

УДК 514.851

О КОНСТРУКЦИИ “ТРИАДА”

© 2021 г. Й. Виттенбург^{1,*}¹ Институт технологии, Карлсруе, Германия

*e-mail: jens.wittenburg@kit.edu

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

После доработки 31.01.2021 г.

Принята к публикации 03.03.2021 г.

Рассмотрена конструкция из трех одинаковых абсолютно твердых плоских или пространственных квадратных рам. В работе доказано существование определенного угла между плоскостями рам, при котором конструкция может быть реализована и обладает жесткостью.

Ключевые слова: абсолютно твердое тело, квадратная рама, условие контакта, натурная композиция

DOI: 10.31857/S0032823521040147

1. Введение. Описана [1] конструкция, состоящая из трех одинаковых плоских квадратных рам, имеющих форму, показанную на рис. 1. Диагональ d внутреннего квадрата равна стороне a внешнего квадрата. В терминах ширины b полос, из которых сделаны рамы, это условие имеет вид $(a - 2b)\sqrt{2} = a$, или

$$a = 2(2 + \sqrt{2})b \approx 6.828b \quad (1.1)$$

При таком условии контакта рама 1 может быть вставлена наполовину в раму 3, как показано на рис. 2. В этом положении рама 1 может свободно поворачиваться вокруг линии, соединяющей две точки контакта.

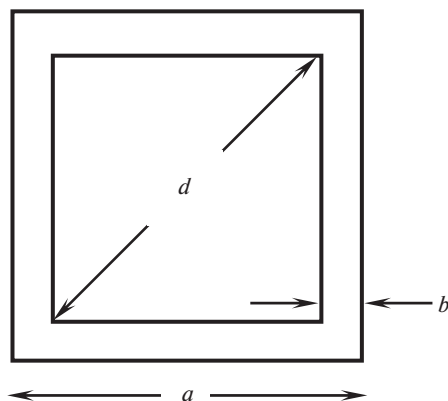


Рис. 1. Плоская квадратная рамка.

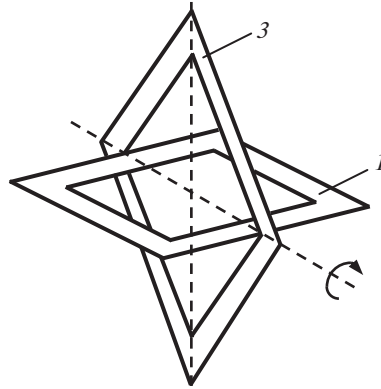


Рис. 2. Рамка 1, вставленная в рамку 3.

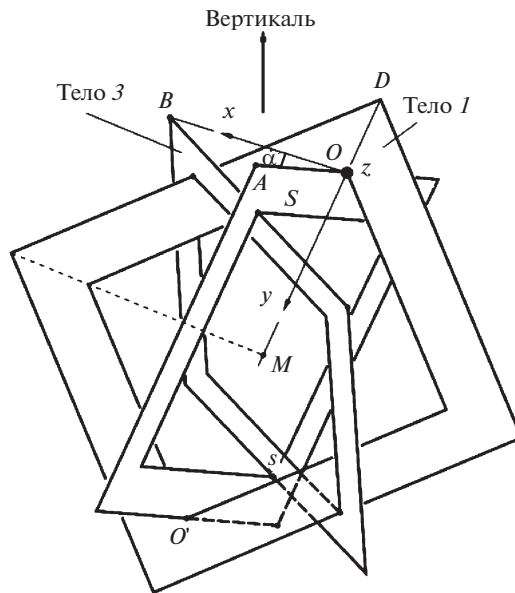


Рис. 3. Конструкция в сборе.

При надлежащем выборе угла α между двумя рамами рама 2 может быть вставлена так, чтобы одним и тем же образом каждая рама была охвачена другой и содержала в себе следующую раму. Это показано на рис. 3 (перед установкой из рамы 2 временно должна быть демонтирована одна из сторон, так что рама принимает вид буквы U). Полученная конструкция с одинаковыми углами α между каждой парой рам является жесткой. В разд. 2 показано, что сборка возможна с однозначно определенным углом α . В разд. 3 исследуются конструкции с неплоскими рамами.

