

УДК 531.36

**ОБОБЩЕННЫЕ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА  
ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ**© 2021 г. **А. В. Карапетян**<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия**\*e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.

После доработки 22.12.2020 г.

Принята к публикации 15.01.2021 г.

Обсуждается проблема глобального качественного анализа динамики диссипативных систем с симметрией на основе обобщенных диаграмм Смейла. Общие положения иллюстрируются на примере задачи о движении волчка с вязким наполнителем.

*Ключевые слова:* диаграммы Смейла, диссипативные системы с симметрией, инвариантные множества

**DOI:** 10.31857/S003282352104007X

Классические диаграммы Смейла [1] для консервативных механических систем с симметрией представляет собой в пространстве постоянных интеграла энергии  $H = h$  и интегралов Нётер  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$  множество  $S$  поверхностей  $h = h(\mathbf{k})$ , на котором эти интегралы зависимы. Множество  $S$  называется бифуркационным по Смейлу: на нем происходят перестройки топологического типа областей возможности движения системы в конфигурационном пространстве. Каждой точке множества  $S$  соответствует инвариантное в фазовом пространстве множество системы (в частности, стационарное движение).

Методика Смейла с небольшими изменениями и дополнениями распространяется [2–4] на случай диссипативных механических систем с симметрией при условии, что диссипативные силы обладают частичной диссипацией и не разрушают интегралы Нётер. При этом полная механическая энергия  $H$  не возрастает вдоль движений системы, сохраняет свое начальное значение  $h$  на инвариантных множествах, а обобщенные диаграммы Смейла по-прежнему представляет собой множество  $S$ , на котором невозрастающая функция  $H$  и интегралы Нётер  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$  зависимы.

Существенное отличие обобщенных диаграмм от классических состоит в следующем: в консервативном случае все точки пространства  $(\mathbf{k}; h)$  инвариантны относительно фазового потока системы, а в диссипативном случае инвариантны только точки, лежащих на множестве  $S$ , а остальные точки этого пространства эволюционируют вдоль прямых  $\mathbf{k} = \text{const}$  в сторону уменьшения  $h$  и стремятся к одной из точек множества  $S$ , соответствующей значению функции  $H$ , которое меньше начального. Таким образом, обобщенные диаграммы Смейла позволяют находить предельные движения системы только по начальному значению полной энергии и значениям постоянных интегралов Нётер.

**1. Обобщенные диаграммы Смейла.** Рассмотрим механическую систему с  $n$  степенями свободы, находящуюся под действием потенциальных и диссипативных сил с ча-

стичной диссипацией и допускающую  $m$ -параметрическую ( $m < n$ ) группу симметрий. Пусть полная механическая энергия  $H$  и интегралы Нётер  $\mathbf{K}$  имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v}, \mathbf{v}) + V(\mathbf{r}) \leq h \quad (1.1)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}(\mathbf{r})\mathbf{v} = \mathbf{k} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  – квазискорости системы,  $\mathbf{r} \in \Sigma$  – переменные (в общем случае – зависящие), от которых зависят положительно-определенная  $n \times n$  матрица  $\mathbf{A}$  кинетической энергии,  $m \times n$  – матрица  $\mathbf{B}$  интегралов Нётер и потенциальная энергия  $V$  системы,  $h$  – начальное значение полной энергии,  $\mathbf{k}$  – постоянные интегралов Нётер. Эти интегралы предполагаются независимыми, т.е.  $\text{rank } \mathbf{B} = m$  при  $\mathbf{r} \in \Sigma$ .

Согласно модифицированной теории Рауса [2–4] критические уровни полной энергии на фиксированных уровнях интегралов Нётер соответствуют инвариантным множествам системы. Учитывая структуру функций  $H$  и  $\mathbf{K}$ , задачу поиска инвариантных множеств можно решать в два этапа. На первом этапе находится единственная критическая точка (точка минимума) функции  $H$  по переменным  $\mathbf{v}$  на линейном многообразии  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$  (при этом переменные  $\mathbf{r}$  рассматриваются как параметры). Нетрудно показать, что

$$\min_{\mathbf{v}} H \Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{k}} = H(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \left( \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{k}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$$

$$V_{\mathbf{k}} = V + \frac{1}{2} \left( \left( \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{k}, \mathbf{k} \right) \quad (1.4)$$

Функция  $V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  называется приведенным или эффективным потенциалом.

