

УДК 531.011

ОСЦИЛЛЯТОР С СУХИМ ТРЕНИЕМ И УПРУГИМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

© 2021 г. М. Паскаль^{1,*}¹ Университет Эври, Эври, Франция

*e-mail: stepsj@ya.ru

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.

После доработки 02.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается осциллятор с двумя степенями свободы, возбуждаемый сухим трением. Система состоит из двух масс, соединенных линейными пружинами. Вторая масса контактирует с приводным ремнем, движущимся с постоянной скоростью, и может сталкиваться с упругим упором. Между этой массой и ремнем действуют силы трения с кулоновскими характеристиками. Обнаружено несколько периодических движений, включающих фазы прилипания, фазы скольжения и контакта с упором.

Ключевые слова: колебания, негладкие системы, двойной осциллятор, фрикционные колебания, упругие ограничители колебаний

DOI: 10.31857/S0032823521040123

1. Введение. В технических приложениях часто встречаются негладкие динамические системы, примерами которых являются осцилляторы с сухим трением или вибрационные системы с зазором между движущимися частями. Негладкие системы сложны, и их обычно моделируют как системы материальных точек, соединенных пружинами. Такие системы были предметом многих исследований, в основном, в случае систем с одной степенью свободы [1–4]. Для систем с несколькими степенями свободы, в основном, используются численные методы [5–7]. В [8] периодические движения для систем с двумя степенями свободы с упругим ограничителем, получены в аналитическом виде. В [9] приведено аналитическое исследование поведения двойного осциллятора с сухим трением. Данная работа является продолжением работы [10], в которой исследовался двойной осциллятор с сухим трением при наличии жесткого ограничителя. В этой статье предполагается мягкое столкновение с ограничителем. Найдено несколько периодических движений, в том числе с ударами об упругий ограничитель.

2. Постановка задачи. Система (рис. 1) состоит из двух масс (m_1, m_2), соединенных линейными пружинами (k_1, k_2). Вторая масса находится в контакте с приводным ремнем, движущимся с постоянной скоростью v_0 . Между массой m_2 и ремнем действует сила трения Ψ .

Перемещение x_2 второй массы ограничивается наличием упругого упора. Когда x_2 превышает зазор, происходит контакт массы с ограничителем и возникает восстанавливающая сила, пропорциональная жесткости пружины k_3 . Движение осциллятора с двумя степенями свободы описывается системой уравнений

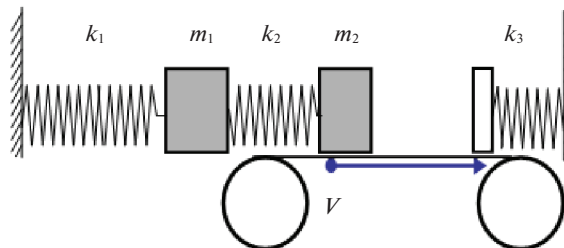


Рис. 1. Осциллятор с сухим трением.

$$\begin{aligned}
 x_1'' + x_1 - \chi x_2 &= 0 & x_2'' + \chi \eta (x_2 - x_1) &= \eta u + F \\
 \chi &= \frac{k_2}{k_1 + k_2}, & \eta &= \frac{m_1}{m_2}, & t &= \omega \tilde{t}, & \omega &= \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \\
 (o)' &= \frac{d(o)}{dt}, & u &= \frac{\Psi}{k_1 + k_2}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь x_1, x_2 обозначают перемещения масс.

Восстанавливающая сила F определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 F &= 0 & \text{при } x_2 &\leq b \\
 F &= -\eta k(x_2 - b) & \text{при } x_2 &\geq b; & k &= \frac{k_3}{k_1 + k_2},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где b – величина зазора.

