любой функции $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha,\varphi)$ существуют предельное уравнение (2.6) и его решение $x = x(t,0,\varphi^*)$ такие, что $x_t(\alpha,\varphi^*) \in \Omega^+(\alpha,\varphi)$ для всех $t \in R$.

Без ограничения общности, можем принять, что для последовательности $t_n \to \infty$ имеем

$$f^{(n)}(t,x) = f(t_n + t, x) \to f^*(t,x), \quad f^* \in B_f$$
$$g^{(n)}(t,x) = g(t_n + t, x) \to g^*(t,x), \quad g^* \in B_g$$

Из того, что $x = x(t) = x(t,\alpha,\varphi)$ есть решение уравнения (2.1), последовательно имеем

$$x(t) = x(\alpha) + \int_\alpha^t f(\tau, x(\tau), \int_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,s,x(s))ds + \int_\alpha^\tau g(\tau,s,x(s))ds)d\tau$$

для всех $t \geq \alpha$,

$$x(t_n + t) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+t} f(\tau, x(\tau), + \int_{-\infty}^{0} g(\tau,\alpha+s,x(\alpha+s))ds + \int_\alpha^\tau g(\tau,s,x(s))ds)d\tau$$
$$x^{(n)}(t) = x^{(n)}(0) + \int_0^t f^{(n)}(\tau, x^{(n)}(\tau), \int_{-\infty}^{0} g(t_n+\tau,\alpha+s,\varphi(s))ds + \int_{\alpha-t_n}^{\tau} g^{(n)}(\tau,s,x^{(n)}(s))ds)d\tau \tag{2.8}$$

для всех $t \in [\alpha - t_n, +\infty)$.

Согласно условию (2.4) имеем следующие оценки

$$\left\|\int_{-\infty}^{0} g(t_n+\tau,\alpha+s,\varphi(s))ds\right\| \leq \int_{-\infty}^{0} m_3(s+\alpha-t_n-\tau, H_1)ds = \int_{-\infty}^{-t_n+\alpha-\tau} m_3(\nu, H_1)d\nu \to 0 \tag{2.9}$$

при $n \to \infty$.

$$\left\|\int_{t_0-t_n}^{\tau} g^{(n)}(\tau,s,x^{(n)}(s))ds\right\| \leq \int_{-\infty}^{0} m_3(\nu,H_1)d\nu \leq m_{30}(H_1) \tag{2.10}$$

Отсюда, переходя в равенстве (2.8) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$x^*(t) = x^*(0) + \int_0^t f^*(\tau, x^*(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\tau} g^*(\tau, s, x^*(s))ds)d\tau \tag{2.11}$$

при всех $t \in R$, при этом по построению $x_0^*(s) = \varphi^*(s)$, $s \in R^-$.

Дифференцируя равенство (2.11) по $t \in R$, имеем требуемое доказательство.

3. Принцип квазиинвариантности. Введем следующие пространства скалярных функций:

1) пространство B_V^1 функций $V_1 \in C^1(R \times R^p \times R \to R)$;

2) B_V^{11} – подпространство B_V^1 функций $V_1(t, x, v)$, удовлетворяющих условиям вида (2.2);

3) пространство B_v^2 функций $V_2 \in C^1(S \times R^p \to R)$, удовлетворяющих условиям вида (2.3), имеющих производную $\partial V_2(t, s, x)/\partial t \in C(S \times R^p \to R)$, при этом

$$\begin{gathered}|V_2(t, s, x)| \le v(s - t, H_1), \quad \left|\frac{\partial V_2}{\partial t}(t, s, x)\right| \le v(s - t, H_1) \\ \forall (t, s, x) \in S \times \{x \in R^p : \|x\| \le H_1\} \\ \int_{-\infty}^{0} v(\nu, H_1)d\nu \le v_0(H_1) < \infty\end{gathered} \tag{3.1}$$

4) пространство B_W^1 функций $W_1 \in C(R \times R^p \times R \to R^+)$, удовлетворяющих условиям вида (2.2);

5) пространство B_w^2 функций $W_2 \in C(S \times R^p \to R)$, удовлетворяющих условиям вида (2.4) и (2.6).

Для функционала $V = V(t, \varphi)$, определяемого равенством

$$V(t, \varphi) = V_1(t, \varphi(0), v_2(t, \varphi)), \quad v_2(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{0} V_2(t, t + s, \varphi(s))ds, \quad \varphi \in C_\infty \tag{3.2}$$

вдоль заданного решения $x = x(t) = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_\infty$ при $t \in [\alpha, \beta)$, $(\beta > \alpha)$ можно определить функцию

$$V(t) = V(t, x_t) = V_1(t, x(t, \alpha, \varphi), v_2(t, x_t(\alpha, \varphi))); \quad v_2(t, x_t) = \int_{-\infty}^{t} V_2(t, s, x(s, \alpha, \varphi))ds \tag{3.3}$$

и ее производную

$$\begin{gathered}\dot V(t) = \dot V(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \\ = \left(\frac{\partial V_1\ (t, x(t), v_2)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1(t, x(t), v_2)}{\partial x}\right)' f(t, x(t), y)\right|_{y\ =\ \int_{-\infty}^{t} g(t, \tau, x(\tau))d\tau} + \\ + \left(\frac{\partial V_1(t, x(t), v_2)}{\partial v}\right)\left(V_2(t, t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial V_2(t, \tau, x(t))}{\partial t} d\tau\right)\Bigg)\Bigg|_{v_2\ =\ \int_{-\infty}^{t} V_2(t, \tau, x(\tau))d\tau},\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $(\cdot)'$ – операция транспонирования.

Введем соответствующий функционал $\dot{V}(t,\varphi)$, называемый в дальнейшем производной от V, и предположим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ для некоторых $W_1 \in B_W^1$ и $W_2 \in B_W^2$ удовлетворяет следующему неравенству

$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W_1\left(t,\varphi(0),\int\limits_{-\infty}^{t} W_2(t,t+s,\varphi(s))ds\right) \le 0 \tag{3.5}$$

Пусть $V_1 \in B_V^{11}$, $V_2 \in B_v^2$, $W_1 \in B_W^1$, $W_2 \in B_W^2$. Аналогично определению (f^*, g^*) могут быть определены семейства соответствующих предельных функций $\{V_1^*\}$, $\{V_2^*\}$, $\{W_1^*\}$, $\{W_2^*\}$. Может быть введена предельная совокупность $(f^*,g^*,V_1^*,V_2^*,W_1^*,W_2^*)$, задаваемая единой для предельных функций последовательностью $t_n \to \infty$.

Имеет место следующая теорема типа принципа квазиинвариантности.

Теорема 3.1. Предположим, что:

1) может быть найден функционал $V = V(t,\varphi)$, производная которого $\dot{V}(t,\varphi)$ удовлетворяет неравенству (3.5);

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (2.1) ограничено при всех $t \in R$, $\|x(t,\alpha,\varphi)\| \le H_1$ $\forall t \in R$.

Тогда при некотором $c = c_0 \ge m(H_1)$ для каждой точки $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha,\varphi)$ найдется предельная совокупность $(f^*,g^*,V_1^*,V_2^*,W_1^*,W_2^*)$ такая, что для соответствующего решения $x = x(t,0,\varphi^*)$ предельного уравнения (2.6) имеют место включения

$$\{x_t(0,\varphi^*), t \in R\} \subset \Omega^+(\alpha,\varphi)$$

$$x_t(0,\varphi^*) \in \{V^*(t,\varphi) = c_0\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\} \quad \forall t \in R$$

Доказательство.

Из условий 1 и 2 теоремы следует существование постоянной $c_0 = \text{const} \ge m(H_1)$ такой, что функция $V(t) = V(t,x_t(\alpha,\varphi)) \searrow c_0$ при $t \to \infty$.

