ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 4, с. 503–515

УДК 531.1:521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БЛИЗКОЙ К КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев[1,2,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2] *Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*
**e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.
После доработки 11.03.2021 г.
Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается ограниченная задача трех тел (материальных точек). Предполагается, что орбиты основных притягивающих тел представляют собой эллипсы малого эксцентриситета, а пассивно гравитирующее тело при своем движении может выходить из плоскости орбит основных тел (пространственная задача). Исследуется устойчивость движения этого тела, отвечающего треугольным лагранжевым точкам либрации. Характерной особенностью рассматриваемой пространственной задачи является наличие резонанса, обусловленного равенством периода кеплеровского движения основных тел и периода линейных колебаний пассивно гравитирующего тела по направлению, перпендикулярному плоскости их орбит. При помощи методов классической теории возмущений, КАМ-теории и алгоритмов компьютерной алгебры исследована нелинейная задача об устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и задача о формальной устойчивости (устойчивости в любом сколь угодно высоком конечном приближении относительно координат и импульсов возмущенного движения).

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, треугольные точки либрации, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823521040093

Уравнения движения ограниченной задачи трех тел допускают [1, 2] пять точных решений, для которых три тела либо располагаются вдоль одной прямой (прямолинейные точки либрации, открытые Л. Эйлером в 1757 г. [3]), либо образуют равносторонний треугольник, лежащий в плоскости орбит основных притягивающих тел (треугольные точки либрации, их существование показано Ж. Лагранжем в 1772 г. [4]).

Задаче об устойчивости точек либрации и о характере близких к ним движений посвящено очень много исследований. Достаточно подробное обсуждение полученных результатов содержится в публикациях [2, 5–11] и в приведенной в них библиографии.

К настоящему времени значительное развитие получили задача о решениях, аналогичным точкам либрации, в случае произвольного числа тел [12–15], а также задача о существовании и устойчивости точек либрации при учете светового давления [16–18].

Исследования о точках либрации представляют не только теоретический интерес. Существуют проекты запуска искусственных спутников в окрестности точек либрации Солнечной системы и, прежде всего, системы Земля–Луна, направленные на использование точек либрации для решения практических задач космических исследований. Ряд таких проектов уже осуществлен [19–21].

Цель статьи состоит в численно-аналитическом исследовании нелинейной задачи об устойчивости треугольных точек либрации в случае, когда эксцентриситет орбит основных тел мал, а пассивно гравитирующее тело может совершать произвольное пространственное движение вблизи точек либрации.

1. Введение. Расмотрим три тела (материальные точки) P_1, P_2 и P_3, движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что масса точки P_3 пренебрежимо мала по сравнению с массами m_1 и m_2 точек P_1 и P_2, и, следовательно, движение точки P_2 относительно точки P_1 определяется из задачи двух тел (материальных точек). Пусть орбита точки P_2 в ее движении относительно точки точки P_1 является эллипсом с эксцентриситетом e.

Через X, Y, Z обозначим координаты точки P_3 в системе координат $OXYZ$ с началом в центре масс тел P_1 и P_2 и осью OX, направленной по прямой P_1P_2 в сторону точки P_2; направление кратчайшего поворота оси OX к оси OY совпадает с направлением вращения точки P_2 относительно P_1. Пусть R – расстояние между точками P_1 и P_2. Введем координаты Нехвилла $x = X/R$, $y = Y/R$, $z = Z/R$, а в качестве независимой переменной примем истинную аномалию ν в эллиптическом движении точки P_2. Дифференциальные уравнения движения точки P_3 можно получить [1, 2] в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона Γ вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{e\cos\nu}{2(1 + e\cos\nu)}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1 + e\cos\nu}\Pi$$

$$\Pi = -\frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(0 < \mu \le \frac{1}{2}\right) \tag{1.1}$$

$$R_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2}$$

Соответствующие этой функции уравнения движения допускают следующее решение

$$x_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0, \quad p_{x_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{y_0} = \frac{1-2\mu}{2}, \quad p_{z_0} = 0, \tag{1.2}$$

отвечающее треугольной точке либрации.

Введем возмущения u_j, v_j $(j = 1, 2, 3)$, положив

$$x = x_0 + u_1, \quad y = y_0 + u_2, \quad z = u_3, \quad p_x = p_{x_0} + v_1, \quad p_y = p_{y_0} + v_2, \quad p_z = v_3$$

В переменных u_j, v_j невозмущенное движение (1.2) будет положением равновесия $u_j = v_j = 0$.

Линейным уравнениям возмущенного движения отвечает квадратичная часть Γ_2 в разложении функции Гамильтона (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \cdots, \tag{1.3}$$

где Γ_m – форма степени m относительно u_j, v_j с 2π-периоическими по ν коэффициентами. Не зависящее от u_j, v_j слагаемое в (1.3) отброшено.