Сила трения u определяется из законов Кулона

$$\begin{aligned}
 x_2' \neq V & \quad u = u_s \operatorname{sign}(V - x_2'), \quad V = \frac{V_0}{\omega} \quad (\text{скольжение}) \\
 x_2' &= V \\
 u &= \begin{cases} \varepsilon u_s & \text{при } \varepsilon(\chi(x_2 - x_1) - F/\eta) > u_r, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{фаза покоя}) \\ \chi(x_2 - x_1) - F/\eta & \text{при } |\chi(x_2 - x_1) - F/\eta| < u_r \quad (\text{фаза скольжения}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где u_r – сила трения покоя, u_s – сила трения скольжения ($0 < u_s < u_r$).

Динамика такого осциллятора разнообразна и может включать фазы покоя и скольжения (stick–slip) без контакта с ограничителем (свободное движение) и с контактом с ограничителем (ограниченное движение). Для каждого вида движений можно получить решение в замкнутой форме.

3. Движения без контакта с ограничителем ($x_2 < b$). Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' < V$. Решение получается из модального анализа уравнения (2.1), где $u = u_s, F = 0$:

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= H(t)Z_0 \quad Z = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}, \quad Z_0 = Z(0), \quad z = X - d_0 \\
 X &= (x_1, x_2)' \quad H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & H_1(t) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(2×2) -матрицы $H_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) получаются в аналитическом виде [9]

$$d_0 = (d_{01}, d_{02})^t \quad (3.2)$$

$$d_{01} = \frac{u_s}{1 - \chi}, \quad d_{02} = \frac{d_{02}}{\chi}$$

Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' > V$ (с превышением скорости ремня). Решение выводится из модального анализа уравнений (2.1), где $u = -u_s$:

$$\bar{Z}(t) = H(t)\bar{Z}_0 \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} X + d_0 \\ X' \end{pmatrix} \quad \bar{Z}_0 = \bar{Z}(0) \quad (3.3)$$

Движение с трением покоя второй массы, $x_2' = V$. Это движение определяется уравнениями

$$x_1'' + x_1 - \chi x_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$x_2'' = 0$$

Решение получено в аналитическом виде [9]:

$$Z(t) = \Gamma(t)Z_0 \quad Z_0 = Z(0), \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) & \Gamma_2(t) \\ \Gamma_2(t) & \Gamma_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

(2×2) -матрицы $\Gamma_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) получены из модального анализа (2.4). Более того, при всех такого рода колебаниях выполняется неравенство

$$\chi|x_2 - x_1| < u_r \quad (3.6)$$

4. Движения с контактом с ограничителем ($x_2 > b$). *Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' < V$.* Решение выводится из модального анализа (2.1), где $u = u_s$, $F = -\eta k(x_2 - b)$:

$$Y(t) = L(t)Y_0 \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad Y_0 = Y(0), \quad y = X - \delta_0$$

$$\delta_0 = (\delta_{01}, \delta_{02})^t \quad (4.1)$$

$$\delta_{01} = \frac{(u_s + kb)\chi}{(k + \chi - \chi^2)}, \quad \delta_{02} = \delta_{01}/\chi$$

$$X = (x_1, x_2)^t \quad L(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) & L_2(t) \\ L_3(t) & L_1(t) \end{pmatrix},$$

(2×2) -матрицы $L_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) приведены в Приложении.

Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' > V$ (с превышением скорости ремня). Решение выводится из модального анализа уравнений (2.1), где $u = -u_s$, $F = -\eta k(x_2 - b)$:

$$\bar{Y}(t) = L(t)\bar{Y}_0 \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} X - \bar{\delta}_0 \\ X' \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y}_0 = \bar{Y}(0), \quad \bar{\delta}_0 = (\bar{\delta}_{01}, \bar{\delta}_{02})^t \quad (4.2)$$

$$\bar{\delta}_{01} = \frac{(kb - u_s)\chi}{(k + \chi - \chi^2)}, \quad \bar{\delta}_{02} = \bar{\delta}_{01}/\chi$$

Движение с трением покоя второй массы, $x'_2 = V$. Движение определяется уравнениями (3.4). Решение получается из (3.5). Во время покоя выполняется неравенство

$$|\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b)| < u_r \tag{4.3}$$

Далее будет получено в аналитической форме несколько видов периодических движений с выходом на контакт с ограничителем и с фазами скольжения и покоя.