На втором этапе находятся критические множества (в частности, точки) эффективного потенциала, удовлетворяющие уравнению

$$\delta V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = 0 \quad (1.5)$$

Пусть  $\gamma_1(\mathbf{k}), \gamma_2(\mathbf{k}), \dots$  – все решения уравнения (1.5). Критические множества  $\gamma_j(\mathbf{k})$  ( $j = 1; 2; \dots$ ) могут иметь различную размерность (в том числе, нулевую) и пересекаться при некоторых значениях  $\mathbf{k}_0$ :

$$\gamma_i(\mathbf{k}_0) = \gamma_j(\mathbf{k}_0) = \gamma_0 \quad (i, j = 1; 2; \dots; i \neq j)$$

Значения  $\mathbf{k}_0$  и соответствующие множества  $\gamma_0$  называются бифуркационными по Пуанкаре–Четаеву.

Критическим множествам  $\gamma_j(\mathbf{k}) \in \Sigma$  соответствуют инвариантные в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n \times \Sigma$  множества

$$\Gamma_j(\mathbf{k}) = \{ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}); \mathbf{r} \in \gamma_j(\mathbf{k}) \} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

Полная механическая энергия  $H$  сохраняет свое начальное значение на всех множествах (1.6). Будем называть объединение инвариантных множеств (1.6) полным, если функция  $H$  убывает на всех других движениях системы.

Зафиксируем постоянные интегралов Нётер  $\mathbf{k} = \mathbf{c}$ . Справедливы следующие утверждения [2–4].

*Теорема 1.* Если множество  $\gamma_j(\mathbf{c})$  компактно и доставляет эффективному потенциалу строго минимальное значение, то инвариантное множество  $\Gamma_j(\mathbf{c})$  устойчиво, если, кроме того, объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, а значения  $\mathbf{c}$

постоянных интегралов Нётер не являются бифуркационными, то любое возмущенное движение системы, близкое к движениям на множестве  $\Gamma_j(\mathbf{c})$ , стремится при  $t \rightarrow \infty$  к инвариантному множеству  $\Gamma_j(\mathbf{k})$ , соответствующему возмущенным значениям  $\mathbf{k} = \mathbf{c} + \delta\mathbf{c}$  постоянных интегралов Нётер.

*Теорема 2.* Если критическое множество  $\gamma_j(\mathbf{c})$  компактно, не доставляет эффективному потенциалу даже нестрого минимальное значение, объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, а значения  $\mathbf{c}$  постоянных интегралов Нётер не являются бифуркационными, то инвариантное множество  $\Gamma_j(\mathbf{c})$  неустойчиво.

Обобщенные диаграммы Смейла представляют собой в пространстве  $(\mathbf{k}; h)$  множество  $S$  поверхностей

$$h = h_j(\mathbf{k}) = V_{\mathbf{k}}(\gamma_j(\mathbf{k})) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Все точки, лежащие на множестве  $S$  инвариантны относительно фазового потока системы. Если объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, то все точки  $(\mathbf{k}; h)$ , не лежащие на множестве  $S$ , эволюционируют вдоль прямых  $\mathbf{k} = \text{const}$  в сторону уменьшения  $h$  и стремятся к одной из точек  $(\mathbf{k}, h_i(\mathbf{k}))$ , удовлетворяющей условию  $h_i(\mathbf{k}) < h$ . При этом, если есть только одна точка  $h_s(\mathbf{k}) < h$ , соответствующая минимуму эффективного потенциала на множестве  $\gamma_s(\mathbf{k})$  (в данном случае – глобальному на уровне  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ ), то  $h \rightarrow h_s(\mathbf{k})$  либо всегда (при условии, что на уровне  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$  нет никаких других точек  $(\mathbf{k}, h_i(\mathbf{k}))$ , удовлетворяющих неравенству  $h_i(\mathbf{k}) < h, i \neq s$ ), либо с вероятностью 1 (если иные точки есть, но они соответствуют не минимальным значениям эффективного потенциала на множествах  $\gamma_i(\mathbf{k})$ ). Если же при значениях функции  $H$ , меньших начального, есть несколько точек,  $(\mathbf{k}, h_{s_1}(\mathbf{k})), (\mathbf{k}, h_{s_2}(\mathbf{k})), \dots$ , которые соответствуют минимальным значениям эффективного потенциала на множествах  $\gamma_{s_1}(\mathbf{k}), \gamma_{s_2}(\mathbf{k}), \dots$  (одна глобальному, а остальные – локальным), то  $h$  может стремиться к  $h_{s_1}(\mathbf{k}), h_{s_2}(\mathbf{k})$ , с ненулевой вероятностью, причем сумма этих вероятностей равна 1. Здесь вероятность понимается как отношение меры множества начальных значений фазовых переменных задачи, для которых имеет место соответствующий предел  $h$ , к полной мере всех начальных значений.