В случае круговой задачи ($e = 0$) точки либрации устойчивы в первом приближении, если параметр μ лежит в интервале

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.03852...$$

При малых e из точки $\mu = \mu_0$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.02860...$$

этого интервала исходит область неустойчивости (область параметрического резонанса) [1, 2]. Далее будем считать, что μ лежит в одном из интервалов

$$0 < \mu < \mu_0 \quad \text{или} \quad \mu_0 < \mu < \mu_* \tag{1.4}$$

Для таких значений μ треугольные точки либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел устойчивы в первом (линейном) приближении, если эксцентриситет e достаточно мал. Для $\mu > \mu_*$ точки либрации при малых e неустойчивы по Ляпунову (не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости) [1, 2].

При $e = 0$ частоты малых колебаний в окрестности точек либрации равны ω_1, ω_2 и 1, причем ω_1 и ω_2 являются корнями уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \tag{1.5}$$

В рассматриваемых областях (1.4) изменения параметра μ величины ω_1 и ω_2 удовлетворяют неравенствам

$$1 > \omega_1 > \sqrt{2}/2 > \omega_2 > 0, \quad \omega_2 \neq 1/2 \tag{1.6}$$

Для значений μ из промежутков (1.4) характеристические показатели, определяемые линейными уравнениями с 2π-периодическими коэффициентами, задаваемыми квадратичной частью Γ_2 функции Гамильтона возмущенного движения (1.3), будут при малых e чисто мнимыми величинами $\pm i\lambda_j$ $(j = 1, 2, 3)$, где i – мнимая единица, а λ_j – вещественные числа любого знака (причем $|\lambda_3| = 1$ при любых μ и e). Если величины λ_j таковы, что

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = N, \tag{1.7}$$

где N, k_1, k_2, k_3 – целые числа, причем $|k_1| + |k_2| + |k_3| = k$, то в изучаемой системе реализуется резонанс порядка k. В задаче об устойчивости наиболее важными являются резонансы низких порядков (до четвертого порядка включительно).

Отметим, что изучаемая в данной статье пространственная задача при любых значениях параметров μ и e является резонансной, так как $|\lambda_3| = 1$. Для случая плоской задачи, когда пассивно гравитирующая точка P_3 во все время движения остается в плоскости орбит основных точек P_1 и P_2, в резонансном соотношении (1.7) следует положить $k_3 = 0$ и оно принимает вид

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N \tag{1.8}$$

Для значений μ из промежутков (1.4) при достаточно малых e все шесть корней характеристического уравнения матрицы монодромии линейных уравнений возмущенного движения с функцией Гамильтона Γ_2 имеют модули, равные единице, а сама матрица приводится к диагональной форме. Поэтому [22] точки либрации устойчивы в первом (линейном) приближении. При строгом же решении вопроса об устойчивости необходим нелинейный анализ. Для его осуществления целесообразно сначала преобразовать квадратичную часть Γ_2 функции (1.3) к вещественной нормальной форме. Это можно сделать [23] при помощи линейной, аналитической по e канонической замены переменных $u_j, v_j \to y_j, Y_j$. Эта замена осуществляется в два этапа. Сначала делается замена $u_j, v_j \to x_j, X_j$, приводящая функцию Γ_2 в случае круговой задачи (когда $e = 0$) к сумме гамильтонианов трех, не связанных один с другим, гармонических осцилляторов с частотами ω_1, ω_2 и 1. А затем при помощи метода Деприи–Хори теории возмущений [24, 25] делается линейная, 2π-периоическая по ν каноническая замена переменных $x_j, X_j \to y_j, Y_j$, задаваемая сходящимися при малых e рядами. Преобразованная к нормальным координатам y_j, Y_j функция Γ_2 имеет вид [23]

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j(y_j^2 + Y_j^2) \tag{1.9}$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + O(e^2), \quad \lambda_2 = -\omega_2 + O(e^2), \quad \lambda_3 = 1, \tag{1.10}$$

где величины $O(e^2)$ – не зависящие от ν функции параметров μ и e.

Далее исследуется нелинейная задача об устойчивости невозмущенного движения $u_j = v_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Будет рассмотрена устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий $u_j(0)$, $v_j(0)$ и формальная устойчивость (устойчивость при учете в разложении (1.3) форм Γ_m до сколь угодно высокой конечной степени).

2. Устойчивость для большинства начальных условий (см. [26–30]). В рассматриваемых интервалах (1.4) изменения параметра μ в случае плоской эллиптической задачи малого эксцентриситета возможны пять резонансов (1.8) третьего и восемь резонансов четвертого порядка ([2], стр. 155 и 156). Задача об устойчивости для большинства начальных условий в плоском случае при отсутствии этих резонансов рассмотрена в гл. 9 книги [2]. Обзор недавних исследований можно найти в работе [31].