5. Движения первого вида с контактом с ограничителем. Предположим, что при $t = 0$

$$x_{20} = b, \quad 0 < x'_{20} < V \tag{5.1}$$

При $t = 0$ происходит удар, при $t > 0$ система совершает движение в силу уравнений (4.1), при $t = \tau$, $x_2(\tau) = b$, $x'_2(\tau) < 0$ и при $t > 0$, происходит движение без контакта с ограничителем, определяемое уравнением

$$Z(t) = H(t - \tau)Z_B, \quad Z_B = Z(\tau) \tag{5.2}$$

Периодическое движение с периодом $T = \tau + \tau_1$ получается, если

$$Z_0 = H(\tau_1)Z_B \tag{5.3}$$

Из (4.1) получим

$$\begin{aligned} Y_B &= Y(\tau) = L(\tau)Y_0 \\ Y_0 &= Z_0 + F_0, \quad Y_B = Z_B + F_0 \\ F_0 &= \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = d_0 - \delta_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Из (5.3) следует

$$\begin{aligned} Z_B &= H(-\tau_1)Z_0, \quad H(-\tau_1) = \begin{pmatrix} H_1 & -H_2 \\ -H_3 & H_1 \end{pmatrix} \\ H_i &= H_i(\tau_1), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из (5.4) выводим

$$\begin{aligned} Z_B &= L(\tau)(Z_0 + F_0) - F_0 \\ L(\tau) &= \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_1 \end{pmatrix}, \quad L_i = L_i(\tau), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (5.5) следует

$$\begin{aligned} z_B - z_0 &= (H_1 - I)z_0 - H_2z'_0 \\ z'_B + z'_0 &= -H_3z_0 + (H_1 + I)z'_0 \end{aligned} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Принимая во внимание следующее свойство матриц H_i , ($i = 1, 2, 3$)

$$H_1^2 - I - H_2H_3 = 0, \quad H_iH_j = H_jH_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{5.8}$$

Из (5.7) получим

$$(H_1 + I)(z_B - z_0) + H_2(z'_B + z'_0) = 0 \tag{5.9}$$

Из (5.6) следует

$$\begin{aligned} z_B - z_0 &= (L_1 - I)(z_0 + f_0) + L_2z'_0 \\ z'_B + z'_0 &= L_3(z_0 + f_0) + (L_1 + I)z'_0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

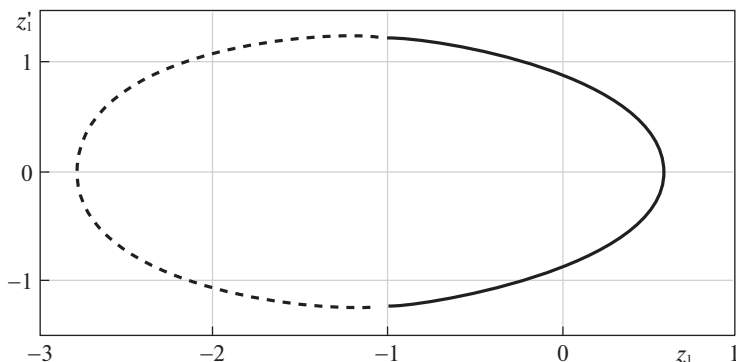


Рис. 2. Фазовый портрет не сталкивающейся массы.

Из того же свойства матриц L_i , ($i = 1, 2, 3$) (см. Приложение)

$$L_1^2 - I - L_2 L_3 = 0, \quad L_i L_j = L_j L_i, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.11)$$

получим

$$(L_1 + I)(z_B - z_0) - L_2(z'_B + z'_0) = 0 \quad (5.12)$$

Из (5.9), (5.12) следует

$$\text{if } \det \begin{vmatrix} H_1 + I & H_2 \\ L_1 + I & -L_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad z_B - z_0 = 0, \quad z'_B + z'_0 = 0 \quad (5.13)$$

Периодическое движение зависит от пяти параметров $(x_{01}, x'_{01}, x'_{02}, \tau, \tau_1)$, определяемых четырьмя скалярными уравнениями, которые выводятся из уравнений (5.7), (5.10), (5.13):

$$(H_1 - I)z_0 - H_2 z'_0 = 0 \quad (5.14)$$

$$(L_1 - I)(z_0 + f_0) + L_2 z'_0 = 0$$

Отсюда следует, что, как и в [10], три параметра $(x_{01}, x'_{01}, x'_{02})$ могут быть определены из (5.14) в зависимости от периода $T = \tau + \tau_1$.

