

УДК 531.391.1

*К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева***ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ  
НИТИ ЧЕРЕЗ ЗАКРУГЛЕННЫЙ КРАЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СТОЛА**© 2021 г. А. С. Сумбатов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>ФИЦ “Информатика и управление” Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,  
Москва, Россия

\*e-mail: sumbatow@ccas.ru

Поступила в редакцию 10.12.2020 г.

После доработки 06.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается одна из классических контактных задач двумерной динамики нити без трения и с сухим трением. В работе найдена аналитическая формула натяжения нити в этой задаче по всей длине. Исследуются условия схода нити со связи. Наличие интеграла энергии в случае отсутствия трения позволяет получить эти условия аналитически. При наличии трения приведены численно-аналитические результаты исследования.

*Ключевые слова:* гибкая нерастяжимая нить, контактное движение, неударживающая связь, натяжение нити, сухое трение

DOI: 10.31857/S0032823521040135

**1. Введение.** Простые задачи по динамике нити встречаются в классических текстах по теоретической механике [1–7] и др. Как справедливо отметил Ламб ([4], р. 142): “Хотя эти задачи едва ли важны сами по себе, они служат прекрасными иллюстрация-ми принципов Динамики”.

Пусть тяжелая однородная гибкая и нерастяжимая нить одним концом свешивается с горизонтального стола, а другой ее конец, имеющий расправленную прямолинейную форму, лежит на столе под прямым углом к его краю, который закруглен с радиусом  $R$ . Вся нить целиком расположена в одной вертикальной плоскости, и предполагается, что последующее движение нити происходит в этой неподвижной плоскости. Рассматриваются два случая: когда к нити в точках ее контакта со столом приложена сила сухого (кулонова) трения и когда трения нет. В случае наличия трения негоризонтальный участок нити должен быть достаточно массивным, чтобы нить начала скользить из состояния покоя. В ряде постановок задачи край стола предполагается острым ( $R = 0$ ).

Задаче посвящены много работ, укажем основные из них.

Ляв ([2], с. 301–302) рассмотрел случай, когда верхняя часть нити свернута в клубок и лежит близко к острому краю стола (задача Кейли [8]), и отметил, что механическая энергия нити не сохраняется.

Ламб ([4], с. 142–143) нашел решение общей задачи о сползании нити с гладкого стола с острым краем двумя способами, один из которых следует из закона сохранения полной энергии нити.

В монографии [9] указано, что в этой задаче имеется разрыв вектора скорости в точке соприкосновения нити с острым краем стола, поэтому задачу следует решать с уче-

том условия скачка в данной точке. Опираясь на уравнение баланса т.н. материального количества движения нити, автором [9] в итоге получено то же дифференциальное уравнение движения нити, что и у Ламба

$$\frac{du}{dt} = \frac{gx}{l}, \quad (1.1)$$

где  $u$  — значение скорости нити в тот момент, когда длина свешивающейся части нити равна  $x$ ,  $l$  — длина всей нити,  $g$  — ускорение свободного падения. Замечание Ламба о сохранении энергии также справедливо. При этом найдено векторное выражение реакции стола в указанной точке, равное по модулю  $F = \rho x(l-x)^{-1}g - \rho u^2$  ( $\rho$  — погонная масса нити). Отмечено, что при некотором значении скорости  $u$  величина  $F = 0$ , что физически означает, что контакт нити с краем стола при дальнейшем возрастании скорости скольжения будет нарушен.

В действительности, известно более сильное утверждение ([10], с. 212–216, [11, 12]), что уравнение (1.1) непригодно для вычисления времени полного соскальзывания нити со стола из положения равновесия, по причине, что контакт ее с опорой обязательно прекратится раньше. Причем, утверждается, что это верно как при наличии трения между нитью и столом, так и при отсутствии трения. Более того, угол стола может быть не острым, а закругленным конечного радиуса  $R$ .