Ниже исследуется вопрос об устойчивости для большинства начальных условий в случае пространственной эллиптической задачи при малых значениях эксцентриситета e. Предполагается, что значения параметров μ и e лежат вне кривых резонансов третьего и четвертого порядков.

2.1. О нормальной форме функции Гамильтона (1.3), вычисленной до членов четвертого порядка включительно. После линейного преобразования $u_j, v_j \to y_j, Y_j$, приводящего квадратичную часть функции (1.3) к нормальной форме (1.9), сделаем, следуя [2], близкое к тождественному 2π-периодическое по ν, аналитическое относительно e и q_j, p_j нелинейное каноническое преобразование $y_j, Y_j \to q_j, p_j$. Это преобразование приводит функцию Гамильтона возмущенного движения к ее нормальной форме с точностью до членов четвертой степени включительно относительно q_j, p_j. Показано [2], что новым переменным отвечает функция Гамильтона вида

$$\begin{aligned} H = {} & \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3 + f_{200} r_1^2 + f_{110} r_1 r_2 + f_{020} r_2^2 + \\ & + (f_{101} r_1 + f_{011} r_2 + f_{002} r_3) r_3 + H' \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь φ_j, r_j – симплектические полярные координаты:

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

а $H' = O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2})$ – 2π-периодическая относительно φ_j и ν функция. Коэффициенты $f_{200}, f_{110}, f_{020}$ не зависят от ν, причем

$$f_{200} = c_{200}(\mu) + O(e^2), \quad f_{110} = c_{110}(\mu) + O(e^2), \quad f_{020} = c_{020}(\mu) + O(e^2) \tag{2.2}$$

$$
\begin{gathered}
c_{200} = \frac{\omega_2^2(124\omega_1^4 - 696\omega_1^2 + 81)}{144(1-2\omega_1^2)^2(1-5\omega_1^2)} \\
c_{110} = -\frac{\omega_1\omega_2(64\omega_1^2\omega_2^2 + 43)}{6(1-2\omega_1^2)(1-2\omega_2^2)(1-5\omega_1^2)(1-5\omega_2^2)} \\
c_{020} = \frac{\omega_1^2(124\omega_2^4 - 696\omega_2^2 + 81)}{144(1-2\omega_2^2)^2(1-5\omega_2^2)}
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Выражения (2.3) впервые получены в работе [32].

Остальные три коэффициента квадратичной относительно r_1, r_2, r_3 части функции (2.1) зависят от переменных ν и φ_3, от φ_1 и φ_2 они не зависят. Их структура такова:

$$
\begin{gathered}
f_{101} = c_{101}(\mu) + x_{101} + y_{101}\sin 2\varphi + z_{101}\cos 2\varphi \\
f_{002} = c_{002}(\mu) + x_{002} + y_{002}\sin 2\varphi + z_{002}\cos 2\varphi + u_{002}\sin 4\varphi + v_{002}\cos 4\varphi \\
f_{011} = c_{011}(\mu) + x_{011} + y_{011}\sin 2\varphi + z_{011}\cos 2\varphi \quad \varphi = \varphi_3 - \nu
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Величины x, y, z, u, v с индексами – функции от μ и e. Все они имеют порядок e^2, кроме u_{002} и v_{002}, которые имеют порядок e^4. Величины c_{101}, c_{011} и c_{002} вычисляются по формулам из статьи [33]:

$$
\begin{gathered}
c_{101} = -\frac{8\omega_1\omega_2^2}{3(1-2\omega_1^2)(4-\omega_1^2)} \\
c_{011} = \frac{8\omega_1^2\omega_2}{3(1-2\omega_2^2)(4-\omega_2^2)} \\
c_{002} = -\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{3(4-\omega_1^2)(4-\omega_2^2)}
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

Функцию (2.1) можно упростить , сделав каноническую замену переменных

$$
\varphi_1 \to \psi_1, \quad \varphi_2 \to \psi_2, \quad \varphi_3 \to \nu + \psi_3, \quad r_j \to r_j \quad (j = 1, 2, 3)
$$

Новая функция Гамильтона не будет содержать r_3 в ее линейной относительно r_j части, а в функциях $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ величины $2(\varphi_3 - \nu)$ и $4(\varphi_3 - \nu)$ заменяются на $2\psi_3$ и $4\psi_3$, соответственно. Таким образом, получим преобразованную функцию Гамильтона

$$
H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + f_{200}r_1^2 + f_{110}r_1r_2 + f_{020}r_2^2 + f_{101}r_1r_3 + f_{011}r_2r_3 + f_{002}r_3^2 + H'', \tag{2.6}
$$

где $H'' = O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2})$ – 2π-периодическая по $\nu, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ функция; коэффициенты $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ в (2.6) зависят только от μ, e, ψ_3, от ν они не зависят.