Пример

Для $\eta = 1$, $k = 0.7$, $\chi = 0.3$, $u_s = 1$, $V = 4$, $b = 1$, получаем:

$$\tau = 4.2, \quad \tau_1 = 4.39$$

$$z_{10} = -0.9977, \quad z'_{10} = 1.2357$$

$$z_{20} = -3.7619, \quad z'_{20} = 1.8754$$

Фазовые портреты движения масс m_1, m_2 представлены на рис. 2, 3. Сплошная линия соответствует движению в контакте с ограничителем, точечная линия соответствует свободному движению без контакта с ограничителем.

6. Движения второго вида с контактом с ограничителем. Предположим, что при $t = 0$:

$$x_{20} < b, \quad x'_{20} = V \quad (6.1)$$

При $0 < t < \tau$, система совершает движение в силу уравнений (3.5) в фазе покоя второй массы без контакта с ограничителем ($x'_2 = V$, $x_2 < b$). Предположим, что

$$x_{2B} \equiv x_2(\tau) = b, \quad \chi |x_{2B} - x_{1B}| < u_r, \quad x_{1B} \equiv x_1(\tau) \quad (6.2)$$

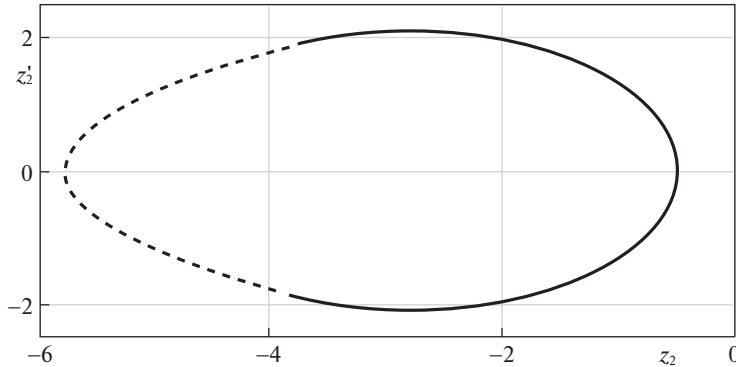


Рис. 3. Фазовый портрет сталкивающейся массы.

При $0 < t - \tau < \tau_1$, вторая масса покоится на ленте и находится в контакте с ограничителем. Движение определяется уравнением

$$Z(t) = \Gamma(t - \tau)Z_B, \quad Z_B = Z(\tau) \quad (6.3)$$

Во время этого движения выполняется неравенство

$$|\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b)| < u_r \quad (6.4)$$

Фаза покоя прекращается, когда $t = \tau + \tau_1$, $\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b) = u_r$ (4.5).

При $0 < t - T < \tau_2$ ($T = \tau + \tau_1$) имеем фазу скольжения с контактом второй массы с ограничителем ($x_2 > b$)

$$Y(t) = L(t - T)Y_c, \quad Y_c = Y(T) \quad (6.5)$$

Это движение заканчивается в момент $t = T + \tau_2$, при выполнении условий

$$x_{2D} \equiv x_2(T + \tau_2) = b, \quad x_{2D}' < 0 \quad (6.6)$$

При $0 < t - T - \tau_2 < \tau_3$, система находится в фазе скольжения без контакта с ограничителем ($x_2 < b$)

$$Z(t) = H(t - T - \tau_2)Z_D, \quad Z_D = Z(T + \tau_2) \quad (6.7)$$

Периодическое движение с периодом $\Theta = \tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ получается, если

$$Z_0 = H(\tau_3)Z_D \quad (6.8)$$

Это движение зависит от 7 параметров ($x_{10}, x_{10}', x_{20}, \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$), определяемых 7 скалярными уравнениями, выводимыми из (6.1), (6.6), (4.8).