Пусть $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha,\varphi)$ есть предельная функция, задаваемая последовательностью $t_n \to \infty$. Будем считать, что $(f^*,g^*,V_1^*,V_2^*,W_1^*,W_2^*)$ есть предельная совокупность, определяемая этой же последовательностью. Аналогично представлению (2.8) согласно (3.3) и (3.4) имеем

$$\begin{gathered} V(t_n+t,x^{(n)}(t)) = V_1^{(n)}(t,x^{(n)}(t) \\ \int\limits_{-\infty}^{0} V_2(t_n+t,t_0+s,\varphi(s))ds + \int\limits_{t_0-t_n}^{t} V_2^{(n)}(t,s,x^{(n)}(s))ds) \\ V(t_n+t)-V(t_n) \le -\int\limits_0^t W_1^{(n)}(\tau,x^{(n)}(\tau), \int\limits_{-\infty}^{0} W_2(t_n+t,t_0+s,\varphi(s))ds + \\ + \int\limits_{t_0-t_n}^{t} W^{(n)}(\tau,s,x^{(n)}(s))ds)d\tau \le 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

В силу условия (3.1) для этих соотношений имеют место оценки вида (2.9). Соответственно из (3.6), переходя к пределу при $t_n \to \infty$, получаем искомые соотношения

$$V_1^*(t, x^*(t,0,\varphi^*), \int\limits_{-\infty}^{t} V_2^*(t,s,x^*(s,0,\varphi^*))ds) = c_0$$

$$W_1^*(t, x^*(t,0,\varphi^*), \int\limits_{-\infty}^{t} W_2^*(t,s,x^*(s,0,\varphi^*)ds) = c_0$$

Теорема доказана.

4. Устойчивость нулевого решения. Предположим, что $f(t,0,0) = g(t,0,0) \equiv 0$, так что уравнение (2.1) имеет нулевое решение $x(t,\alpha,0) \equiv 0$, непрерывно зависящее от $(\alpha,\varphi) \in R \times C_\infty$.

Введем класс $\mathcal{K}_1$ функций $a_1 : R^+ \to R^+$ типа Хана [63] и класс $\mathcal{K}_2$ функций $a_2 : R^+ \times R^+ \to R^+$, таких, что $a_2(\alpha,\nu) \in \mathcal{K}_1$ при фиксированном $\alpha \in R^+$. Будем полагать, что для оценки (3.1) $\nu_0 \in \mathcal{K}_1$.

Примем следующее определение устойчивости в R^n [4, 27, 28], обозначив через $|||\varphi||| = \sup(|||\varphi|||_l, l \in N) = \sup(\|\varphi(s)\|, s \in R^-)$.

Определение 4.1. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является устойчивым, если $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\forall\alpha \in R^+)$ $(\exists\delta = \delta(\varepsilon,\alpha) > 0)$ $(\forall\varphi \in C_\infty : |||\varphi||| < \delta)$ $(\forall t \geq \alpha)$ $\|x(t,\alpha,\varphi)\| < \varepsilon$. Равномерная устойчивость означает, что $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Определение 4.2. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является слабо асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и $(\forall\alpha \in R^+)$ $(\exists\delta_0 = \delta_0(\alpha) > 0)$ $(\forall\varphi \in C_\infty : |||\varphi||| < \delta_0)$ $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,\alpha,\varphi) = 0$.

Определение 4.3. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является равномерно асимптотически устойчивым относительно компакта $K \subset C_\infty$, если оно равномерно устойчиво и $(\exists\delta_0 > 0)$ $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists T = T(\varepsilon) > 0)$ $(\forall\alpha > 0)$ $(\forall\varphi \in\in \{|||\varphi||| < \delta_0\} \cap K)$ $(\forall t \geq \alpha + T)$ $\|x(t,\alpha,\varphi)\| < \varepsilon$.

Теорема 4.1. Предположим, что:

1) можно найти функционал $V = V(t,\varphi)$ вида (3.3) такой, что

$$a_1(\|x\|) \leq V_1(t,x,v) \leq a_2(t,\|x\| + |v|), \quad a_1 \in \mathcal{K}_1, \quad a_2 \in \mathcal{K}_2,$$

производная которого удовлетворяет неравенству (3.5);

2) для каждой предельной совокупности (f^*, g^*, W_1^*, W_2^*) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения (2.6), кроме $x^*(t,0,0) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство.

Для решения $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (2.1) из условия 1 теоремы при $t \in [\alpha,\beta)$, $(\beta > \alpha)$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a_1(\|x(t,\alpha,\varphi)\|) \leq V_1(t, x(t,\alpha,\varphi), V_2(t, x_t(\alpha,\varphi))) \leq V(\alpha, x(\alpha,\alpha,\varphi), V_2(\alpha, x_\alpha(\alpha,\varphi))) = \\ = V(\alpha,\varphi(0),V_2(\alpha,\varphi)) \leq a_2(\alpha, \|\varphi(0)\| + \nu_0(|||\varphi|||)) < a_1(\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.1}$$

если $|||\varphi||| + \nu_0(|||\varphi|||) < a_2^{-1}(\alpha, a_1(\varepsilon)) = \delta(\alpha,\varepsilon)$.

И, значит, $\|x(t,\alpha,\varphi)\| < \varepsilon\ \forall t \geq \alpha$.

Условие 2 теоремы означает, что для каждого решения $x = x^*(t,0,\varphi^*)$, $\varphi^* \neq 0$, предельного уравнения (2.6) найдется $\beta \geq 0$, такое, что

$$W^*(\beta, x_\beta^*(0,\varphi^*)) \neq 0$$

В силу теоремы 2.1 и условия 2 данной теоремы для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ ограниченного решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ имеем $W^*(\beta, x^*_\beta(0, \varphi^*)) \equiv 0$. Таким образом, находим, что $\varphi^* = 0\ \forall \varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ и, значит, $x(t, \alpha, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Предположим, что:

1) условие 1 теоремы 3.1 выполнено для функционала $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3) и функции $a_2 \in \mathcal{K}_1$;

2) для каждой предельной совокупности $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ множество $\{V^*(t, \varphi) = c_0 = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения (2.6).

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно компакта $K \subset C_\infty$.

Доказательство.

Равномерная устойчивость $x = 0$ следует из условия 1 и (4.1) с учетом того, что $a_2 = a_2(\nu)$. При этом находим, что для каждого ограниченного при всех $t \ge \alpha$ решения $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) функция $V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \searrow 0$ при $t \to \infty$. Далее, аналогично [24, 26], доказывается, что это свойство имеет место равномерно по $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times K$.

5. Устойчивость по части переменных для случая конечного запаздывания. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения $x = 0$ по части переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$ $(0 < l < p)$. Для удобства переобозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, а остальные – через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, 2, \ldots,\ r = p - l)$. Соответственно, $x' = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_p) = (y', z')$, $y \in R^l$ есть вектор l-мерного действительного пространства с некоторой нормой $\|y\|$, $z \in R^{p-l}$ есть вектор $(p - l)$-мерного действительного пространства с некоторой нормой $\|z\|$, $\|x\| = \|x\| + \|z\|$.

Функцию $x = \varphi(s)$, $s \in R^-$, будем представлять через соответствующие составляющие $\psi(s)$ и $\theta(s)$

$$x' = \varphi'(s) = (\psi'(s), \theta'(s)) = (y', z')$$

В дополнение к условиям (2.2)–(2.4) будем полагать также z – продолжимость решений уравнения (2.1) [24, 26, 54]. Это означает, что если какое-либо решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ определено лишь при $t \in (-\infty, \beta)$, $\alpha < \beta < +\infty$, то $\|y(t, \alpha, \varphi)\| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Будем использовать соответствующие определения устойчивости по части переменных y с введенной нормой $\|\varphi\|$.

Теорема 5.1. Предположим, что:

1) каждое решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi\| \le H_0\}$ уравнения (2.1) ограничено по z, $\|z(t, \alpha, \varphi)\| \le H_1(\alpha, \varphi)\ \forall t \ge \alpha$;

2) можно найти функционал $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3), удовлетворяющий условиям

$$a_1(\|y\|) \le V_2(t, x, v) \le a_2(t, \|x\| + |v|), \quad a_1 \in K_1, \quad a_2 \in K_2$$

производная которого удовлетворяет неравенству (3.5);

3) для каждой предельной совокупности (f^*, g^*, W_1^*, W_2^*) максимальное квазиинвариантное подмножество M множества $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержится в множестве $\{\varphi \in C_\infty : \psi(s) \equiv 0\ \forall s \in R^-\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по y.

Доказательство.