Отбросив в (2.6) величину H'', получим систему с укороченной функцией Гамильтона $h = H - H''$. При достаточно малых e равновесие $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ этой системы устойчиво по Ляпунову. Это легко усмотреть [2], так как при $e = 0$ имеем

$$
f_{002} = c_{002}(\mu) = -\frac{3\mu(1-\mu)}{16 + 9\mu(1-\mu)} < 0 \tag{2.7}
$$

При малых e движение, описываемое укороченным гамильтонианом имеет колебательный характер.

2.2. Выражение укороченного гамильтониана через переменные действия. При малых e введем переменные действия I_1, I_2, I_3 и запишем укороченный гамильтониан $H - H''$ через эти переменные.

Так как в укороченной системе углы ψ_1, ψ_2 циклические, то переменные I_1, I_2 — это соответствующие импульсы r_1, r_2 и из интеграла $H - H'' = h = \mathrm{const}$ следует, что

$$f_{101}r_1r_3 + f_{011}r_2r_3 + f_{002}r_3^2 = \tilde{h} = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

$$\tilde{h} = h - (\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + f_{200}I_1^2 + f_{110}I_1I_2 + f_{020}I_2^2) \tag{2.9}$$

Из (2.8) находим

$$r_3 = \sqrt{\frac{\tilde{h}}{f_{002}}} - \frac{1}{2f_{002}}(f_{101}I_1 + f_{011}I_2) + O((I_1 + I_2)^2) \tag{2.10}$$

Третья из переменных действие I_3 определяется равенством

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\oint r_3 d\psi_3, \tag{2.11}$$

где интеграл вычисляется по кривой, отвечающей колебательному движению в окрестности равновесия при заданных I_1, I_2 и h. Из (2.10), (2.11) и равенств (2.4) получаем

$$I_3 = \sqrt{\frac{\tilde{h}}{c_{002}}} - \frac{1}{2c_{002}}(c_{101}I_1 + c_{011}I_2) + O((I_1 + I_2)^2) + O(e^2) \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.9) (с учетом равенств (1.10) и (2.4)) получаем искомое выражение укороченного гамильтониана через переменные действия:

$$h = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + c_{200}I_1^2 + c_{110}I_1I_2 + c_{020}I_2^2 + c_{101}I_1I_3 + c_{011}I_2I_3 + c_{002}I_3^2 \tag{2.13}$$

В (2.13) отброшены члены выше второй степени относительно I_1, I_2, I_3, а во всех коэффициентах отброшены слагаемые порядка e^2 и выше.

2.3. Устойчивость для большинства начальных условий. Достаточное условие устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий записывается в виде следующего неравенства [29, 30]:

$$D_3 = \det\left\|\frac{\partial^2 h}{\partial I_i \partial I_j}\right\|_{i,j=1}^{3} = \begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.14}$$

Проведя некоторые преобразования, учитывающие выражения (2.3), (2.5) и уравнение (1.5), для определителя (2.14) можно получить такое представление:

$$D_3 = -\frac{f}{7776(u-4)^2(4u-25)^2(12u+1)^2}, \tag{2.15}$$

где

$$u = \frac{1}{\omega_1^2\omega_2^2} = \frac{4}{27\mu(1-\mu)}, \tag{2.16}$$

а f — многочлен четвертой степени относительно u,

$$f = 66\,258\,000u^4 - 637\,971\,912u^3 + 1\,253\,184\,093u^2 - 299\,701\,528u + 384\,400.$$

Корни u_s $(s = 1,2,3,4)$ этого многочлена таковы:

$$u_1 = 0.0012\ldots, \quad u_2 = 0.2755\ldots, \quad u_3 = 2.3222\ldots, \quad u_4 = 7.0295\ldots$$

Но в рассматриваемых промежутках (1.4) изменения параметра μ для величины u из (2.16) имеет место неравенство $u > 4$. Поэтому из четырех корней смыслу задачи отвечает наибольший корень u_4. Точное выражение для этого корня записывается через радикалы:

$$u_4 = \frac{\sqrt{\alpha - \gamma\sqrt{\beta}\sin(\chi + \pi / 6)} + \sqrt{\alpha + \gamma\sqrt{\beta}\sin(\chi - \pi / 6)} + \sqrt{\alpha + \gamma\sqrt{\beta}\cos\chi}}{3\,681\,000}$$

$$\alpha = 35\,799\,685\,470\,091, \quad \beta = 153\,175\,407\,602\,285\,586\,489, \quad \gamma = 2750$$

$$\chi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\,684\,223\,905\,679\,758\,932\,447\,679}{305\,225\,753\,078\,723\sqrt{\beta}}\right)$$

Найденному значению u_4 корня уравнения $D_3 = 0$ соответствует значение $\mu = \mu_{**}$, где

$$\mu_{**} = 0.02154\ldots \tag{2.17}$$

Таким образом показано, что, если $\mu \neq \mu_{**} + O(e^2)$, то при достаточно малых значениях e условие устойчивости для большинства начальных условий выполнено.