Пример

Для $\eta = 3$, $k = 0.3$, $\chi = 0.2$, $u_s = 1$, $V = 1$, $b = 2$, $u_r = 1.7695$, получим

$$\tau = 0.5441, \quad \tau_1 = 3.4559, \quad \tau_2 = 2.455, \quad \tau_3 = 1.38$$

$$z_{10} = -1.7093, \quad z_{10}' = -0.0779, \quad z_{20} = -4.7941$$

Из фазовых портретов движения масс m_1, m_2 , показанных на рис. 4, 5, видно, что ограничения (3.6) и (6.4) выполняются в процессе движения в фазе покоя.

Заключительные замечания. В данной работе найдено несколько периодических движений двойного осциллятора с сухим трением и упругим ограничителем. Эти движения включают несколько фаз трения скольжения и трения покоя. Другие движения

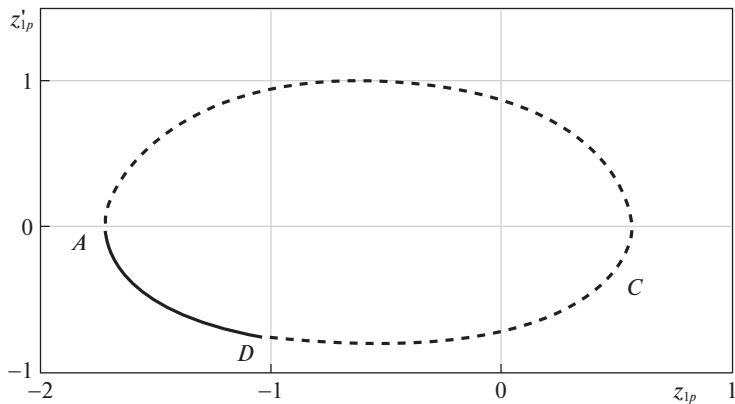


Рис. 4. Фазовый портрет первой массы.

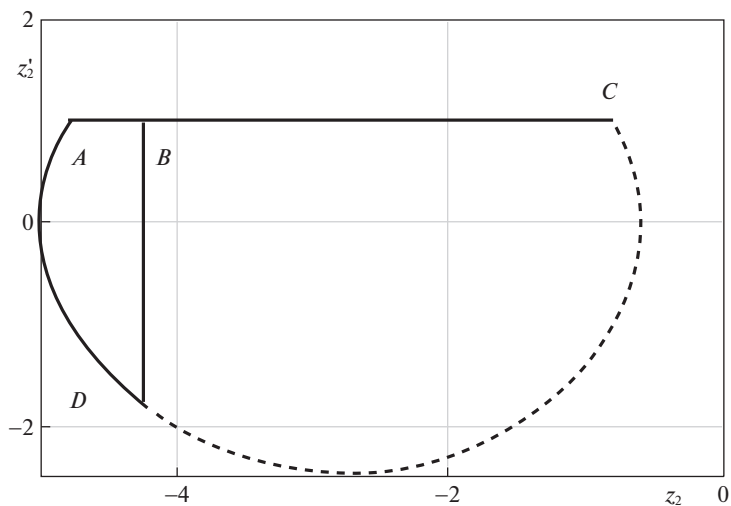


Рис. 5. Фазовый портрет второй массы.

с фазами превышения второй массой скорости приводного ремня с последующими фазами скольжения, покоя и контакта с ограничителем предполагается исследовать в следующих работах.