Из условия 2 теоремы аналогично выводу соотношений (4.1) имеем оценки

$$a_1(\|y(t,\alpha,\varphi)\|) \le a_2(\alpha, \|\varphi(0)\| + \nu_0(|||\varphi|||))$$

$$\|y(t,\alpha,\varphi)\| < \varepsilon \quad \forall t \ge \alpha, \quad \text{если}$$

$$|||\varphi||| + \nu_0(|||\varphi|||) \le a_2^{-1}(\alpha, a_1(\varepsilon)) = \delta(\alpha,\varepsilon)$$

Учитывая условие 1 теоремы, находим, что каждое решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$, $(\alpha,\varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : |||\varphi||| < \inf(H_0,\delta)\}$ определено и ограничено при всех $t \in R^-$.

Согласно теореме 2.1 для каждого такого решения функция $\varphi^* = ((\psi^*)', (\theta^*)') \in \Omega^+(\alpha,\varphi)$, если только $\psi^* = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} y(t,\alpha,\varphi) = 0$$

Теорема доказана.

Можно вывести также следующую теорему.

Теорема 5.2. Предположим, что:

1) существует некоторое $H_0 > 0$ такое, что решения $x = x(t,\alpha,\varphi)$, $(\alpha,\varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : |||\varphi||| \le H_0\}$ уравнения (2.1) равномерно ограничены по z, $\|z(t,\alpha,\varphi)\| \le H_1 = \text{const}\ \forall t \ge \alpha$;

2) можно найти функционал $V = V(t,\varphi)$ вида (3.3), удовлетворяющий условию 2 теоремы 4.1 при $a_2 \in K_1$;

3) для каждой предельной совокупности $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ множество

$$\{V(t,\varphi) = c_0 = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$$

не содержит решений $x = x^*(t,0,\varphi^*)$ любого предельного уравнения (2.6).

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) равномерно по $(\alpha,\varphi) \in R^+ \times K$ асимптотически устойчиво относительно y.

6. Устойчивость положений равновесия и стационарных движений механической системы с линейной эредитарностью. Рассмотрим механическую систему с N материальными точками, положения которых определяются радиус-векторами $\bar r_1 = (x_1, y_1, z_1)$, ..., $\bar r_N = (x_N, y_N, z_N)$.

Допустим, что имеются вязкоупругие элементы с реакциями $\bar F_{jk}$ $(j = 1,\ldots,N;$ $k = 1,2,\ldots,\mu_N)$, приложенными к j-й точки.

$$\bar F_{jk} = F_{jk}\bar e_{jk}^0 = -(\rho_{jk}(t) l_{jk}(\bar r_j(t)) + \int_{-\infty}^{t} g_{jk}(t,s) l_{jk}(\bar r_j(s)) ds)\bar e_{jk}^0, \tag{6.1}$$

где l_{jk} – удлинение k-го элемента с учетом остаточной деформации при перемещении $\bar r_j(t)$, ρ_{jk} и g_{jk} – соответствующие коэффициенты жесткости и релаксации, $\bar e_{jk}^0$ – единичный вектор соответствующего направления.

Виртуальная работа этих реакций на элементарных перемещениях $\delta\bar e_{jk} = \delta e_{jk}\bar e_{jk}$ определяется равенствами

$$\delta' A = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\mu_j} \bar F_{jk}\delta\bar e_{jk} = F'\delta L$$

$$\begin{aligned} F' &= (F_1, F_2, \ldots, F_p) = (F_{11}, \ldots, F_{1\mu_1}, \ldots F_{N\mu_N}) \\ L' &= (l_1, \ldots, l_p) = (l_{11}, \ldots, l_{1\mu_1}, \ldots l_{N\mu_N}) \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$p = \sum_{j=1}^{N} \mu_j$$

Пусть на систему наложены идеальные стационарные связи, так что ее положение определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Из (6.1) и (6.2) находим обобщенные силы, определяющие действие вязкоупругих элементов

$$Q_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) F; \quad L = L(q), \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial(L_1, L_2, \ldots, L_p)}{\partial(q_1, q_2, \ldots, q_n)}$$

$$F = -P(t)L(q(t)) - \int_{-\infty}^{t} G(t,s)L(q(s))ds$$

$$P = \operatorname{diag}(\rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_p), \quad G = \operatorname{diag}(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_p)$$

Допустим, что на систему действуют также потенциальные и диссипативные силы

$$Q_2 = Q_2(t, q, \dot q), \quad Q_2(t, q, 0) \equiv 0; \quad \dot q' Q_2 \le 0, \quad Q_3 = -\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q},$$

где $\Pi(t,q)$ – потенциальная энергия.

Движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_1 + Q_2, \tag{6.3}$$

где $T = (\dot q' A(q)\dot q)/2$ – кинетическая энергия, $A \in R^{n\times n}$ – положительно определенная при всех $q \in R^n$ матрица.

Будем полагать, что функции, входящие в (6.3), удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4), равенству $L(q) = L_0$ при $\|q\| \le H_0$ удовлетворяет конечное число значений.

Введем функционал, определяемый вдоль движения $(q(t), \dot q(t))$ системы (6.3) следующим равенством

$$V(t, q_t, \dot q(t)) = \frac{1}{2}\dot q' A(q)\dot q + \Pi_1(t,q) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} (L(q(t)) - L(q(s)))' G(t,s)(L(q(t)) - L(q(s)))ds,$$

где $\Pi_1(t,q)$ имеет вид

$$\Pi_1(t,q) = \Pi(t,q) + \frac{1}{2}L'(q)P(t)L(q) + \frac{1}{2}L'(q)\left(\int_{-\infty}^{t} G(t,s)ds\right)L(q)$$

Для производной функционала V согласно (3.4) в силу уравнений движения (6.3) находим оценку

$$\dot V(t, q_t, \dot q(t)) = \frac{\partial \Pi_1(t,q)}{\partial t} + Q_2'(t, q, \dot q)\dot q - W(t, q_t) \le -W(t, q_t) \le 0$$

$$W(t, q_t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} (L(q(t)) - L(q(s)))' \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}(L(q(t)) - L(q(s)))ds,$$

если

$$\frac{\partial \Pi_1(t,q)}{\partial t} \le 0, \quad \forall (t,q) \in R^+ \times R^n, \quad a' \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} a \ge 0 \quad \forall (t,s) \in S, \quad \forall a \in R^n$$

Определим семейство функций $\{\Pi_1^*(t,q)\}$, предельных к функции $\Pi_1(t,q)$, и матриц $\{G_t^*(t,s)\}$, предельных к $\partial G(t,s)/\partial t$.

На основании теоремы 2.1 имеем следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Пусть:

1) равенства $\partial\Pi^*(t,q)/\partial q = 0$ для всех предельных $\Pi_1^*(t,q)$ определяют одно и то же множество изолированных положений $M = \{q = q_0^{(k)},\ k = 1,2,\ldots,l\}$;

2) для каждой матрицы $G_t^*(t,s)$ найдется пара значений $(t_0,s_0) \in S$, такая, что

$$\det G_t(t_0,s_0) = \prod_{j=1}^{p} g_j^*(t_0,s_0) \neq 0$$

Тогда каждое ограниченное движение системы (6.3) неограниченно приближается к одному из предельных положений равновесия $(\dot q, q) = (0, q_0^{(k)})$ при $t \to +\infty$.

Без ограничения общности, допустим, что при $q = 0$ имеют место равенства

$$\Pi(t,0) = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial q}(t,0) = 0, \quad L(0) = 0$$

Тогда система (6.3) имеет положение равновесия $\dot q = q = 0$.

Согласно теореме 3.2 имеем следующее утверждение.

Утверждение 6.2. Допустим, что:

1) функция $\Pi_1(t,q)$ удовлетворяет условиям

$$a_1(\|q\|) \le \Pi_1(t,q) \le a_2(\|q\|), \quad a_1, a_2 \in K_1$$

$$\left\|\frac{\partial\Pi_1(t,q)}{\partial q}\right\| \ge a_3(\|q\|), \quad a_3 \in K_1;$$

2) выполнено условие 2 утверждения 6.1.

Тогда положение равновесия $\dot q = q = 0$ системы (6.3) асимптотически устойчиво равномерно по $K \subset C_\infty$.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\Pi = \Pi(q), \quad \rho_\rho = \rho_\rho^0 = \mathrm{const}, \quad g_j(t,s) = g_j(s-t)$$

В этом случае находим, что $g_j^*(t,s) = g_j(s-t)$

$$\Pi_1 = \Pi_1(q) = \Pi(q) + \frac{1}{2}L'(q)PL(q) + \frac{1}{2}L'(q)\left(\int_{-\infty}^{0} G(\nu)d\nu\right)L(q)$$

Условия утверждения 5.2 будут выполнены, если

$$\Pi_1(q) \ge a_1(\|q\|), \quad \left\|\frac{\partial\Pi_1(q)}{\partial q}\right\| \neq 0; \quad g_j(\nu) \le 0 \quad (j = 1,2,\ldots,p), \quad \prod_{j=1}^{p} g_j(\nu^*) \neq 0$$

при $q \neq 0$ и некотором $\nu^* \in R^-$.