2. Вычисление α . Пусть с рамой 1 связана декартова система координат x, y, z , показанная на рис. 3. Ось y направлена вдоль диагонали, ось z — перпендикулярно раме. Ось x проходит через точку B . В точке S пересекаются прямые MA и BC .

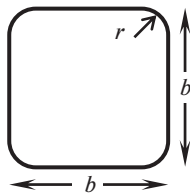


Рис. 4. Поперечное сечение полос.

Векторы \overline{OM} , \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OD} , \overline{OC} имеют координаты: $\overline{OM} = \frac{a}{2}(0, 1, 0)$, $\overline{OA} = \frac{a}{2}(\cos \alpha, 1, \sin \alpha)$, $\overline{OB} = \frac{a}{2}(1, 0, 0)$, $\overline{OD} = \frac{a}{2}(0, 1 - \sqrt{2}, 0)$, $\overline{OC} = \frac{a}{2}(-\cos \alpha, 1 - \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha)$.

Прямые MA и BC запишем в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \overline{OM} + \lambda_1(\overline{OA} - \overline{OM}) &= \frac{a}{2}(\lambda_1 \cos \alpha, 1 - \lambda_1, \lambda_1 \sin \alpha) \\ \overline{OB} + \lambda_2(\overline{OC} - \overline{OB}) &= \frac{a}{2}(1 - \lambda_2(1 + \cos \alpha), \lambda_2(1 - \cos \alpha), \lambda_2 \sqrt{2} \sin \alpha) \end{aligned}$$

Точка пересечения S определяется уравнениями $\lambda_1 \cos \alpha = 1 - \lambda_2(1 + \cos \alpha)$, $1 - \lambda_1 = \lambda_2(1 - \cos \alpha)$, $\lambda_1 = \lambda_2 \sqrt{2}$, которые дают

$$\cos \alpha = \sqrt{2} - 1, \quad \sin \alpha = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}, \quad \alpha \approx 65.53^\circ \quad (2.1)$$

Это доказывает, что три рамы могут быть собраны в единственно определенную конфигурацию. Треугольник (ABD) равносторонний, поскольку векторы

$$\overline{AB} = \frac{a}{2}(\cos \alpha - 1, 0, \sin \alpha), \quad \overline{BD} = \frac{a}{2}(1, \sqrt{2} - 1, 0), \quad \overline{DA} = \frac{a}{2}(\cos \alpha, \sqrt{2} - 1, \sin \alpha)$$

имеют равные длины.

Произведение $\overline{AB} \times \overline{BD}$ определяет единичный вектор \vec{n} , перпендикулярный к плоскости треугольника (вертикаль на рис. 3): $\vec{n} = (1/\sqrt{3})[\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}-1]$. Угол между \vec{n} и \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{MD} равен $\arccos[3/\sqrt{\sqrt{2}-1}]$. Отражения точек A , B и D относительно центра M являются вершинами углов другого равностороннего треугольника с той же нормалью \vec{n} . В направлении, противоположном вектору \vec{n} , эти два треугольника видны повернутыми на 30° друг относительно друга.

3. Неплоские квадратные рамы. Конструкция, изображенная на рис. 3, может быть собрана с тем же углом α между парами рам, если плоские полосы, из которых сделаны рамы заменить профильными трубами с поперечным сечением, показанным на рис. 5. Ширина b и радиус r – свободные параметры. Исследование включает частные случаи $r = 0$ (квадратное сечение) и $2r = b$ (круглое поперечное сечение). Как и раньше, длина стороны внешнего квадрата обозначается a . Угол α отсчитывается в средних плоскостях рам. Сборка конструкции возможна, если условие контакта (1.1) заменить условием контакта по параметрам a , b и r .