Следует однако отметить что доказательство, которое приведено в [11] (см. также [13]), несостоятельно. В уравнении (5) проекции на нормаль сил, приложенных к элементу нити, пропущен множителем радиус закругления в произведении на силу  $N$  нормального давления опоры на нить, отнесенную к единице длины нити.

Любопытно, что в работе [12] предпринята, но до конца не доведена попытка вычислить силу реакции стола на закруглении (в правых частях полученных формул для ее горизонтальной и вертикальной компонент присутствует линейное ускорение точек нити с множителем  $R$ , который затем полагается равным нулю).

Близкая по постановке и результатам задача о движении тяжелой нити, свешивающейся с гладкого круглого шкива (машина Атвуда), рассматривалась в работах [14, 15]. В ней также обнаружено, что при безотрывном движении, начавшемся из положения равновесия, еще до того момента, когда хвост нити целиком сползет со шкива, происходит ослабление связи, и контакт нити с окружностью шкива будет нарушен. В работе [14] в предположении малости радиуса шкива построена картина движения нити и получена оценка расстояний, на которые опустится голова и поднимется хвост нити с момента начала движения до момента схода со связи.

В работе [15] радиус гладкого шкива предполагается конечным, а теретические выкладки продемонстрированы результатами экспериментов. При этом к одному из концов нити прикрепленна масса  $M$  такой величины, что массой нити можно пренебречь и считать, что движение происходит с постоянным ускорением. Установлено, что эволюция движения нити во времени  $t$  проходит через три качественно различных фазы. При  $0 \leq t < t_{LO}$  нить движется вокруг шкива с ускорением, задаваемым массой  $M$ . В момент времени  $t = t_{LO}$  нить начинает частично терять контакт со шкивом, и отрывается от него в точке  $C$  первого своего контакта со шкивом, потому что при  $t > t_{LO}$  набегающая часть нити движется быстрее, чем остальная часть. Приходящаяся на дугу шкива между точками  $C$  и  $C^*(t)$  избыточная длина нити образует арку. После того, как свободный конец пройдет мимо точки  $C$ , арка быстро выпрямляется и в момент  $t = t^*$  со щелчком свободный хвост нити, начиная с конца, искривляется в противоположном направлении. Описана кинематика этого движения свободного конца нити в малой окрестности значения  $t = t^*$ .

Дискретная реализация решения задачи о сползании тяжелой нерастяжимой нити с гладкого горизонтального стола дана в [16]. Нить моделируется материальными точками одинаковой массы, которые соединены безмассовыми твердыми стержнями равной длины. Числовые расчеты с разным числом звеньев демонстрируют форму многозвенника, качественно очень близкую к результатам натуральных экспериментов, опубликованных в работе [17], в которой представлено экспериментальное исследование динамики скольжения нити со стола с использованием видеоанализа для проверки теоретической модели. При этом мгновенные координаты  $x(t)$  свисающего конца фиксируются с помощью видеоанализа. Сглаженные значения функции  $x(t)$  и ее производных  $v(t)$  и  $a(t)$  вычисляются с использованием локального алгоритма регрессии. Таким образом, дифференциальное уравнение движения может быть проверено напрямую, вместо того, чтобы сравнивать положение точек нити с решением данного дифференциального уравнения. Описанная процедура оказалась весьма чувствительной к отклонениям между моделью и реальностью, поэтому точка, в которой нить перестает быть натянутой, определяется очень точно, и с этого момента контактная модель движения перестает действовать.

В работе [18] с помощью обобщения принципа Релея диссипации энергии, предложена теория особенностей диссипации в одномерном нерастяжимом континууме, который условно назван струной. На основе построенной теории даны решения трех задач динамики струны и отмечено, что разработанный общий подход заслуживает дальнейшего исследования и экспериментальной проверки. Эти задачи следующие: (а) имея вертикальную прямолинейную начальную конфигурацию, струна падает на горизонтальную плоскость; (б) в начальной конфигурации две ветви струны образуют вертикальную прямую, один конец струны зафиксирован, а другой отпущен и падающая ветвь струны сохраняет прямолинейную форму во все время движения; (с) расположенная на гладком горизонтальном столе струна соскальзывает вниз через отверстие, непрерывно удлиняясь за счет добавления своих неподвижных звеньев.