По теореме 4.2 имеет место также следующее утверждение.

Утверждение 6.3. Допустим, что:

1) движения системы (6.3) из некоторой окрестности $\dot q = q = 0$ ограничены по $q_{m+1},\ldots,q_n$, например, эти переменные определяются по $\mathrm{mod}(2\pi)$;

2) функция $\Pi_1(q) \geq a_1(\|q\|_m)$

$$\left\|\frac{\partial \Pi_1(q)}{\partial q}\right\| \neq 0 \quad \forall q \in \{\Pi_1(q) > 0\}$$

Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}, q_1, q_2, \ldots, q_m$.

7. О стабилизации установившихся движений манипуляторов с цилиндрическими и сферическими вязкоупругими шарнирами. Рассмотрим манипулятор, функционирующий в однородном поле тяжести, с указанными выше шарнирами, положение которого определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Уравнения движения системы возьмем в форме (6.3) с тем изменением, что потенциальная энергия сил тяжести $\Pi = \Pi(q)$, вязкоупругое действие в шарнирах является линейным по координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$ таким образом, что

$$\begin{gathered} L = (q - q_0), \quad P = P_0 = \operatorname{diag}(\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_n^0), \quad \rho_k^0 \geq 0 \\ G(t,s) = G(s-t) = \operatorname{diag}(g_1(s-t), g_2(s-t), \ldots, g_n(s-t)) \\ g_k(\nu) \leq 0, \quad g_{k'}(\nu) \geq 0, \end{gathered} \tag{7.1}$$

обобщенная сила Q_2 есть управление, $Q_2 = U$, подлежащее определению.

Пусть $\dot{q} = 0$, $q = q^{(0)}$ есть заданное положение манипулятора, создаваемое управлением

$$U^{(0)} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)}) + \left(P_0 + \int_{-\infty}^{0} G(\nu) d\nu\right)(q^{(0)} - q_0) \tag{7.2}$$

Введем возмущения $x = q - q^{(0)}$ и рассмотрим задачу нахождения управляющих воздействий $U^{(1)} = U - U^{(0)}$ без измерения скоростей, обеспечивающих стабилизацию положения $\dot{x} = 0$, $x = 0$.

Уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)} + x) + \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)}) - P_0 x - \int_{-\infty}^{r} G(s-t) x(s) ds + U^{(1)} \tag{7.3}$$

Выберем управляющее воздействие в виде

$$U^{(1)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) U^{(11)} f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \int_{0}^{t} U^{(12)}(s-t)(f(x(t)) - f(x(s))) ds, \tag{7.4}$$

где $U^{(11)}, U^{(12)} \in R^{n \times n}$, $U^{(11)} = \mathrm{const}$, $U^{(12)}(\nu) \geq 0$, $(U_\nu^{(12)})'(\nu) \leq 0$, $f : R^n \to R^n$ $(f(0) = 0)$ есть обратимая функция, выбираемая из условия эффективности управления.

Введем функционал

$$\begin{gathered} V = T(q_0 + x, \dot{x}) + \Pi_1(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} (x(t) - x(s))' G(s-t)(x(t) - x(s)) ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{0}^{t} (f(x(t)) - f(x(s)))' U^{(12)}(s-t)(f(x(t)) - f(x(s))) ds \end{gathered} \tag{7.5}$$

$$\Pi_1(x) = \Pi(q_0 + x) - x' \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q_0) - \Pi(q_0) + \frac{1}{2} x' \left(P_0 + \int_{-\infty}^{0} G(\nu) d\nu\right) x + \frac{1}{2} f'(x) U^{(11)} f(x) \tag{7.6}$$

Для производной функционала (7.5) в силу уравнений движения (7.3) имеем

$$\dot V \le \frac{1}{2}\int_0^t (x(t)-x(s))' G_\nu(s-t)(x(t)-x(s))ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t (f(x(t))-f(x(s)))' U_\nu^{(12)}(s-t)(f(x(t))-f(x(s)))ds \le 0 \qquad (7.7)$$

В соответствии с теоремой имеем следующий результат.

Утверждение 7.1. Пусть управление (7.4) таково, что:

1) $y' G_\nu(\nu) y - z' U_\nu^{(12)}(\nu) z \le 0$ ($\ne 0$ при $y^2 + z^2 \ne 0$);

2) функция $\Pi_1(x)$ является определенно-положительной, при этом

$$\left\| \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \right\| \ge a_1(\|x\|)$$

Тогда управление (7.4) решает задачу о стабилизации заданного положения $\dot q = 0$, $q = q^{(0)}$ манипулятора.

Заметим, что потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q)$ системы представляет собой функцию периодическую по q_1, q_2, ..., q_n. Поэтому значения ρ_1^0, ρ_2^0, ..., ρ_n^0 и функция $f = f(x)$ могут быть выбраны так, что $\Pi_1(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Соответственно, имеет место утверждение о глобальной равномерной стабилизации.

Пусть координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ манипулятора являются позиционными, а $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$ – циклическими, так что кинетическая энергия T и потенциальная энергия не зависят явно от $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$, соответствующие обобщенные силы равны нулю.

Следуя [59], переобозначим координаты и введем импульсы, соответствующие циклическим координатам

$$r' = (r_1, r_2, \ldots, r_m) = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

$$s' = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-m}) = (q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n)$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot s}$$

В обозначениях из [59] имеем следующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + Q_1 + U_r, \quad \frac{dp}{dt} = U_s, \quad \dot s = -\frac{\partial R}{\partial p}, \qquad (7.8)$$

где

$$2R_2 = \dot r'(A_{rr}(r) - A_{rs}(r)A_{ss}^{-1}(r)A_{sr}(r))\dot r, \quad R_1 = p' A_{ss}^{-1}(r)A_{sr}(r)\dot r$$

$$2R_0 = -p' A_{ss}^{-1}(r)p, \quad U' = (U_{r'}, U_{s'})$$

Из уравнений (7.8) находим, что при управлении

$$U_r = U_r^0 - \frac{\partial R_0}{\partial r}(p_0, r_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial r}(r_0) + \left(P_0 + \int_{-\infty}^{0} G(\nu)d\nu\right)(r^{(0)} - r_0); \quad U_s = U_s^0 = 0 \qquad (7.9)$$

система имеет стационарное движение

$$\dot r = 0, \quad r = r^{(0)}, \quad p = p^{(0)}, \quad \dot s = \dot s_0^{(0)} - \left.\frac{\partial R_0}{\partial p}\right|_{r=r^{(0)}, p=p^{(0)}} \qquad (7.10)$$

Введем возмущения $y = r - r_0$, $z = p - p^{(0)}$. Выберем управляющие воздействия в виде

$$U_r^{(1)} = U_r - U_r^0 = -\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)U^{(11)}f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\int_0^t U^{(12)}(s-t)(f(x(t)) - f(x(s)))ds$$
$$U_s^{(1)} = U_s = -K(p - p^{(0)}), \tag{7.11}$$

где $U^{(11)}, U^{(12)} \in R^{m\times m}$, $U^{(11)} = \text{const}$, $U^{(12)}(\nu) \geq 0$, $U_\nu(\nu) > 0$; $f : R^m \to R^m$ $(f(0) = 0)$ есть обратимая функция, $K \in R^{(n-m)\times(n-m)}$ – положительно определенная матрица.