Плоскость x, y на рис. 3, теперь расположена в средней плоскости рамы I . Вблизи начала координат O одна сторона рамы 2 находится в контакте с рамой I в двух точках на противоположных плоскостях рамы I . Всего существует двенадцать точек контакта.

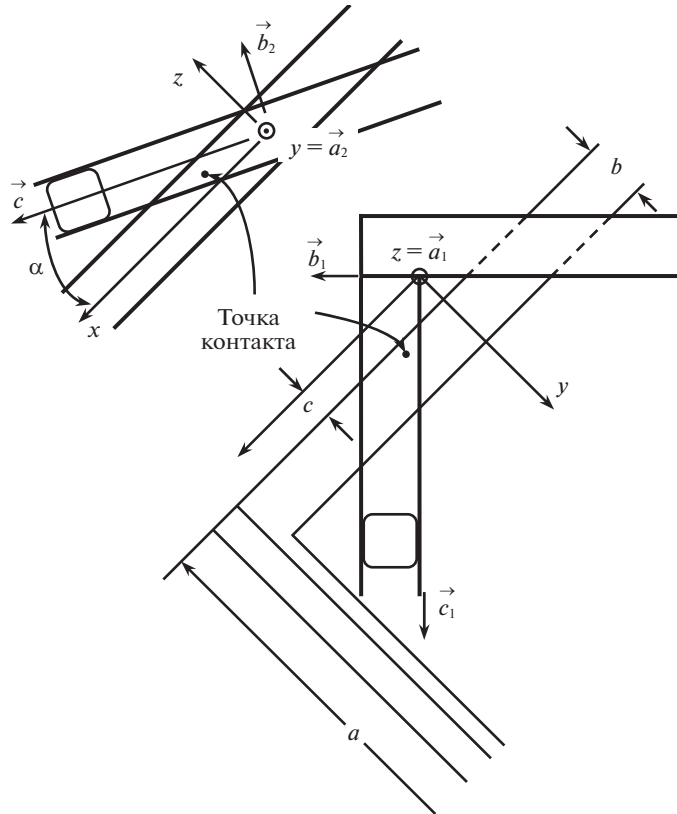


Рис. 5. Точка контакта рамок 1 и 2.

Из соображений симметрии условие контакта можно получить, исследуя единственную точку контакта. На рис. 6 точка контакта показана в двух проекциях около начала координат в области $x, y, z > 0$. Вспомогательная величина c связана с a и b уравнением $a + 2c = (a - 2b)\sqrt{2}$, или

$$a = 2(\sqrt{2} + 1)(b\sqrt{2} + c) \tag{3.1}$$

В точке контакта поверхности представляют собой круглые цилиндры радиуса r . В обозначениях, показанных на рис. 7, оба цилиндра имеют параметрическое представление

$$\vec{z}_i = \vec{P}_i + r(\vec{a}_i \cos \varphi_i + \vec{b}_i \sin \varphi_i) + \lambda_i \vec{c}_i \quad (i = 1, 2)$$

P_i – произвольно выбранная точка на оси цилиндра. \vec{a}_i, \vec{b}_i и \vec{c}_i – взаимно перпендикулярные единичные векторы, а φ_i, λ_i – координаты. Единичные нормальные векторы в точке φ_i, λ_i равны $\vec{n}_i = \vec{a}_i \cos \varphi_i + \vec{b}_i \sin \varphi_i$ ($i = 1, 2$).

Цилиндры находятся в контакте, если (а) $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ и (б) $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Условие (б) записывается так:

$$\vec{a}_2 \cos \varphi_2 + \vec{b}_2 \sin \varphi_2 = -(\vec{a}_1 \cos \varphi_1 + \vec{b}_1 \sin \varphi_1) \tag{3.2}$$

С учетом этого соотношения условие (а) принимает вид

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{c}_1 \lambda_1 - \vec{c}_2 \lambda_2 + 2r(\vec{a}_1 \cos \varphi_1 + \vec{b}_1 \sin \varphi_1) = 0 \tag{3.3}$$

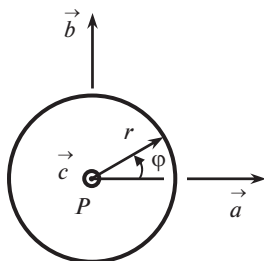


Рис. 6. Векторы и координаты точек на цилиндре радиуса r .