В задаче (с) внутренний удар в струне распространяется от точки отверстия в опорном столе, в то время как внешний удар сосредоточен в непосредственной близости от этой точки. В результате натяжение струны испытывает скачок, равный

$$\rho f u^2 \operatorname{sgn} u, \quad f = \frac{1-e}{1+e},$$

$e$  – коэффициент восстановления по Ньютону,  $u = \dot{x}$ . И уравнение для координаты  $x(t)$  свисающего конца струны принимает вид

$$(1 + f \operatorname{sgn} u)u^2 + (\dot{u} - g)x = 0 \quad (1.2)$$

При  $f = 0$  уравнение совпадает с уравнением Кейли [8]. Особое решение уравнения (1.3) при начальном условии  $x(0) = u(0) = 0$  соответствует равноускоренному спуску конца струны с ускорением

$$a = \frac{g}{3 + 2f},$$

где  $g/5 \leq a \leq g/3$ .

Из приведенного краткого обзора следует, что остается невыясненной в полной мере кинематика и динамика движения нити в задаче, указанной в заголовке данной статьи, когда радиусом  $R$  закругления края стола пренебречь нельзя. Условия нарушения контактного движения нити исследуются ниже.

**2. Формула натяжения нити по всей длине.** Предполагаем, что один конец нити свободно свешивается с закругленного края стола. На трех участках нити (рис. 1) движение ее описывается разными уравнениями. В осях  $OXY$  верхний конец нити  $A$  имеет абсциссу  $x < 0$ . Длину  $s$  нити отсчитываем от этого конца.

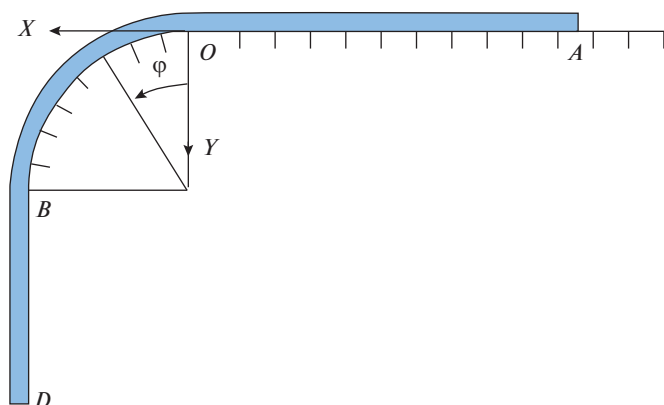


Рис. 1.

Уравнение безотрывного движения нити на участке  $AO$  имеет вид

$$-\rho x \ddot{x} = k\rho xg + T_O,$$

где  $\rho$  – масса единицы длины нити (погонная масса нити),  $k$  – коэффициент сухого трения,  $g$  – ускорение свободного падения тела в пустоте,  $T_O$  – сила натяжения нити, приложенная к отрезку  $AO$  в точке  $O$ . Обозначив  $v$  скорость  $\dot{x}$ , перепишем это уравнение в виде

$$x\dot{v} = -kxg - \rho^{-1}T_O \quad (2.1)$$

На участке  $OB$  уравнения безотрывного движения нити имеют вид ([2], с. 303)

$$\begin{aligned} \rho\dot{v} &= \rho g \sin \varphi + \frac{\partial T}{\partial s} - kN \\ \rho \frac{v^2}{R} &= \rho g \cos \varphi + \frac{T}{R} - N, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\varphi = (s + x)/R$  – угол между осью  $OY$  и главной нормалью дуги  $OB$  окружности,  $T(s, \varphi)$  – натяжение нити в точке, имеющей лагранжеву координату  $s$  ( $-x \leq s \leq -x + a$ ),  $N$  – сила нормального давления опоры, отнесенная к единице длины и приложенная к нити в данной точке.