Введем функционал

$$V = R_2(y,y) + W_1(p_0,y) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^t (y(t) - y(s))' G(s-t)(y(t) - y(s))ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t (f(y(t)) - f(y(s)))' U^{(12)}(s-t)(f(y(t)) - f(y(s)))ds + \frac{1}{2}z' Kz$$
$$W_1(p_0,y) = \Pi(r_0 + y) - R_0(p_0, r_0 + y) - y'\frac{\partial \Pi(r_0)}{\partial r} + \tag{7.12}$$
$$+ y'\frac{\partial R_0(p_0,r_0)}{\partial r} - \Pi(r_0) + R_0(p_0,r_0) + \frac{1}{2}y'\left(P_0 + \int_{-\infty}^0 G(\nu)d\nu\right)y + \frac{1}{2}f'(y)U^{(11)}f(y)$$

Для производной функционала (7.12) в силу уравнений движения (7.8) находим

$$\dot V \leq \frac{1}{2}\int_0^t (y(t) - y(s))' G_\nu(s-t)(y(t) - y(s))ds -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t (f(y(t)) - f(y(s)))' U(s-t)(f(y(t)) - f(y(s)))ds - \frac{1}{2}z' Kz \leq 0$$

В соответствии с теоремой 4.2 имеем следующий результат.

Утверждение 7.2. Пусть управляющее и вязкоупругое воздействия (7.9) и (7.11) таковы, что:

1) $f'(y)U_\nu^{(12)}f(y) - y' G_\nu y > 0$ при $y \neq 0$;

2) функция $W_1(p_0, y)$ является определенно положительной по y, при этом

$$\left\|\frac{\partial W_1(p_0,y)}{\partial y}\right\| \geq a_1(\|y\|)$$

Тогда имеет место стабилизация заданного стационарного движения $\dot r = 0$, $r = r^{(0)}$, $p = p^{(0)}$ манипулятора. Подбором ρ_1^0, ρ_2^0, ρ_m^0 и функции $f = f(y)$ может быть достигнута глобальная равномерная стабилизация.

8. Стабилизация программного положения пятизвенного робота-манипулятора. В этом разделе представлено численное моделирование управляемого движения многозвенного робота-манипулятора с пятью степенями свободы (см. рис. 1). Робот имеет один призматический и четыре вращательных шарнира.

Каждое звено манипулятора представлено в виде твердого тела. Кинематические пары манипулятора считаются однозвенными, их геометрические центры обозначены символом O_k $(k = 1,2,\ldots,5)$. Центры масс C_k $(k = 1,2,\ldots,5)$ звеньев лежат на осях O_kO_{k+1}, оси O_kO_{k+1} $(k = 1,2,\ldots,5)$ – оси симметрии звеньев. Первое базовое звено вертикальное, оно вращается вокруг O_1O_2, угол поворота равен θ_1. Вторая кинематическая

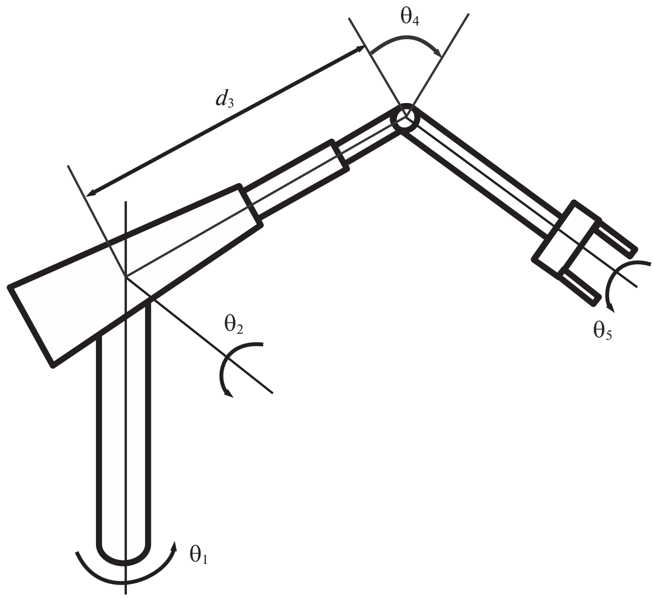

Рис. 1.

пара позволяет вращать второе звено вокруг горизонтальной оси, проходящей через O_2. Третья кинематическая пара допускает прямолинейное движение третьего звена по линии O_2O_4 ($O_3 \in O_1O_4$). Введем обозначение смещения третьего звена $x = d_3 = O_1O_4$. Четвертое звено может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через O_4, с углом поворота θ_4. Пятое звено, моделирующее захват, может вращаться вокруг O_4O_5, его угол поворота обозначается θ_5. Будем считать, что центры масс C_k звеньев лежат на осях O_kO_{k+1} и эти оси являются осями симметрии соответствующих звеньев ($k = 1, 2, \ldots, 5$). Введем главные центральные оси C_kx_k, C_ky_k, C_kz_k звеньев. Будем считать, что для звеньев 1 и 5 оси C_1z_1 и C_5z_5 являются осями симметрии. Для звеньев 2, 3 и 4 такими осями являются C_2x_2, C_3x_3 и C_4x_4 соответственно. Предположим, что оси C_2z_2, C_3z_3 и C_4z_4 горизонтальны. Массы звеньев обозначим через m_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$), а их основные центральные моменты инерции обозначим через $I_x^{(k)}$, $I_y^{(k)}$ и $I_z^{(k)}$. Соответственно, имеем $I_x^{(1)} = I_y^{(1)}$, $I_x^{(5)} = I_y^{(5)}$, $I_y^{(2)} = I_z^{(2)}$, $I_y^{(3)} = I_z^{(3)}$, $I_y^{(4)} = I_z^{(4)}$. Введем длины $O_2C_2 = l_2$, $C_3O_4 = l_3$, $O_4O_5 = 2O_4C_4 = 2l_4$ и $O_5C_5 = l_5$.

Используя теорему Кенига, можно найти кинетическую энергию T_i каждого звена $i = 1, 2, \ldots, 5$ как кинетическую энергию абсолютно твердого тела.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z^{(1)}\dot{\theta}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\sin^2\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}(I_x^{(2)}\dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_2 + I_z^{(2)}(\dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_2 + \dot{\theta}_2^2))$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + (x - l_3)^2 \dot{\theta}_z^2 + (x - l_3)\sin^2\theta_2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}(I_x^{(3)}\dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_2 + I_z^{(3)}(\dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_2 + \dot{\theta}_2^2))$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 ((\dot{x} + l_4\dot{\theta}_4 \sin\theta_4)^2 + (x\dot{\theta}_2 - l_4\dot{\theta}_4\cos\theta_4)^2 + (x\cos\theta_4 - l_4\sin(\theta_2 + \theta_4))^2 \dot{\theta}_1^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(I_x^{(4)}\dot{\theta}_1^2\cos^2(\theta_2+\theta_4)+I_z^{(4)}(\dot{\theta}_1^2\sin^2(\theta_2+\theta_4)+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)^2))$$

$$T_5=\frac{1}{2}m_5((\dot{x}+(2l_4+l_5)\dot{\theta}_4\sin\theta_4)^2+(x\dot{\theta}_2-(2l_4+l_5)\dot{\theta}_4\cos\theta_4)^2+$$

$$+(x\cos\theta-(2l_4+l_5)\sin(\theta_2+\theta_4))^2\dot{\theta}_1^2+$$

$$+\frac{1}{2}I_x^{(5)}(\dot{\theta}_1\cos(\theta_2+\theta_4)+\dot{\theta}_5)^2+\frac{1}{2}I_z^{(5)}(\dot{\theta}_1^2\cos^2(\theta_2+\theta_4)+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)^2)$$

Кинетическая энергия манипулятора имеет вид

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5$$

Потенциальная энергия манипулятора выражается в виде

$$\Pi=-m_2gl_2\cos\theta_2-m_3g(x-l_3)\cos\theta_2-m_4g(x\cos\theta_2+l_4\cos(\theta_2+\theta_4))-$$
$$-m_5g(x\cos\theta_2+(2l_4+l_5)\cos(\theta_2+\theta_4))$$

Массоинерционные параметры робота выбраны следующими

$$m_2=5\ \text{кг},\quad m_3=m_4=3\,\text{кг},\quad m_5=4\,\text{кг}$$

$$l_2=0.8\,\text{м},\quad l_3=l_4=0.4\,\text{м},\quad l_5=0.5\,\text{м}$$

$$I_x^{(2)}=I_y^{(2)}=0.25\ \text{кг}\,\text{м}^2,\quad I_z^{(2)}=0.2\ \text{кг}\,\text{м}^2$$

$$I_x^{(3)}=I_y^{(3)}=I_z^{(3)}=I_x^{(4)}=I_y^{(4)}=I_z^{(4)}=0.1\ \text{кг}\,\text{м}^2$$

$$I_x^{(5)}=I_y^{(5)}=0.05\ \text{кг}\,\text{м}^2,\quad I_z^{(5)}=0.2\ \text{кг}\,\text{м}^2$$