Приложение

$$L_i(t) = \Sigma A_i(t) \Sigma^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} S_1/\Omega_1 & 0 \\ 0 & S_2/\Omega_2 \end{pmatrix}, \quad S_j = \sin(\Omega_j t) \quad (j = 1, 2)$$

$$A_1(t) = A_2'(t), \quad A_3(t) = A_2''(t)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

Собственные частоты (Ω_1, Ω_2) являются корнями характеристического уравнения

$$D(s^2) \equiv \det(K - Is^2) = 0$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\chi \\ -\eta\chi & \eta(\chi + k) \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы $\Phi_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \Sigma_j \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2$) определяются как $(K - I\Omega_j^2) \Phi_j = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound&Vibr. 1983. V. 90. № 1. P. 129–155.
2. *Hindmarsh M.B., Jeffries D.J.* On the motions of the impact oscillator // J. Physics A. 1984. V. 17. P. 1791–1803.
3. *Hong H.K., Liu C.S.* Non-sticking formulae for Coulomb friction under harmonic loading // J. Sound&Vibr. 2001. V. 244. № 5. P. 883–898.
4. *Csernak G., Stepan G.* On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator // J. Sound&Vibr. 2006. V. 295. № 4. P. 649–658.
5. *Valente A.X., McClamroch N.H., Mezie I.* Hybrid impact of two coupled oscillators that can impact a fixed stop // Int. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 677–689.
6. *Galvanetto U., Bishop S.R.* Stick-slip vibrations of a 2-degree-of-freedom geophysical fault model // Int. J. Mech. Sci. 1994. V. 36. № 8. P. 683–698.
7. *Khizgiyayev S.V.* Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry “stick-slip” friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905–913.
8. *Pascal M.* Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop // J. Comput.&Nonlin. Dyn. 2006. V. 1. № 1. P. 94–102.
9. *Pascal M.* Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3. № 3. P. 20–26.
10. *Pascal M.* A new model of dry friction oscillator colliding with a rigid obstacle // Nonlin. Dyn. 2018. V. 91. P. 2541–2550.

Dry Friction Oscillator with Elastic Stop

M. Pascal^{a, #}

^a *Universite d'Evry, Evry, France*

[#] *e-mail: stepsj@ya.ru*

A two-degrees of freedom oscillator excited by dry friction is considered. The system consists of two masses m_1, m_2 connected by linear springs. The second mass is in contact with a driving belt moving at a constant velocity and can collide with an elastic stop. Friction forces, with Coulomb's characteristics, act between the mass and the belt. Several periodic orbits including stick phases, slip phases and collision with the obstacle are found.

Keywords: oscillations, non smooth systems, two-degree-of-freedom oscillator, dry friction oscillations, oscillators with elastic stop

REFERENCES

1. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound&Vibr., 1983, vol. 90, no. 1, pp. 129–155.
2. *Hindmarsh M.B., Jeffries D.J.* On the motions of the impact oscillator // J. Physics A, 1984, vol. 17, pp. 1791–1803.

3. *Hong H.K., Liu C.S.* Non-sticking formulae for Coulomb friction under harmonic loading // *J. Sound&Vibr.*, 2001, vol. 244, no. 5, pp. 883–898.
4. *Csernak G., Stepan G.* On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator // *J. Sound&Vibr.*, 2006, vol. 295, no. 4, pp. 649–658.
5. *Valente A.X., McClamroch N.H., Mezie I.* Hybrid impact of two coupled oscillators that can impact a fixed stop // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2003, vol. 38, pp. 677–689.
6. *Galvanetto U., Bishop S.R.* Stick-slip vibrations of a 2-degree-of-freedom geophysical fault model // *Int. J. Mech. Sci.*, 1994, vol. 36, no. 8, pp. 683–698.
7. *Khizgiyayev S.V.* Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry “stick-slip” friction // *JAMM*, 2007, vol. 71, pp. 905–913.
8. *Pascal M.* Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop // *J. Comput.&Nonlin. Dyn.*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 94–102.
9. *Pascal M.* Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // *ASME J. Comput. Nonlin. Dyn.*, 2008, vol. 3, no. 3, pp. 20–26.
10. *Pascal M.* A new model of dry friction oscillator colliding with a rigid obstacle // *Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 91, pp. 2541–2550.