И, наконец, на вертикальном участке  $BD$  движение нити описывается уравнением

$$l\dot{v} = gl - \rho^{-1}T_B, \quad (2.3)$$

где  $T_B$  – сила натяжения нити, приложенная к отрезку  $BD$  в точке  $B$ .

Здесь введены обозначения  $l = L + x - a > 0$ ,  $a = \pi R/2$ ,  $L$  – общая длина нити.

Сначала рассмотрим случай, когда трения нет ( $k = 0$ ). Из уравнения (2.2)<sub>1</sub> находим

$$T(s, t) = \rho \left[ s\dot{v}(t) + Rg \cos \frac{s + x(t)}{R} \right] + C(t)$$

В силу (2.1) и (2.3)

$$T_O = T(-x, t) = -\rho x\dot{v}, \quad T_B = T(-x + a, t) = \rho l(g - \dot{v})$$

Следовательно,

$$\dot{v} = g(l + R)L^{-1} < g \quad (l + R = y_D), \quad (2.4)$$

где  $y_D$  – ордината конца  $D$  нити и  $C(t) = -\rho Rg$ .

В итоге сила натяжения на закруглении равна

$$T(\varphi, t) = \rho g \left[ R(\cos \varphi - 1) + (R\varphi - x)y_D L^{-1} \right], \quad (2.5)$$

а силы натяжения нити на горизонтальном и вертикальном участках соответственно равны

$$\frac{T(s, t)}{0 \leq s \leq -x} = -\rho s \dot{v}, \quad \frac{T(s, t)}{-x+a \leq s \leq L} = \rho(L-s)(g-\dot{v}),$$

где  $\dot{v}$  определяется уравнением безотрывного движения нити (2.4).

Можно убедиться, что сила натяжения  $T$  нити принимает максимальное значение во внутренней точке закругления края стола (см. (2.5)). Таким образом, сила  $T$  как функция длины  $s$  нити возрастает от нуля в точке  $A$  до максимального значения и потом уменьшается до нуля в своем конце  $D$ .

Пусть  $k \neq 0$ , нить скользит с трением.

Из уравнений (2.2) находим

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{k}{R} T = W, \quad W = \rho \left[ \dot{v} - \frac{k v^2}{R} - g(\sin \varphi - k \cos \varphi) \right],$$

где  $W = W(s, t)$ . Следовательно,

$$\frac{T(s, t)}{-x \leq s \leq -x+a} = \frac{\rho R}{k} \left\{ \frac{k v^2}{R} - \dot{v} + \frac{g}{1+k^2} \left[ k(1-k^2) \cos \varphi + 2k^2 \sin \varphi \right] \right\} + C(t) e^{k\varphi} \quad (2.6)$$

Функции времени  $\dot{v}, C(t)$  находим из условий (2.1) и (2.3).

$$\dot{v} = k \left\{ -v^2 - jQ + \frac{g}{1+k^2} [(1+k^2)l - 2kR] \right\} Z^{-1}$$

$$C(t) = \rho Q + \rho(kx - R)(M + jQ)Z^{-1}$$

После исключения указанных функций в формуле (2.6) получим в результате следующую формулу для натяжения нити в точке  $s$  на закругленном участке стола как функцию  $x(t), v(t)$  и параметров системы  $\rho, R, k, l$ :

$$\frac{T(s, t)}{-x \leq s \leq -x+a} = \rho e^{k\varphi} [Q + (kx - R)(M + jQ)Z^{-1}] + \rho \left\{ v^2 + R(M + jQ)Z^{-1} + Rg \left[ (1-k^2) \cos \varphi + 2k \sin \varphi \right] (1+k^2)^{-1} \right\} \quad (2.7)$$

Здесь

$$j = \exp\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad Q = \frac{g \left[ (k^2 - 1)R - kx(1+k^2) \right]}{1+k^2} - v^2$$

$$M = \frac{g(2kR - (1+k^2)l)}{1+k^2} + v^2, \quad Z = k(l - jx) + R(j - 1)$$

При  $x < 0$  знаменатель  $Z > 0$ .