Таким образом, обобщенные диаграммы Смейла позволяют определять предельные движения системы только по значениям постоянных интегралов Нётер и начальному значению полной механической энергии, причем в ряде случаев однозначно или с вероятностью 1.

**2. Волчок с вязким наполнителем.** Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с полостью, целиком заполненной однородной жидкостью. Предположим, что тело динамически симметрично, а полость представляет собой эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии тела, на которой расположен центр масс тела. Кроме того, предположим, что жидкость совершает простое [5] движение, причем взаимодействие жидкости со стенками полости описывается вязким трением, линейным по разности угловых скорости тела и половины вектора вихря жидкости.

Уравнения движения системы имеют вид [6]

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}] = \left[ \boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}_* \boldsymbol{\Omega}] = -\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_* = \text{diag}(A_1, A_1, A_3), \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_* = \text{diag}(B_1, B_1, B_3)$$

$$\mathbf{B}_* = B_1 \text{diag}(1, 1, 2a_1^2(a_1^2 + a_3^2)^{-1}), \quad \mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_1, D_3),$$

$\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость тела,  $\boldsymbol{\Omega}$  – половина вектора вихря жидкости,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор восходящей вертикали,  $V = mgs\gamma_3$  – потенциальная энергия ( $m$  – масса всей системы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $s$  – расстояние от неподвижной точки до центра масс системы),  $\mathbf{J}$  – тензор инерции тела для неподвижной точки,  $\mathbf{J}_*$  – тензор инерции эквивалентного [5] тела,  $\mathbf{I}$  – центральный тензор инерции жидкости, тензор  $\mathbf{D}$  характеризует интенсивность внутреннего трения ( $D_1 > 0$ ,  $D_3 > 0$ ),  $a_1, a_2 = a_1$  и  $a_3$  – полуоси полости; все тензоры и векторы задаются в главных осях инерции тела для неподвижной точки.

Уравнения движения системы (2.1)–(2.3) допускают невозрастающую вдоль решений этой системы функцию

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) + V(\boldsymbol{\gamma}) \leq h \quad (\dot{H} = -(\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) \leq 0) \quad (2.4)$$

интеграл

$$K = (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma}) = k \quad (2.5)$$

и геометрический интеграл

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \quad (2.6)$$

Последний определяет пространство положений вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ . Минимум функции (2.4) по  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  на линейном многообразии (2.5) достигается при

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \frac{k}{C(\boldsymbol{\gamma})} \boldsymbol{\gamma} \quad (2.7)$$

и определяет эффективный потенциал

$$V_k(\boldsymbol{\gamma}) = mgs\gamma_3 + \frac{k^2}{2C(\boldsymbol{\gamma})} \quad (2.8)$$

Здесь  $C(\boldsymbol{\gamma}) = C_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + C_3\gamma_3^2$ ,  $C_1 = A_1 + B_1 = J_1 + I_1$ ,  $C_3 = A_3 + B_3 = J_3 + I_3$ .

Критическим точкам эффективного потенциала (2.8) на сфере (2.6) соответствуют равномерные вращения системы как твердого тела вокруг вертикали (см. (2.7)) при вертикальном (если  $\gamma_3^2 = 1$ ) или наклонном (если  $\gamma_3^2 < 1$ ) положении оси симметрии тела, причем при  $\gamma_3 = -1$  центр масс системы занимает наинизшее, а при  $\gamma_3 = +1$  – наивысшее положение.