Программное положение робота выбрано следующим

$$\begin{gathered}\theta_1^{(0)}=0.5\ \text{рад},\quad \theta_2^{(0)}=\pi/4\ \text{рад},\quad d_3^{(0)}=0.8\ \text{м}\\ \theta_4^{(0)}=-\pi/3\ \text{рад},\quad \theta_5^{(0)}=\pi/2\ \text{рад}\end{gathered}\tag{8.1}$$

Расчеты проведены при следующих начальных отклонениях от программного положения

$$\begin{gathered}x_1(0)=x_5(0)=-0.1\ \text{рад},\quad x_2(0)=-0.8\ \text{рад},\quad x_3(0)=0.05\ \text{м},\quad x_4(0)=0.5\ \text{рад}\\ \dot{x}_1(0)=\dot{x}_5(0)=-0.01\ \text{рад/с},\quad \dot{x}_2(0)=\dot{x}_4(0)=-0.02\ \text{рад/с},\quad \dot{x}_3(0)=0.01\ \text{м/с}\end{gathered}\tag{8.2}$$

На рис. 2–6 представлены результаты численного моделирования процесса управления манипулятором, показывающие зависимости от времени углов поворота и линейного смещения его звеньев.

Заключение. В работе проведено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием. Выводятся качественные свойства решения такого уравнения типа свойства инвариантности положительного предельного множества решения динамической системы. Доказана теорема о локализации положительного предельного множества ограниченного решения в предположении существования функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. Этот результат можно определить как принцип квазиинвариантности для исследуемого уравнения. Доказаны теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения по всем и части переменных при указанном выше предположении. Доказанные теоремы позволили определить достаточные условия предельных свойств движений голономной механической системы с линейной эредитарностью. Решена задача о стабилизации положений равновесия и стационарных движений манипулятора с цилин-

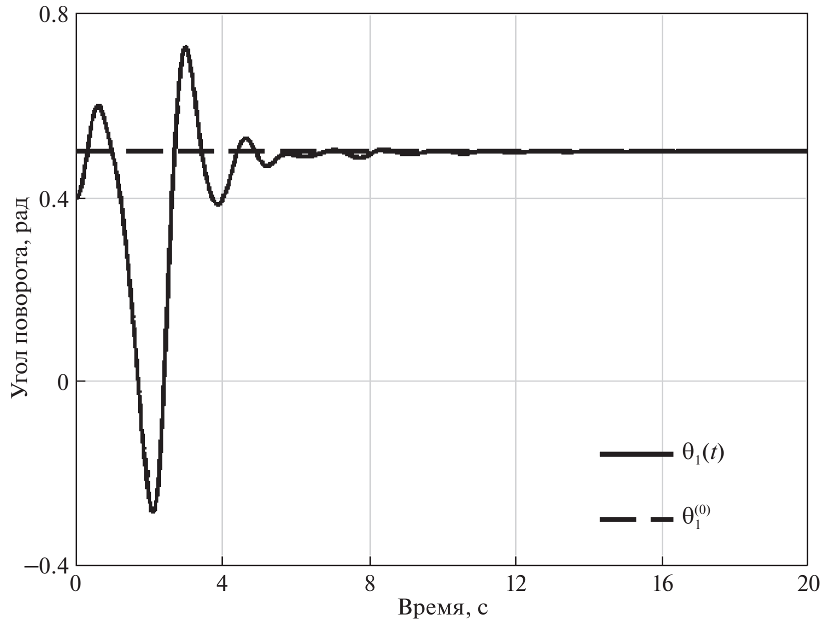

Рис. 2.

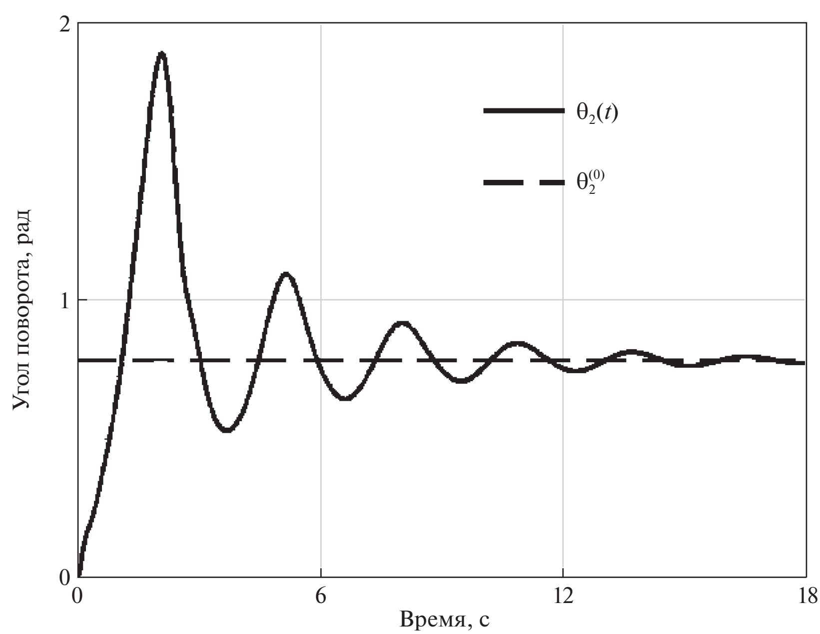

Рис. 3.

дрическим и сферическим шарнирами. Периодичность уравнений движения по обобщенным координатам позволяет вывести условия глобальной стабилизации.

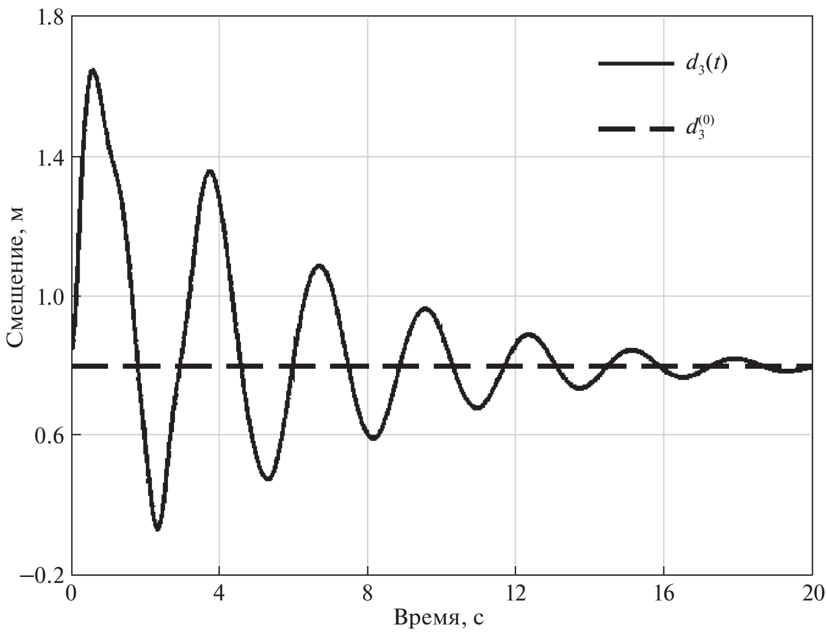

Рис. 4.

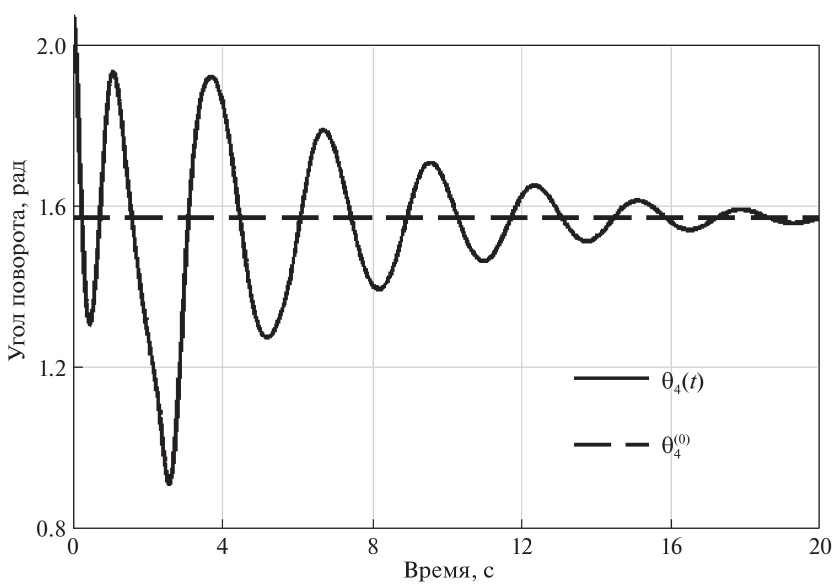

Рис. 5.