Если параметры μ и e не лежат на кривой $\mu = \mu_{**} + O(e^2)$, на которой $D_3 = 0$, то большинство траекторий $u_j(\nu)$, $v_j(\nu)$ $(j = 1, 2, 3)$ системы с функцией Гамильтона (1.3), удовлетворяющих в начальный момент $\nu = 0$ условию $I(0) = \sum_{j=1}^{3}(u_j^2(0) + v_j^2(0)) < \varepsilon$, при всех ν остается в малой окрестности невозмущенного движения $u_j = v_j = 0$. Множество начальных условий упомянутого “большинства” имеет относительную меру, не меньшую $1 - O(\varepsilon^{1/4})$.

Траектории начинающиеся в дополнении к множеству “большинства” начальных условий, могут, вообще говоря, уйти далеко от их начального положения. Но, как показано Н. Нехорошевым [34–36], при отсутствии резонансов (1.7) до некоторого достаточно высокого порядка, почти для всякой системы с функцией Гамильтона (1.3) существуют положительные числа a и b такие, что отклонение величины $I(\nu)$ от ее начального значения $I(0)$ не превосходит величину порядка ε^b при всех ν, удовлетворяющих неравенству

$$0 \le \nu \le \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$$

Функции, для которых эти оценки не имеют места , представляют собой очень редкое исключение: коэффициенты разложения в ряд этих функций должны удовлетворять бесконечному числу независимых алгебраических уравнений. Эти исключительные функции не удовлетворяют некоторым (довольно громоздко формулируемым) требованиям, названными в [34–36] условиями крутизны.

3. Формальная устойчивость (см. [37–44]). Понятие формальной устойчивости введено Ю. Мозером для гамильтоновых систем, обладающих знакоопределенным формальным интегралом, представляющим собой степенной ряд, возможно расходящийся. Это понятие является очень важным при исследовании устойчивости на конечном (но очень большом) интервале времени. Наличие формальной устойчивости означает, что неустойчивость по Ляпунову (если она в рассматриваемой задаче есть) не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона членов до сколь угодно большого (но конечного) порядка относительно координат и импульсов возмущенного движения. При наличии формальной устойчивости, если и существуют тректории, уходящие далеко от невозмущенного движения, то движение по ним происходит крайне медленно. Соответствующие оценки получены Ю. Мозером [38, 39], К. Зигелем [41], Дж. Глиммом [42], Н. Нехорошевым [35, 36] и др. (см [30, 44]).

Формальная устойчивость лагранжевых решений плоской эллиптической задачи исследована ранее ([2], гл. 9). В этом разделе рассматривается пространственная задача.

Будем предполагать, что эксцентриситет e — малая величина и для любых целых k_1, k_2, N параметры μ и e лежат вне резонансных кривых (1.8); тогда в изучаемой системе возможен только один резонанс $\lambda_3 = 1$ (тождественный, существующий в пространственной задаче при всех μ и e). Покажем, что при сделанных предположениях лагранжевы решения формально устойчивы.

После описанной в разд. 1 линейной замены переменных $u_j, v_j \to y_j, Y_j$, приводящей квадратичную часть функции Гамильтона (1.3) к ее нормальной форме (1.9), сделаем близкое к тождественному нелинейное 2π-периодическое по ν каноническое преобразование $y_j, Y_j \to \xi_j, \eta_j$, которое приводит функцию (1.3) к ее нормальной форме во всех порядках относительно новых переменных ξ_j, η_j. Это преобразование аналогично аналитическому преобразованию $y_j, Y_j \to q_j, p_j$ предыдущего раздела, но в отличие от него задается формальными (возможно, расходящимися) рядами. Не останавливаясь на подробностях, отметим только, что нормализованная функция Гамильтона не содержит форм нечетной степени относительно ξ_j, η_j $(j = 1, 2, 3)$.

Нормальную форму удобно представить в симплектических полярных координатах θ_j, ρ_j

$$\xi_j = \sqrt{2\rho_j}\sin\theta_j, \quad \eta_j = \sqrt{2\rho_j}\cos\theta_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

Несложно показать, что нормальная форма не зависит от углов θ_1, θ_2, а от θ_3 она будет зависеть только через посредство комбинации $\theta_3 - \nu$. Эта комбинация содержится в нормальной форме в виде синусов и косинусов от величины $2p(\theta_3 - \nu)$, где $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Такая структура нормальной формы обусловлена наличием тождественного резонанса и тем, что сумма показателей степеней возмущений u_3 и v_3 в каждом члене разложения (1.3) является четным числом. Нормализованную функцию Гамильтона можно записать в следующем виде:

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \rho_3 + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{l+m+n=r} a_{lmn}\, \rho_1^l \rho_2^m \rho_3^n \tag{3.1}$$

Здесь a_{lmn} — функции от μ, e и $\theta_3 - \nu$, причем $a_{lm0} = d_{lm0}(\mu, e)$ зависит только от μ, e, а при $n \geq 1$

$$a_{lmn} = d_{lmn}(\mu, e) + \sum_{p=1}^{n} \left\{ c_{lmn}^{(p)}(\mu, e)\cos[2p(\theta_3 - \nu)] + s_{lmn}^{(p)}(\mu, e)\sin[2p(\theta_3 - \nu)] \right\} \tag{3.2}$$

При малых e справедливы равенства

$$d_{lm0} = c_{lm0}(\mu) + O(e^2), \quad d_{lmn} = c_{lmn}(\mu) + O(e^2), \quad c_{lmn}^{(p)} = O(e^{2p}), \quad s_{lmn}^{(p)} = O(e^{2p}) \tag{3.3}$$

Если вместо θ_3 ввести переменную $\theta + \nu$, а остальные переменные ρ_1, ρ_2, ρ_3 оставить без изменения, то в нормальной форме (3.1) исчезает ρ_3 из части, линейной относительно ρ_1, ρ_2, ρ_3, а сама функция Гамильтона не будет содержать независимую переменную ν:

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{l+m+n=r} a_{lmn}\, \rho_1^l \rho_2^m \rho_3^n, \tag{3.4}$$

где по-прежнему $a_{lm0} = d_{lm0}(\mu, e)$, а при $n \geq 1$

$$a_{lmn} = d_{lmn} + \sum_{p=1}^{n} \left[c_{lmn}^{(p)} \cos 2p\theta + s_{lmn}^{(p)} \sin 2p\theta \right] \tag{3.5}$$

Система с функцией Гамильтона (3.4) имеет три формальных интеграла $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ и $H = \text{const}$. Для доказательства формальной устойчивости рассмотрим функцию

$$V = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (H - \lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2)^2$$

При малых ρ_1, ρ_2, ρ_3 ее можно записать в виде

$$V = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \left[\sum_{l+m+n=2} a_{lmn}\rho_1^l\rho_2^m\rho_3^n + O\left((\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^3\right) \right]^2 \tag{3.6}$$

При $\rho_1 = \rho_2 = 0$ выражение в квадратных скобках в правой части равенства (3.6) равно $a_{002}\rho_3^2 + O(\rho_3^3)$, где, согласно (3.2)–(3.5), $a_{002} = c_{002}(\mu) + O(e^2)$. Но, в соответствии с (2.7), величина $c_{002}(\mu) < 0$. Поэтому для каждого из рассматриваемых значений (1.4) параметра μ при достаточно малых e функция V неотрицательна, причем $V = 0$ только при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, то есть V — формальный определенно-положительный интеграл. Формальная устойчивость доказана.

Заключение. Исследована устойчивость треугольных лагранжевых решений пространственной слабоэллиптической ограниченной задачи трех тел для значений параметра μ, лежащих в областях (1.4) устойчивости в первом приближении.

1. Для значений параметров μ, e, лежащих вне кривых (1.8) резонансов третьего и четвертого порядков и не попадающих на кривую вырождения $\mu = \mu_{**} + O(e^2)$ нормальной формы (2.13) (μ_{**} задается равенством (2.17)), доказана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. Вопрос об устойчивости на кривой вырождения должен решаться при учете в нормальной форме функции Гамильтона членов не ниже шестой степени относительно координат и импульсов возмущенного движения.

2. В предположении об отсутствии резонансов (1.8) плоской задачи до сколь угодно высокого порядка доказана формальная устойчивость.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. V. 11. P. 144–151.
4. *Lagrange J.L.* Essai sur le Problème des Trois Corps. Oeuvres de Lagrange. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. P. 229–324.
5. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 327–401.
6. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J. 1964. V. 69. Iss. 2. P. 165–172.

7. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1971. V. 4. Iss. 3/4. P. 468–489.
8. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J. 1970. V. 8. Iss. 2. P. 221–223.
9. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н.* Бифуркация 4π-периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Астрон. ж. 2009. Т. 86. № 2. С. 170–174.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 430. Iss. 4. P. 2755–2760.
11. *Исанбаева Н.Р.* О построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Башкирск. унив. Математика и механика. 2017. Т. 22. № 1. С. 5–9.
12. *Симо К.* Периодические траектории плоской задачи N тел с равными массами и телами, движущимися по одной и той же траектории // Сб. работ “Относительные равновесия. Периодические решения”. М.; Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2006. С. 175–201.
13. *Whipple A.L., Szebehely V.* The restricted problem of $n + \nu$ bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1984. V. 32. Iss. 2. P. 137–144.
14. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // in: Computer Algebra in Scientific Computing. LNCS. V. 6885 / Ed. by *Gerdt V.P. et all.* Heidelberg: Springer, 2011. P. 88–100.
15. *Гребеников Е.А.* Математические проблемы гомографической динамики. М.: Изд-во РУДН, 2011. 254 с.
16. *Куницын А.Л., Турешбаев А.Т.* Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. ж. 1985. Т. 11. № 2. С. 145–148.
17. *Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю.* Об устойчивости лагранжевых точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1996. № 5. С. 71–76.
18. *Зимовщиков А.С., Тхай В.Н.* Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 221–229.
19. *Кононенко А.* Точки либрации системы Земля–Луна // Авиация и космонавтика. 1968. № 5. С. 71–73.
20. *Аверкиев Н.Ф., Васьков С.А., Салов В.В.* Баллистическое построение систем космических аппаратов связи и пассивной радиолокации лунной поверхности // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51. № 12. С. 66–72.
21. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System // The 65th Int. Astronautical Congress. Toronto, Canada. September 29–October 3, 2014. 14 p.
22. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
23. *Маркеев А.П.* О нормальных координатах в окрестности лагранжевых точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестн. Удмурт. унив. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. № 4. С. 657– 671.
24. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
25. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
26. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
27. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.
28. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
29. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 408 с.

30. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
31. *Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R.* Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem—application to Trojan asteroids // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2008. V. 384. P. 1165–1177.
32. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular Lagrangian points // Astron. J. 1967. V. 72. № 2. P. 173–179.
33. *Маркеев А.П.* Об устойчивости треугольных лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел // Астрон. ж. 1971. Т. 48. № 4. С. 862–868.
34. *Нехорошев Н.Н.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. № 4. С. 82–83.
35. *Нехорошев Н.Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 5–66.
36. *Нехорошев Н.Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1979. № 5. С. 5–50.
37. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
38. *Moser J.* Stabilitätsverhalten Kanonischer Differentialgleichungs Systeme // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa. 1955. № 6. S. 87–120.
39. *Moser J.* On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. V. 5. P. 167–175.
40. *Moser J.* Stability of the asteroids // Astron. J. 1958. V. 63. № 10. P. 439–443.
41. *Зигель К.Л.* Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
42. *Glimm J.* Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.
43. *Брюно А.Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 325–330.
44. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 215 с.

On the Stability of Lagrange Solutions in Spatial Near-Circular Restricted Three-Body Problem

A. P. Markeev[a,b,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[b] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The restricted problem of three bodies (material points) is considered. The orbits of the main attracting bodies are assumed to be ellipses of small eccentricity, and the passively gravitating body during its motion can leave the plane of the orbits of the main bodies (spatial problem). The stability of the body motion corresponding to the triangular Lagrangian libration points is investigated. A characteristic feature of the spatial problem under study is the presence of resonance due to the equality of the Keplerian motion period of the main bodies and the linear oscillation period of the passively gravitating body in the direction perpendicular to the plane of their orbits. Using the methods of classical perturbation theory, KAM-theory and computer algebra algorithms, the nonlinear problem of stability for the most (in the Lebesgue measure sense) initial conditions and formal stability (stability in any arbitrarily high finite approximation with respect to the coordinates and impulses of the disturbed motion) are investigated.