На элемент нити  $\rho ds$ , опирающийся на дугу  $OB$ , действует скатывающая сила  $\rho g R \sin \varphi d\varphi$  и сила давления  $\rho g R \cos \varphi d\varphi$ . Следовательно, суммарная сила скатывания равна  $\rho g R$ , полная сила сопротивления движению нити равна  $k \rho g (R - x)$ . Поэтому для начала движения нити из состояния покоя необходимо и достаточно выполнение условия

$$l > R(k - 1) - kx \quad (2.8)$$

**3. Где произойдет отрыв нити.** Пусть  $k = 0$ , нить сползает с гладкого стола без начальной скорости.

Интеграл механической энергии нити имеет вид

$$E(v, l) = \frac{1}{2} \rho L v^2 + \rho g R^2 c - \rho g l \left( \frac{1}{2} l + R \right) = h \quad \left( c = 1 - \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда, положив  $h = E(0, l_0)$ , находим

$$v^2 = 2g(x - x_0) \left[ L + \frac{1}{2}(x + x_0) + Rc \right] L^{-1} \quad (3.1)$$

(выражение в квадратных скобках положительно, так как функция  $x(t)$  возрастает,  $x(0) = x_0$ ).

В точке сегмента  $OB$ , в которой ослабнет контакт, мгновенное значение величины

$$N = -b \left[ LR - 2(L + Rc)x_0 - x_0^2 - (L + Rc)s - 2LR \cos \frac{s+x}{R} + (2L - s + 2Rc)x + x^2 \right] \quad (3.2)$$

$$\left( b = \frac{\rho g}{LR} \right)$$

равно нулю. Это выражение следует из уравнений (2.2)<sub>2</sub> и (2.5) с учетом интеграла (3.1).

Если контакт нити на закруглении сохраняется, то на отрезке  $-x \leq s \leq -x + a$  величина  $N$  неотрицательна и имеет экстремум. Из (3.2) следует, что существует единственная точка экстремума строго внутри этого отрезка

$$\frac{dN}{ds} = 0 \Rightarrow \sin \varphi_{\text{extr}} = \frac{y_D}{2L} < \frac{1}{2}, \quad \frac{d^2N}{ds^2} = -\frac{2\rho g}{R^2} \cos \varphi_{\text{extr}} < 0$$

и в ней функция  $N$  достигает максимума. Следовательно, функция  $N$  первоначально обращается в нуль в одной из крайних точек закругления  $O$  или  $B$ .

Возникают два вопроса.

Во-первых, возможно ли движение нити из состояния покоя так, чтобы  $x(t) = 0$ , но при этом контакт нити на закруглении не был бы нарушен. Понятно, что при этом длина  $-x_0$  горизонтального участка нити не должна быть большой, чтобы скорость  $v$  скольжения не возросла бы настолько, что центробежная сила оторвала бы нить от опоры.

Во-вторых, если при  $x(t) < 0$  функция  $N$  на одном из концов обращается в нуль, то в какой точке, в  $O$  или  $B$ .

Подставив  $s = -x_0 + a$  в формулу (15), получим отнесенную к единице длины силу давления на нить в точке  $B$

$$P_B(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

$$a_0 = -2b, \quad a_1 = b(-3L + R - 4Rc)$$

$$a_2 = b \left[ x_0(x_0 + 2L + 2Rc) + R(-L + Rc) - R^2 c^2 \right]$$

Подстановкой  $s = -x_0$  в формулу (3.2) получим силу давления на нить в точке  $O$

$$P_O(x) = b_0 x^2 + b_1 x + a_2$$

$$b_0 = -2b, \quad b_1 = -3b(L + Rc), \quad b_2 = b[x_0(x_0 + 2L + 2Rc) + LR]$$

Так как

$$P_B(x_0) = -\frac{1}{2} b l (x_0 + Rc) > 0, \quad P_O(x_0) = \frac{1}{2} b (-x_0 y_B + LR) > 0,$$

то уравнения

$$P_B(x_0) = 0, \quad P_O(x_0) = 0$$

имеют по паре различных действительных корней, причем, один из корней в паре отрицательный.