Решена задача о стабилизации заданного положения пятизвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическим шарнирами. Представлены результаты численного моделирования процесса стабилизации.

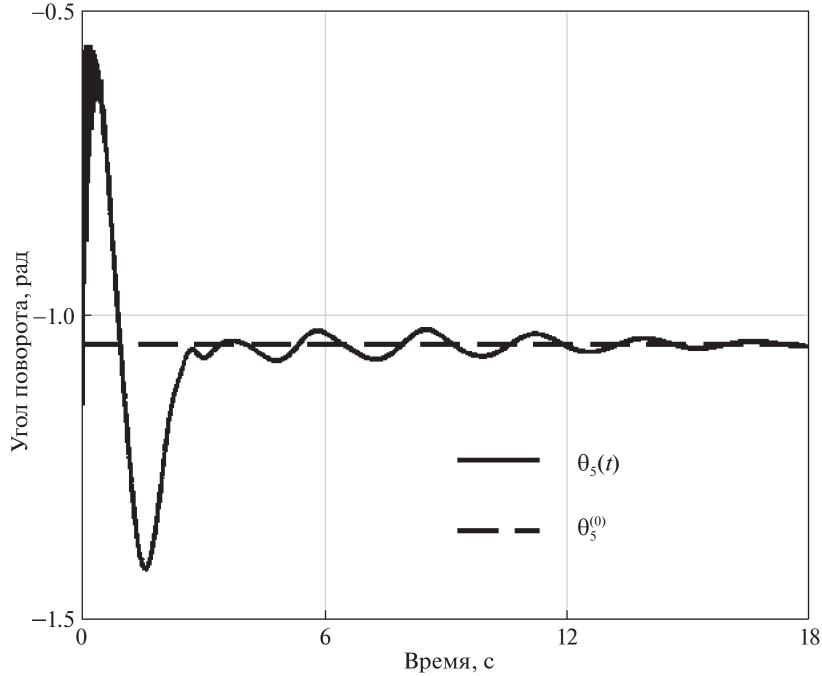

Рис. 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00791).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
2. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1980. 304 с.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey // Nonlin. Anal., Theory, Meth.&Appl. 1980. V. 4. P. 831–877.
5. *Кордуняну К., Лакшмикантам В.* Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автом. и телемех. 1985. Вып. 7. С. 5–44.
6. *Colleman B.D., Dill H.* On the stability of certain motions of incompressible materials with memory // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 30. P. 197–224.
7. *Coleman B., Mizel V.* On the stability of solutions of functional differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 30. P. 173–196.
8. *Colleman B.D., Owen D.R.* On the initial-value problem for a class of functional differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974. V. 55. P. 275–299.
9. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj. 1978. V. 21. P. 11–41.
10. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Math. J. 1983. V. 35. P. 597–605.
11. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay // Lect. Notes in Math. 1991. V. 1473.

12. *Murakami S.* Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Eqns. 1985. V. 59. P. 314–335.
13. *Murakami S., Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj. 1989. V. 32. P. 91–105.
14. *Sawano K.* Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations // Tohoku Math. J. 1979. V. 31. P. 363–382.
15. *Sawano K.* Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. P. 557–566.
16. *Sawano K.* Some considerations on the fundamental theorems for functional differential equations with infinite retardations // Fukcialaj Ekvacioj. 1982. V. 25. P. 97–104.
17. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay // Arch. Rat. Mech. Anal. 1978. V. 67. P. 315.
18. *Atkinson F.V., Haddock J.R.* On determining phase spaces for functional differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1988. V. 31. P. 331–347.
19. *Горяченко В.Д.* Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 286 с.
20. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулирования систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. *Хейл Д.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
22. *Haddock J., Krisztin T., Terjeki J.* Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Eqns. 1985. V. 10. P. 123–136.
23. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 108 с.
24. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005. 328 с.
25. *Перегудова О.А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. 2008. Т. 44. 12. С. 1638–1647.
26. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автом. и телемех. 2009. 9. С. 4–55.
27. *Hino Y.* On stability of the solution of some functional differential equations // Fukcialaj Ekvacioj. 1971. V. 14. P. 47–60.
28. *Kato J.* Stability problems in functional differential equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj. 1978. V. 21. P. 63–80.
29. *Burton T.A.* Stability theory for delay equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1979. V. 22. P. 67–76.
30. *Kato J.* Liapunov's second method in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. P. 487–497.
31. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay // Lect. Notes in Math., 1983. V. 1017. P. 300–312
32. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях и их применению к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. ун-та. Сек. А, 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
33. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
34. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. ун-та, 1957. 327 с.
35. *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент: ФАН, 1971. 180 с.
36. *Керимов М.К.* Библиография некоторых новых работ по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям // В доп. к кн.: *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1980. 304 с.
37. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.
38. *Сергеев В.С.* Первый метод Ляпунова в исследовании систем, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра. М.: ВЦ РАН, 2011. 193 с.
39. *Colleman B.D., Gurtin M.E., Ismael Herrera R., Truesdell C.* Wave Propagation in Dissipative Materials. Berlin: Springer, 1965.

40. *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1980. 360 с.

41. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.

42. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В.* Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.

43. *Sergeev V.S.* Stability of solutions of Volterra integrodifferential equations // Math.&Comput. Model., 2007. V. 45. P. 1376–1394.

44. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the Stability and stabilization problems of Volterra integral-differential equations // Russ. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 3. P. 387–407.

45. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 156–176.

46. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* О методе функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Ж. Средневолжск. матем. об-ва. 2018. Т. 20. № 3. С. 260–272.

47. *Andreev A., Peregudova O.* Volterra equations in the control problem of mechanical systems // 2019. 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). P. 298–303.

48. *Сергеев В.С.* Об устойчивости равновесия крыла в нестационарном потоке // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 219–228.

49. *Сергеев В.С.* Об устойчивости равновесия вязкоупругой пластины // Автомат. и телемех. 2007. Вып. 9. С. 79–86.

50. *Сергеев В.С.* Устойчивость движения железнодорожной колесной пары в одном случае // Автомат. и телемех. 2009. Вып. 9. С. 157–161.

51. *Andreev A., Peregudova O.* Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Syst. Sci.&Control Engng. 2018. V. 6. № 1. P. 12–19.

52. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Мат., Механ., Физ., Астрон., Хим. 1957. № 4. С. 9–16.

53. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части перемменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 147–152.

54. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

55. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

56. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 8. С. 922–933.

57. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. 156 с.

58. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983.

59. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998. 168 с.

60. *Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундам. и прикл. матем. 2005. Т. 11. 7. С. 117–158.

61. *Карапетян А.В., Кулешов А.С.* Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами // Динамич. системы. 2017. Т. 7 (35). № 1. С. 3–16.

62. *Sell G.* Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. New York: Van Nostrand Reinhold, 1971.

63. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод в теории устойчивости: учебник. М.: Мир, 1980. 300 с.

Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differentia l Equations with Infinite Delay

A. S. Andreev[a,#] and O. A. Peregudova[a,##]

[a] *Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia*

[#]*e-mail: asa5208@mail.ru*

[##]*e-mail: peregudovaoa@gmail.com*

The paper considers the stability problem for a non-autonomous nonlinear integro-differential equation of Volterra type with infinite delay. The development of the Lyapunov functional method is carried out in both the limiting behavior study of a bounded solution as well as the asymptotic stability of the zero solution in all and some of the variables under the assumption of the corresponding Lyapunov functional existence with a semidefinite time derivative. The problems on the study of the limiting properties of the motion for a mechanical system with linear heredity as well as the stationary motion stabilization of a manipulator with viscoelastic cylindrical and spherical joints are solved. The control problem of a five-link robot manipulator is solved taking into account the viscoelasticity of its joints.