Сужение эффективного потенциала (2.8) на сферу (2.6) задается соотношением  $V_k = mgsf(x)$ , где

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \frac{p}{x^2 + c(1 - x^2)}$$

$$(x = \gamma_3 \in [-1; 1], \quad c = C_1/C_3 > 1/2, \quad p = k^2/C_3 mgs \geq 0)$$

Функция  $f(x)$  при любых значениях параметров  $c$  и  $p$  имеет критические точки  $x = \pm 1$ , которым соответствуют равномерные вращения системы вокруг вертикально расположенной оси симметрии. Внутренние критические точки функции  $f(x)$  определяются из уравнения  $f'(x) = df/dx = 0$ , где

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) - p}{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{[c + (1 - c)x^2]^2}{x(1 - c)}$$

Таким образом, внутренние критические точки удовлетворяют уравнению  $\varphi(x) = p > 0$  и существует либо при  $c > 1$  (при этом  $x \in (-1, 0)$ ), либо при  $c \in (1/2, 1)$  (при этом  $x \in (0, 1)$ ).

Точки  $x = \pm 1$  доставляют функции  $f(x)$  минимальное (максимальное) значение, если  $f'(1) < 0$  ( $> 0$ ),  $f'(-1) > 0$  ( $< 0$ ), а внутренние критические точки — если  $f''(x)|_{p=\varphi(x)} > 0$  ( $< 0$ ), т.е. если  $\varphi'(x)|_{p=\varphi(x)} > 0$  ( $< 0$ )

Нетрудно показать, что функция  $\varphi(x)$

а) при  $c > 1$  монотонно возрастает от  $p_0$  до  $+\infty$  при  $x \in (-1, 0)$ ;

б) при  $c \in [3/4, 1)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до  $p_0$  при  $x \in (0, 1)$ ;

в) при  $c \in (1/2, 3/4)$  монотонно убывает от  $+\infty$  до  $p_*$  при  $x \in (0, x_*)$  и монотонно возрастает от  $p_*$  до  $p_0$  при  $x \in (x_*, 1)$ .

Здесь

$$x_* = \sqrt{\frac{c}{3(1-c)}}, \quad p_0 = \frac{1}{|c-1|}, \quad p_* = \frac{16c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}\sqrt{1-c}}$$

Следовательно, точка  $x = -1$  доставляет функции  $f(x)$  минимальное значение при любых  $p$ , если  $c < 1$ , и только при  $p \leq p_0$ , если  $c > 1$ , а точка  $x = +1$  доставляет функции  $f(x)$  минимальное значение только при  $c < 1$  и  $p > p_0$  (а также при  $p = p_0$ , если  $c < 3/4$ ). Внутренние критические точки доставляют функции  $f(x)$  минимальное значение при  $c > 1$ , если  $p > p_0$ , и при  $c \in (1/2, 3/4)$ , если  $p \in (p_*, p_0)$ .

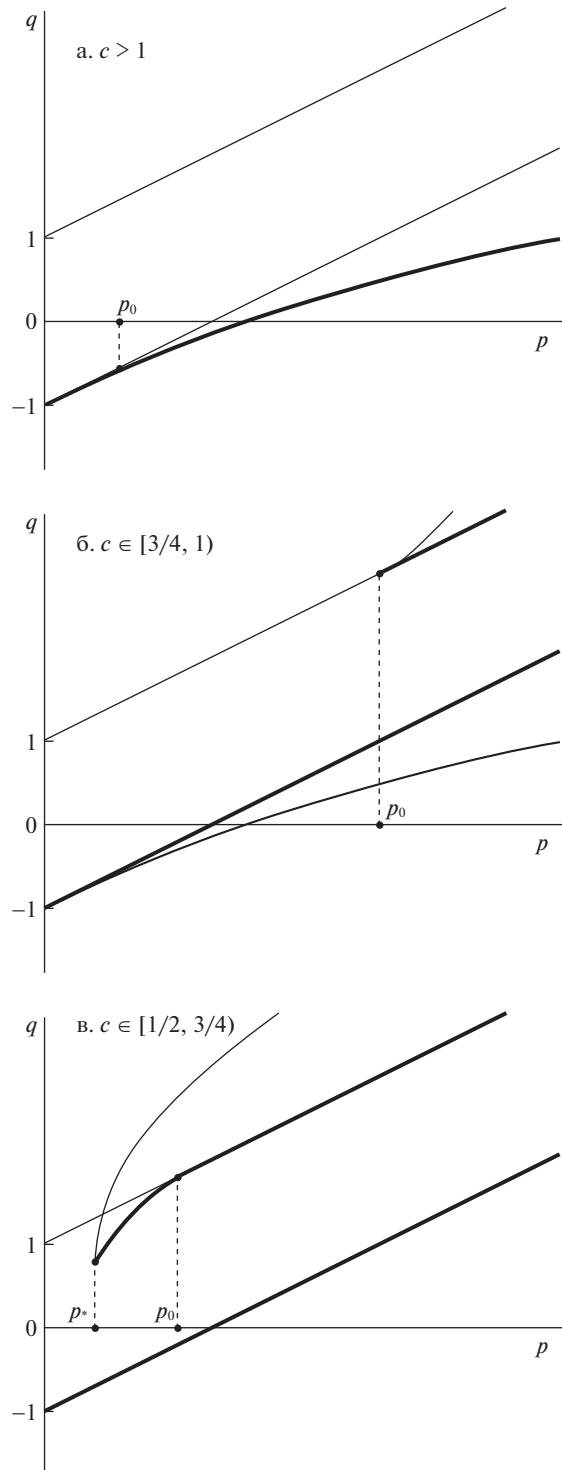
Таким образом, атлас обобщенных диаграмм Смейла состоит из трех карт (см. рис. 1). На этом рисунке  $q = h/mgs$  — безразмерное начальное значение полной энергии, прямые  $q = \pm 1 + p/2$  соответствуют критическим точкам  $x = \pm 1$ , а кривые  $q = q(p)$  задаются параметрически соотношениями