Чтобы связь не ослабла при любом  $x \leq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $a_2 > 0$  и  $b_2 > 0$ .

Уравнение  $a_2(x_0) = 0$  имеет два отрицательных корня

$$r_1 = -L - Rc - U^{1/2}, \quad r_2 = -L - Rc + U^{1/2}, \quad U = L^2 + 3LRc + R^2c(2c - 1)$$

так как

$$-L - Rc = -R - (L - a) < 0, \quad 9c^2 - 4c(2c - 1) = c(4 + c) < 0$$

Следовательно, при  $0 > x_0 > r_2$  значение  $P_B(0) = a_2 > 0$ . Случай  $x_0 < r_1 < 0$  не реализуется, поскольку  $-r_1 > L + (c - 1)R > 0$ .

Уравнение  $b_2(x_0) = 0$  имеет корни

$$w_1 = -L - Rc - U_1^{1/2}, \quad w_2 = -L - Rc + U_1^{1/2}, \quad U_1 = L^2 + (2c - 1)LR + R^2c^2,$$

если  $U_1 \geq 0$ , т.е. если

$$LR^{-1} \leq \frac{1}{2} - c - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \approx 0.164818 \quad \text{либо} \quad LR^{-1} \geq \frac{1}{2} - c + \sqrt{\frac{1}{4} - c} \approx 1.97677$$

Так как  $LR^{-1} > \pi/2 \approx 1.5708$ , то  $P_O(0) = b_2 > 0$  в двух случаях: независимо от значения  $x_0$  при  $LR^{-1} < 1.97677$  или когда  $0 > x_0 > w_2$ . Случай  $x_0 < w_1 < 0$  не реализуется, поскольку  $-w_1 > L + (c - 1)R > 0$ . Нетрудно также проверить, что  $w_2 < r_2$ .

Ответим на первый вопрос. Конец  $A$  нити, первоначально покоящейся и сползающей под действием тяжести с горизонтального гладкого стола с закруглением, может достичь точки  $O$  с сохранением контакта на всей дуге  $OB$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы стартовое положение  $x_0$  конца  $A$  находилось в интервале  $0 > x_0 > r_2$ .

При малых значениях радиуса закругления  $R$  длина указанного интервала стремится к нулю, поэтому рассматриваемый случай практически невозможен в случае гладкого стола с почти *острым* краем.

Для ответа на второй вопрос заметим, что  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 > b_1$ ,  $a_2 < b_2$ . Действительно,

$$a_1 - b_1 = -bR(c - 1) > 0, \quad a_2 - b_2 = -bR[Rc(c - 1) + L(c + 1)] < 0$$

Поэтому при  $x < 0$

$$P_B(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 < b_0x^2 + b_1x + b_2 = P_O(x),$$

т.е. контакт в точке  $B$  ослабнет раньше, чем в точке  $O$ .

Пусть нить скользит с трением ( $k \neq 0$ ).

Из уравнения (2.2)<sub>2</sub> и формулы (2.7) находим выражение для силы  $N$ , которая приложена к нити в точках опоры  $OB$  и отнесена к единице длины нити

$$N = \rho \left\{ e^{k\varphi} \left[ g[l(1+k)(R-kx) + Rx(2+k) - R^2] + kv^2(x-l) + 2gR \frac{R-x-k(R+l)}{1+k^2} \right] + \right. \\ \left. + R[g[j(R-kx) - l] + v^2(1-j)] + 2gR^2 \frac{k-j}{1+k^2} \right\} (RZ)^{-1} + \frac{2\rho g}{\sqrt{1+k^2}} \cos(\varphi - \alpha) \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad \alpha = \text{arctg}k$$