Keywords: Volterra integro-differential equations, stability, Lyapunov functional, mechanical system with viscoelastic elements, manipulator, control

REFERENCES

1. *Volterra V.* Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauthier-Villars. Reissued, 1990.
2. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover Publ., 1959.
3. *Krasovskii N.N.* Nekotorye Zadachi Teorii Ustoichivosti Dvizheniya. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 211 p. (in Russian).
4. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey // Nonlin. Anal., Theory, Meth.&Appl., 1980, vol. 4, pp. 831–877.
5. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay // Autom. 1985. Iss. 7, pp. 5–44. (in Russian)
6. *Colleman B.D., Dill H.* On the stability of certain motions of incompressible materials with memory // Arch. Rat. Mech. Anal., 1968, vol. 30, pp. 197–224.
7. *Coleman B., Mizel V.* On the stability of solutions of functional differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal., 1968, vol. 30, pp. 173–196.
8. *Colleman B.D., Owen D.R.* On the initial-value problem for a class of functional differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, vol. 55, pp. 275–299.
9. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj, 1978, vol. 21, pp. 11–41.
10. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Math. J., 1983, vol. 35, pp. 597–605.
11. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional differential equations with infinite delay // Lect. Notes in Math., 1991, vol. 1473.
12. *Murakami S.* Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Eqns., 1985, vol. 59, pp. 314–335.
13. *Murakami S., Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj, 1989, vol. 32, pp. 91–105.
14. *Sawano K.* Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations // Tohoku Math. J., 1979, vol. 31, pp. 363–382.
15. *Sawano K.* Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay // Tohoku Math. J., 1980, vol. 32, pp. 557–566.
16. *Sawano K.* Some considerations on the fundamental theorems for functional differential equations with infinite retardations // Fukcialaj Ekvacioj, 1982, vol. 25, pp. 97–104.

17. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay // Arch. Rat. Mech. Anal., 1978, vol. 67, pp. 315.
18. *Atkinson F.V., Haddock J.R.* On determining phase spaces for functional differential equations // Funkcialaj Ekvacioj, 1988, vol. 31, pp. 331–347.
19. *Goryachenko V.D.* Methods for Studying the Stability of Nuclear Reactors. Moscow: Atomizdat, 1977. 286 p. (in Russian)
20. *Kolmanovsky V.B., Nosov V.R.* Stability and Periodic Control Modes of Systems with Aftereffect. Moscow: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian)
21. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Springer, 1977. 366 p.
22. *Haddock J., Krisztin T., Terjeki J.* Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Eqns., 1985, vol. 10, pp. 123–136.
23. *Razumikhin B.S.* Stability of Hereditary Systems. Moscow: Nauka, 1988. 108 p. (in Russian)
24. *Andreev A.S.* Stability of Non-Autonomous Functional Differential Equations. Ulyanovsk: UlGU, 2005. 328 p. (in Russian)
25. *Peregudova O.A.* Development of the Lyapunov function method in the stability problem for functional-differential equations // Differ. Equat., 2008, vol. 44, pp. 1701–1710.
26. *Andreev A.S.* The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations // Autom. Remote Control, 2009, vol. 70, no. 9, pp. 1438–1486.
27. *Hino Y.* On stability of the solution of some functional differential equations // Fukcialaj Ekvacioj, 1971, vol. 14, pp. 47–60.
28. *Kato J.* Stability problems in functional differential equations with infinite delay // Fukcialaj Ekvacioj, 1978, vol. 21, pp. 63–80.
29. *Burton T.A.* Stability theory for delay equations // Funkcialaj Ekvacioj, 1979, vol. 22, pp. 67–76.
30. *Kato J.* Liapunov's second method in functional differential equations // Tohoku Math. J., 1980, vol. 32, pp. 487–497.
31. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay // Lect. Notes in Math., 1983, vol. 1017, pp. 300–312.
32. *Tikhonov A.N.* On functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics // Bull. Moscow Univ. Ser. Internat. Sect. A, 1938, vol. 1, no. 8, pp. 1–25. (in Russian).
33. *Myshkis A.D.* Linear Differential Equations with Retarded Arguments. Moscow: Nauka, 1972. 352 p. (in Russian)
34. *Bykov Ya.V.* On Some Problems on Integro-differential Equations. Frunze: Kirghiz State Univ., 1957.
35. *Filatov A.N.* Averaging Methods for Differential and Integrodifferential Equations. Tashkent: FAN, 1971.
36. *Kerimov M.K.* Bibliography of some new works on integral and integro-differential equations // Suppl. to V. Volterra's book Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. Moscow: Nauka, 1980. 304 p. (in Russian)
37. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.
38. *Sergeev V.S.* Lyapunov's First Method in the Study of Systems Described by Integro-Differential Equations of Volterra Type. Moscow: VTs RAS, 2011. 193 p. (in Russian)
39. *Colleman B.D., Gurtin M.E., Ismael Herrera R., Truesdell C.* Wave Propagation in Dissipative Materials. Berlin: Springer, 1965.
40. *Rezvan V.* Absolute Stability Automatic System with Delay. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian)
41. *Belotserkovsky S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G.* The Wing in Unsteady Flow of Gas. Moscow: Nauka, 1971. 768 p. (in Russian)
42. *Belotserkovsky S.M., Kochetkov Yu.A., Krasovsky A.A., Novitsky V.V.* Introduction to Aeroautoelasticity. Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)
43. *Sergeev V.S.* Stability of solutions of Volterra integrodifferential equations // Math.&Comput. Model., 2007, vol. 45, pp. 1376–1394.
44. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the stability and stabilization problems of Volterra integral-differential equations // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, vol. 14, no. 3, pp. 387–407.

45. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* Nonlinear regulators in the position stabilization problem of the holonomic mechanical system // Mech. Solids, 2018, vol. 53, Suppl. 3, pp. S22–S38.
46. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the Lyapunov functionals method in the stability problem of Volterra integro-differential equations // Middle Volga Math. Soc. J., 2018, vol. 20, no. 3, pp. 260–272.
47. *Andreev A., Peregudova O.* Volterra Equations in the Control Problem of Mechanical Systems // 2019 23rd Int. Conf. on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), pp. 298–303.
48. *Sergeev V.S.* The stability of the equilibrium of a wing in an unsteady flow // JAMM, 2000, vol. 64, no. 2, pp. 219–228.
49. *Sergeev V.S.* On stability of viscoelastic plate equilibrium // Autom. Remote Control, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1544–1550.
50. *Sergeev V.S.* A case of motional stability of railway wheel pair // Auton. Remote Control., 2009, vol. 70, pp. 1579–1583.
51. *Andreev A., Peregudova O.* Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Syst. Sci.&Control Engng., 2018, vol. 6, no. 1, pp. 12–19.
52. *Rumyantsev V.V.* On motion's stability with respect to a part of variables // Bull. of MSU, 1957, no. 4.
53. *Rumyantsev V.V.* On asymptotic stability and instability of motion with respect to a part of the variables // JAMM, 1971, vol. 35, no. 1.
54. *Rumyantsev V.V.,* Osiraner *A.S.* Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of the Variables. Moscow: Nauka, 1987. 253 p.
55. *Vorotnikov V.I., Rumyantsev V.V.* Stability and Control in a Part of Coordinate of the Phase Vector of Dynamic Systems: Theory, Methods, and Applications. Moscow: Nauchnyi Mir, 2001. 320 p. (in Russian)
56. *Rumyantsev V.V.* On the stability of steady motions // JAMM, 1966, vol. 30, no. 5.
57. *Rumyantsev V.V.* On the stability of stationary motions of satellites. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2010. 156 p. (in Russian)
58. *Karapetyan A.V., Rumyantsev V.V.* Stability of conservative and dissipative systems // Itogi Nauki i Tekhniki. General mechanics. vol. 6. 129 p.
59. *Karapetyan A.V.* Stability of Stationary Motions. Moscow: URSS, 1998.
60. *Kalenova V.I., Karapetyan A.V., Morozov V.M., Salmina M.A.* Non-holonomic mechanical systems and stabilization of motion // Fundam.&Appl. Math., 2005, vol. 11, no. 7, pp. 117– 158.
61. *Karapetyan A., Kuleshov A.* The Routh theorem for mechanical systems with unknown first integrals // Theor.&Appl. Mech., 2017. vol. 44. no. 1.
62. *Sell G.* Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. N.Y.: Van Nostrand Reinhold, 1971.
63. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. N.Y.: Springer, 1977.