$$q = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(x)}{x^2 + c(1 - x^2)}, \quad p = \varphi(x) \tag{2.9}$$

— внутренним критическим точкам функции  $f(x)$ , полужирные линии соответствуют устойчивым движениям системы. Бифуркационное по Смейлу множество  $S$  представляет собой совокупность всех этих кривых и прямых.

Нетрудно показать, (см. уравнения (2.1)–(2.3)), что функция  $H$  сохраняет свое начальное значение только на равномерных вращениях системы как твердого тела вокруг вертикали. Следовательно, любая точка плоскости  $(p, q)$ , удовлетворяющая условию  $q > q_{\min}$ , где  $q_{\min} = \min f(x)$  (при  $q < q_{\min}$  движение невозможно) и не лежащая на множестве  $S$ , движется под действием фазового потока системы (2.1)–(2.3) вдоль прямой  $p = \text{const}$  сверху вниз, асимптотически приближаясь к точке  $(p; q_\infty)$ , принадлежащей множеству  $S$ .

Пусть, например,  $c \in [3/4, 1)$  (см. рисунок (б)). Если  $p < p_0$  и  $q < 1 + p/2$  ( $q > 1 + p/2$ ), то однозначно (с вероятностью 1) предельным движением системы будет вращение вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наименьшем расположении центра масс. Если  $q < 1 + p/2$ , то аналогичное утверждение справедливо при  $p \geq p_0$ . Если же  $p > p_0$  и  $q > 1 + p/2$ , то предельными движениями систе-



мы с ненулевой вероятностью могут быть равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси симметрии как при наимизшем, так и при наивысшем положении центра масс. В случае  $c > 1$  и  $c \in (1/2, 3/4)$  предельными движениями могут быть равномерные вращения системы и при наклонном положении оси симметрии. В первом случае (см. рисунок (а)) при  $p > p_0$  либо однозначно (если  $q < -1 + p/2$ ), либо с вероятностью 1 (если  $q > -1 + p/2$ ), а во втором случае (см. рисунок (в)) при  $p \in (p_*, p_0)$  только с ненулевой вероятностью и только при  $q > q(p)$ , где  $q(p)$  определяется соотношением (2.9) для  $x \in (x_*, 1)$ .

**Заключительные замечания.** Приведенные в разд. 1 результаты очевидным образом распространяются на случай, когда функции  $H$  и  $\mathbf{K}$  (см. (1.1) и (1.2)) содержат дополнительные слагаемые  $(\mathbf{a}(\mathbf{r}), \mathbf{v})$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  соответственно ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ). При этом усложняются формулы (1.3) и (1.4), а все утверждения разд. 1 сохраняют справедливость.