Keywords: restricted three-body problem, triangular libration points, stability

REFERENCES

1. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics. Analytical and Qualitative Methods. (Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody) Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)
2. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike) Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian)
3. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, vol. 11, pp. 144–151.
4. *Lagrange J.L.* Essai sur le Problème des Trois Corps. Oeuvres de Lagrange. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. pp. 229–324.
5. *Lyapunov A.M.* On the Stability of Motion in One Particular Case of the Three-Body Problem. Coll. works. Vol. 1. Moscow; Leningrad: USSR Acad. Sci. Publ., 1956. pp. 327–401.
6. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J., 1964, vol. 69, no. 2, pp. 165–172.
7. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1971, vol. 4, no. 3/4, pp. 468–489.
8. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J., 1970, vol. 8, no. 2, pp. 221–223.
9. *Yumagulov M.G., Belikova O.N.* Bifurcation of 4π-periodic solutions of the planar, restricted, elliptical three-body problem // Astron. Rep., 2009, vol. 86, no. 2, pp. 148–152.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2013, vol. 430, no. 4, pp. 2755–2760.
11. *Isanbaeva N.R.* On the construction of the boundaries of stability regions of triangular libration points of a planar bounded elliptic three-body problem // Vestn. Bashk. Univ. Matematika i Mekhanika, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 5–9. (in Russian)
12. *Simo C.* Periodic orbits of the planar *N*-body problem with equal masses and all bodies on the same path // in: The Restless Universe. Applications of Gravitational N-Body Dynamics to Planetary, Stellar and Galactic Systems: Proc. Fifty Fourth Scottish Universities Summer School in Physics, Blair Atholl, 23 July–5 August 2000. N.Y.: CRC Press, 2001. pp. 265–284.
13. *Whipple A.L., Szebehely V.* The restricted problem of $n + v$ bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1984, vol. 32, no. 2, pp. 137–144.
14. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // in: Computer Algebra in Scientific Computing. LNCS. Vol. 6885 / Ed. by *Gerdt V.P. et all.* Heidelberg: Springer, 2011. pp. 88–100.
15. *Grebenikov E.A.* Mathematical Problems of Homographic Dynamics. (Matematicheskiye problemy gomograficheskoy dinamiki) Moscow: RUDN Publ., 2011, 254 p. (in Russian)
16. *Kunitsyn A.L., Turesbaev A.T.* Stability of triangular libration points of the photogravitational three-body problem // Pis'ma v Astron. zh., 1985, vol. 11, no. 2, pp. 145–148. (in Russian)
17. *Lukyanov L.G., Kochetkova A.Yu.* On the stability of Lagrangian libration points in a restricted elliptic photogravitational three-body problem // Vestn. Mosk. Univ. Ser 3. Fizika. Astronomiya, 1996, no. 5, pp. 71–76. (in Russian)
18. *Zimovshikov A.S., Tkhai V.N.* Stability diagrams for a heterogeneous ensemble of particles at the collinear libration points of the photogravitational three-body problem // JAMM, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 158–163.
19. *Kononenko A.* Libration points of the Earth – Moon system // Aviatsiya i Kosmon., 1968, no. 5, pp. 71–73. (in Russian)
20. *Averkiev N.F., Vaskov S.A., Salov V.V.* Ballistic construction of communication spacecraft systems and passive radar of the lunar surface // Izv. Vuz. Priborostr., 2008, vol. 51, no. 12, pp. 66–72 (in Russian)
21. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System // in: The 65th Int. Astronautical Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
22. *Malkin I.G.* Theory of Stability of Motion. Washington D.C.: Office Techn. Inform., 1952. 456 p.

23. *Markeev A.P.* On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem // Vestn. Udmurt. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 657 – 671. (in Russian)
24. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
25. *Nayfeh A.X.* Perturbation Methods. N.Y.: Wiley, 1973. 425 p.
26. *Kolmogorov A.N.* Preservation of conditionally periodic movements with small change in the hamilton function // in: Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Lect. Notes Phys. Monogr. Vol. 93/ Ed. by *Casati G., Ford J.* Berlin: Springer, 1979. pp. 51–56.
27. *Arnol'd V.I.* Proof of a Theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian // Russ. Math. Surv., 1963, vol. 18, no. 5, pp. 9–36.
28. *Arnol'd V.I.* Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics // Russ. Math. Surv., 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191.
29. *Arnol'd V.I.* Mathematical Methods of Classical Mechanics. Grad. Texts in Math. Vol. 60. N.Y.: Springer, 1997.
30. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopaedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
31. *Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R.* Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem–application to Trojan asteroids // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2008, vol. 384, pp. 1165 – 1177.
32. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular Lagrangian points // Astron. J., 1967, vol. 72, no. 2, pp. 173–179.
33. *Markeev A.P.* On the stability of triangular Lagrangian solutions in the spatial circular restricted three-body problem // Astron. zh., 1971, vol. 48, no. 4, pp. 862–868. (in Russian)
34. *Nekhoroshev N.N.* Behavior of Hamiltonian systems close to integrable // Funct. Anal. Appl., 1971, vol. 5, no. 4, pp. 338–339.
35. *Nekhoroshev N.N.* An exponential estimate of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems // Russ. Math. Surveys, 1977, vol. 32, no. 6, pp. 1–65.
36. *Nekhoroshev N.N.* An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. II // in: Topics in Modern Mathematics. Petrovskii Sem. No. 5 / Ed. by *Oleinik O.A.* N.Y.: Consultant Bureau, 1985, pp. 1–58.
37. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, no. 1, pp. 81–114.
38. *Moser J.* Stabilitatsverhalten Kanonischer Differentialgleichungs Systeme // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa, 1955, vol. 1955, pp. 87–120.
39. *Moser J.* On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability // Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, vol. 5, pp. 167–175.
40. *Moser J.* Stability of the Asteroids // Astron. J., 1958, vol. 63, no. 10, pp. 439–443.
41. *Siegel C.L.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Grundlehren Math. Wiss. Vol. 85. Berlin: Springer, 1956. x+212 p.
42. *Glimm J.* Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, no. 4, pp. 509–526.
43. *Bryuno A.D.* Formal stability of Hamiltonian systems // Math. Notes, 1967, vol. 1, no. 3, pp. 216–219.
44. *Bruno A.D.* The Restricted 3-Body Problem: Plane Periodic Orbits. de Gruyter Exp. Math. Vol. 17. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994.