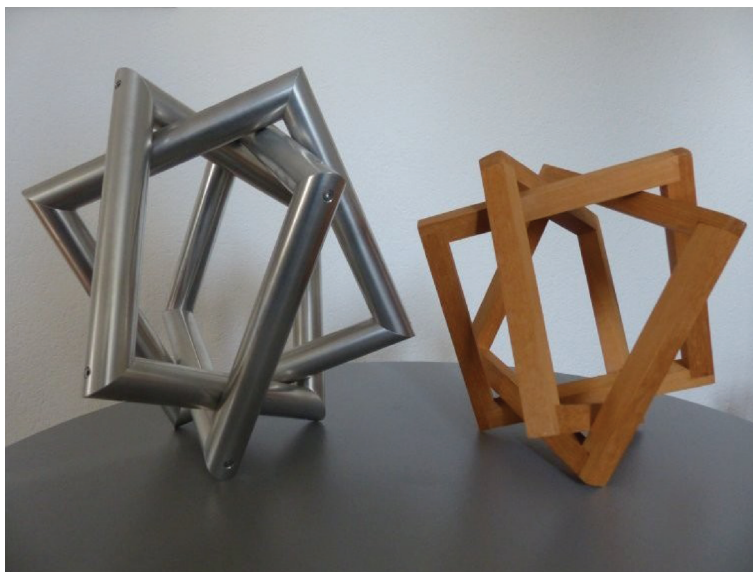


Рис. 7. Две физические модели триады.

Для цилиндров на рис. 6 векторы \vec{a}_i , \vec{b}_i , \vec{c}_i и \vec{P}_i ($i = 1, 2$) имеют следующие x, y, z – координаты:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= (0, 0, 1), & \vec{a}_2 &= (0, 1, 0) \\ \vec{b}_1 &= (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), & \vec{b}_2 &= (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \\ \vec{c}_1 &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), & \vec{c}_2 &= (\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \\ \vec{P}_1 &= (r/\sqrt{2}, -r/\sqrt{2}, b/2 - r)\end{aligned}$$

$$\vec{P}_2 = (0, c + r, 0) - (b/2 - r)\vec{b}_2 = [(b/2 - r) \sin \alpha, c + r, -(b/2 - r) \cos \alpha]$$

Отсюда с помощью уравнений (3.2), (3.3) получаем

$$\sin \varphi_1 - \sqrt{2} \sin \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$-\sin \varphi_1 + \sqrt{2} \cos \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\cos \varphi_1 + \cos \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.6)$$

$$r - \sqrt{2}(b/2 - r) \sin \alpha + \lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2 \cos \alpha + 2r \sin \varphi_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$-r - \sqrt{2}(c + r) + \lambda_1 - 2r \sin \varphi_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$(b/2 - r)(1 + \cos \alpha) - \lambda_2 \sin \alpha + 2r \cos \varphi_1 = 0 \quad (3.9)$$

Из этих шести уравнений для φ_1 , λ_1 , φ_2 , λ_2 и c только пять являются линейно независимыми, поскольку левая и правая части уравнения (3.2) являются единичными векторами. Сумма уравнений (3.4) и (3.5) дает

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 1/\sin \alpha, \quad \sin \varphi_2 = -1/\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \quad (3.10)$$

Знак минус в выражении для $\sin \varphi_2$ выбран с учетом, что $\pi < \varphi_2 < 3\pi/2$ (см. рис. 6). Из уравнений (3.4) и (3.6) следует, что