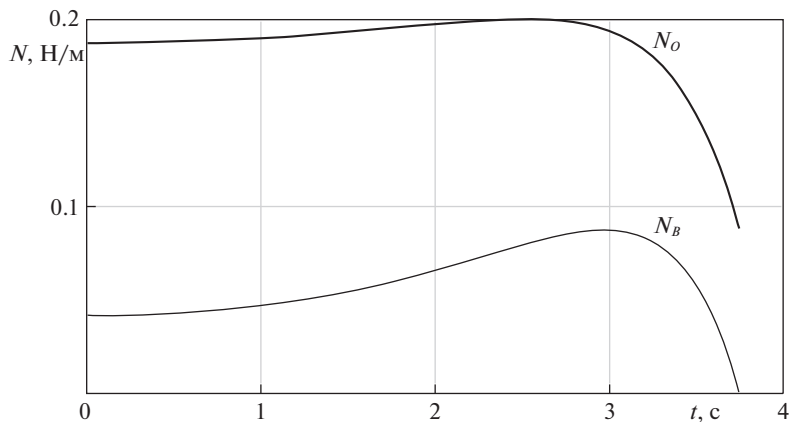


Рис. 2.

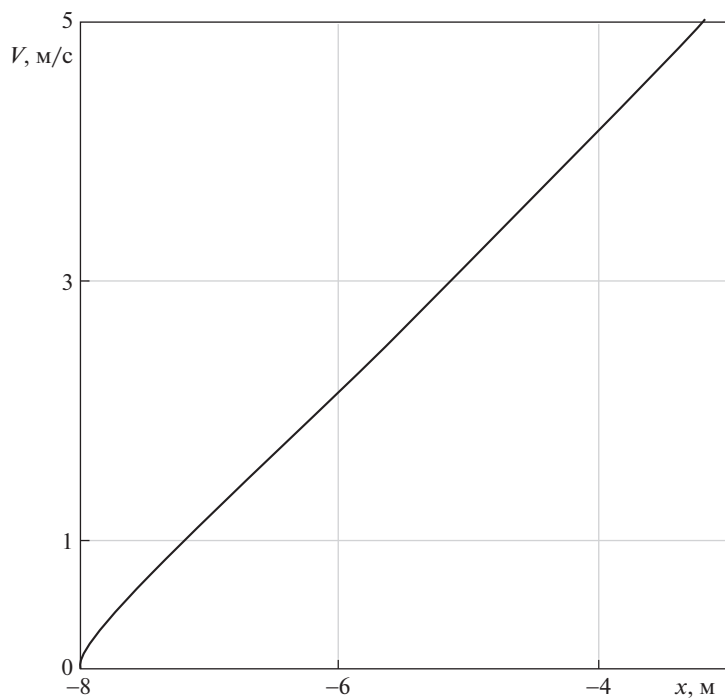


Рис. 3.

Если в точке  $\varphi = \varphi_{\text{extr}}$  функция  $N(\varphi)$  имеет экстремум, то в этой точке

$$\frac{dN}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2N}{d\varphi^2} = -2\rho g \cos \varphi_{\text{extr}} < 0$$

В силу непрерывности функции  $N(\varphi)$  отсюда следует, что она может иметь не более одного локального максимума внутри сегмента  $OB$ , а минимальное (нулевое) значение принимает на одном из его концов, в точке  $O$  или  $B$ .