Кроме того, приведенные в разд. 1 результаты могут быть использованы для качественного анализа диаграмм систем с полной диссипацией, если диссипативные силы зависят от малого параметра и при нулевом его значении обладают только частичной диссипацией и допускают линейные по квазискоростям интегралы. Следовательно, при нулевом значении малого параметра можно построить обобщенные диаграммы Смейла. При ненулевом значении малого параметра разрушаются как первые интегралы, так и все инвариантные множества, кроме тривиальных, соответствующих состояниям равновесия системы. Первые интегралы переходят в медленно меняющиеся (по сравнению с полной механической энергией) функции, а нетривиальные инвариантные множества — в квазиинвариантные множества. Пусть  $(\mathbf{k}, h)$  — произвольная точка начальных значений функций (1.1) и (1.2). Под действием фазового потока системы эта точка начинает “быстро” двигаться в сторону уменьшения  $h$  в окрестности прямой  $\mathbf{k} = \text{const}$  и за конечное время оказывается в окрестности бифуркационного (для нулевого значения малого параметра) множества  $S$ . Затем эта точка “медленно” движется в сторону уменьшения  $h$  в окрестности множества  $S$  и в пределе стремится к одному из состояний равновесия системы (с нулевой вероятностью — к неустойчивому и с ненулевой — к устойчивому).

Этот метод качественного анализа диссипативных систем неоднократно применялся в задаче о движении волчка тип-топ для различных видов трения в точке контакта волчка с опорной плоскостью (см. [7–12]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 19-01-00140.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smale S. Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. V. 10. P. 305–311; 1970. V. 11. P. 45–64.
2. Карпетян А.В. Первые интегралы инвариантные множества и бифуркации в диссипативных системах // РХД. 1997. Т. 2. № 1. С. 75–80.
3. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems // in: Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications. Wien; New York: Springer, 1998. P. 153–210.
4. Карпетян А.В. Устойчивость и бифуркация движений. М.: МГУ, 2020.
5. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
6. Карпетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С. Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений твердого тела с жидким наполнителем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 994–998.
7. Карпетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики волчка тип-топ // Изв. РАН МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.

8. Зобова А.А., Карапетыан А.В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73. № 6. С. 867–877.
9. Зобова А.А. Различие модели трения в динамике двусферического волчка // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 21–28
10. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 194–206.
11. Karapetyan A.V., Zobova A.A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. № 6. P. 1007–1013.
12. Мунициына М.А. Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 426–434.

### Generalized Smale Diagrams for Dissipative Systems with Symmetry

**A.V. Karapetyan**<sup>\*,#</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

The problem of a global qualitative analysis of the dynamics of dissipative systems with symmetry based on generalized Smale diagrams is discussed. The general statements are illustrated by the example of the problem of the motion of a top with a viscous filler.

*Keywords:* Smale diagrams, dissipative systems with symmetry, invariant sets

### REFERENCES

1. Smale S. Topology and mechanics // *Invent. Math.*, 1970, vol. 10, pp. 305–311; 1970, vol. 11, pp. 45–64.
2. Karapetyan A.V. First integrals, invariant sets and bifurcations in dissipative systems // *R&C Dyn.*, 1997, vol. 2, no. 1, pp. 75–80.
3. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems // in: *Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications*. Wien; N.Y.: Springer, 1998. pp. 153–210.
4. Karapetyan A.V. *Stability and Bifurcation of Movements*. Moscow: MSU, 2020. (in Russian)
5. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dynamics of Bodies with Cavities Containing Fluid*. Moscow: Nauka, 1965.
6. Karapetyan A.V., Samsonov V.A., Sumin T.S. The stability and branching of the permanent rotations of a rigid body with a fluid filling // *JAMM*, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 893–897.
7. Karapetyan A.V. Global qualitative analysis of tippe top dynamics // *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 342–348.
8. Zobova A.A., Karapetyan A.V. Analysis of the steady motions of the tippe top // *JAMM*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 623–630.
9. Zobova A.A. Various Friction Models in Two-Sphere Top Dynamics // *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 134–139.
10. Zobova A.A. A review of models of distributed dry friction // *JAMM*, 2016, vol. 80, iss. 2, pp. 141–148.
11. Karapetyan A.V., Zobova A.A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 6, pp. 1007–1013.
12. Munitsyna M.A. Transition Processes in Tippe-Top Dynamics // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1178–1184.