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{2} \sin \alpha \sin \varphi_2, \quad \cos \varphi_1 = -\cos \alpha \sin \varphi_2 \quad (3.11)$$

Уравнения (3.7)–(3.9) линейны по λ_1 , λ_2 и c . Решение для c имеет вид

$$c = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \frac{b}{2} (1 + \cos \alpha) + r \left[-1 - \cos \alpha + 2 \cos \varphi_1 \cos \alpha - (\sqrt{2} + 1) \sin \alpha - 2\sqrt{2} \sin \varphi_1 \sin \alpha \right] \right\}$$

После подстановки в выражения (3.10), (3.11) и (2.1) значений величин $\sin \varphi_1$, $\cos \varphi_1$, $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ найдем, что

$$c = (b/2)\sqrt{1 + \sqrt{2}} - r \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2(3 + \sqrt{2})} \right)$$

Подстановка в равенство (3.1) дает требуемое условие контакта

$$a = b \left(4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{7 + 5\sqrt{2}} \right) - 2r \left(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt{9(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \right) \approx 10.580b - 4.813r \quad (3.12)$$

$$r = 0 \quad (\text{квадратное поперечное сечение}): \quad a \approx 10.580b$$

$$2r = b \quad (\text{круглое поперечное сечение}): \quad a = b \left(1 + \sqrt{9(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \right) \approx 8.173b$$

Фото на рис. 7 демонстрирует модели, выполненные из алюминия и дерева с круглым и квадратным сечением соответственно.

Уравнение (3.12) показывает, что параметр a очень чувствителен к изменениям параметра r . Следствием этого является обстоятельство, что жесткая конструкция квадратного сечения с полосами практически невозможна. В результате малейшего износа острой кромки (углов квадрата) длина a , выбранная в предположении $r = 0$, оказывается слишком большой. Следствием этого является подвижность конструкции, в результате которой в точках, где требуется контакт, возникают большие зазоры. С другой стороны, если величина a слишком мала, сборка конструкции невозможна. Коммерчески доступны трубы круглого сечения высокоточных размеров.

В 2004 г. стальная конструкция из труб диаметром $2r = 40.5$ см была установлена в городе 26406 Витмунд в Остфрисланде, а в 2006 г. конструкция из труб, изготовленных из нержавеющей стали, диаметром $2r = 30$ см – в кампусе Технологического института Карлсруэ (Эта статья была написана в 1992 году. Она ранее не публиковалась, по требованиям сохранения коммерческой тайны). Эти конструкции получили название ТРИАДА. Обе, а точнее их тени, можно увидеть, увеличив масштаб в известном

приложении Google Earth (На сайте <http://itm-serv.itm.uni-karlsruhe.de/ITM/Personal/Wittenburg/TRIADE/start.html> имеется фотография монумента и анимация “Триада – виртуальный тур”).

4. Нереализуемая конструкция. Представьте себе трехмерное пространство, заполненное решеткой из кубов. Каждая грань, общая для двух кубов, есть рама с параметрами a , b и r , которые удовлетворяют соотношению (3.12). Теперь представьте, что на всех трех гранях конструкции, исследуемой в разд. 3, возведена заполняющая пространство решетка из кубов. Можно ли собрать эту конструкцию без натяга полос? Ответ отрицательный. На каждой из трех рам только в одну ее сторону можно вставить куб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brown R., Robinson J.* Borromean circles // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. № 4. P. 376–377.

The Structure Called TRIADE

J. Wittenburg^{a,#}

^a *Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, Germany*

[#]*e-mail: jens.wittenburg@kit.edu*

The structure of three identical absolutely solid flat or spatial square frames is considered. The work proved the existence of a certain angle between the planes of the frames, at which the structure can be realized and has rigidity.

Keywords: absolutely rigid body, square frame, contact condition, full-scale composition

REFERENCES

1. *Brown R., Robinson J.* Borromean circles // Amer. Math. Monthly, 1992, vol. 99, no. 4, pp. 376–377.