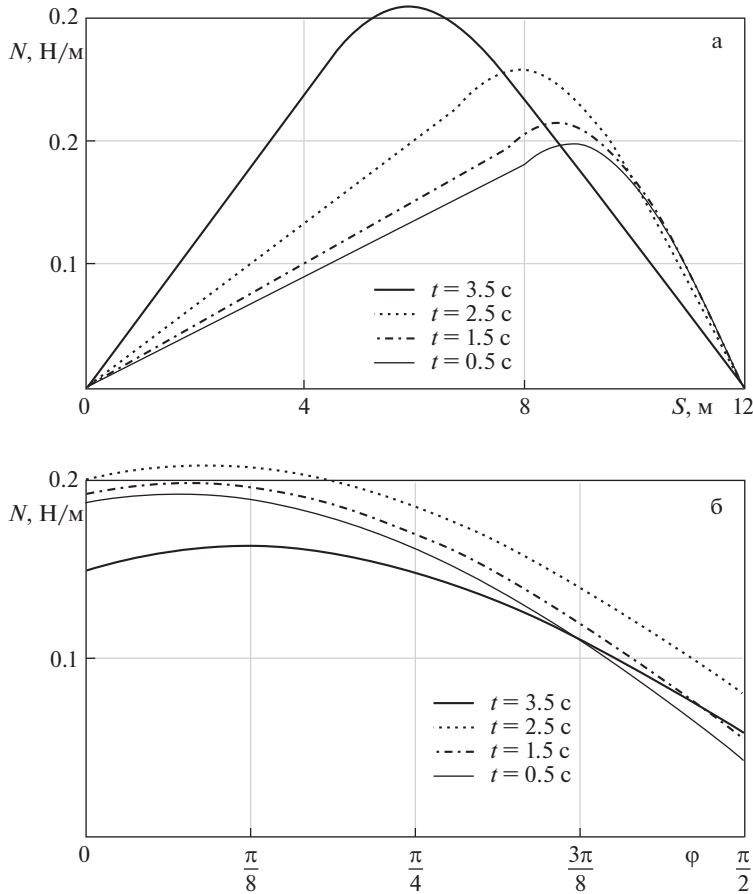


Рис. 4.

Рассмотрим числовой пример.

$$\rho = 0.01 \text{ кг/м}, \quad L = 12 \text{ м}, \quad x_0 = -8 \text{ м}, \quad R = 2 \text{ м}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad k = 0.2.$$

Условие (2.8) выполнено.

Движение нити без нарушения контакта продолжается в течение примерно 3.7 секунды, пока давление  $N_B$  в точке  $B$  не становится равным нулю (рис. 2). В течение этого промежутка времени конец  $A$  нити укоротится с 8 до 3 с небольшим метров (рис. 3).

На рис. 4а приведены графики мгновенных значений натяжения нити по всей ее длине в четыре фиксированных момента времени  $t_i < 3.7\text{с}$ . Натяжение выражается непрерывной, но не гладкой функцией: в точках  $O$  и  $B$  нить испытывает “мягкий” удар за счет изменения скачком кривизны опорной кривой.

На рис. 4б прослеживается эволюция распределения давления на нить со стороны закругленного края стола во время движения.

**Заключение.** Многие технические проблемы приводят к необходимости изучения механических систем с неудерживающими связями. Встречаются такие задачи и в динамике нитей. В ряде работ получила значительное продвижение реология одномер-

ной сплошной среды, с помощью моделей которой решаются сложные контактные задачи динамики нитей, в частности, учитывающие внешние и внутренние ударные взаимодействия. К сожалению, пока остается недостаточным экспериментальное обоснование таких моделей.

В настоящей работе на примере простой контактной задачи из динамики гибкой нерастяжимой нити показано, что существуют случаи, когда классическая механика позволяет исследовать движение нити без привлечения каких-либо дополнительных гипотез и предположений о свойствах нити.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tait P.G., Steel W.J.* A Treatise on the Dynamics of a Particle. 2nd ed. Cambridge, UK: Macmillan, 1865. xvi+363 p.
2. *Love A.E.H.* Theoretical Mechanics (An Introductory Treatise on the Principles of Dynamics). Cambridge: Univ. Press, 1897. xvi+379 p.
3. *Jeans J.H.* An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Boston: GINN & Co Publ., 1907. viii+364 p.
4. *Ламб Г.* Динамика. Пер. с англ. 2-го изд. / Под ред. *Некрасова А.И.* М.; Л.: ГТТИ, 1935. 311 с.
5. *Раус Э.* Динамика систем твердых тел: В 2-х томах. Т. 2 / Под ред. *Архангельского Ю.А., Дёмина В.Г.* М.: Наука, 1983. 544 с.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd LVII. Berlin: Springer, 1967. 796 s.
8. *Cayley A.* On a class of dynamical problems // Proc. R. Soc. London. 1857. V. 8. P. 506–511.
9. *O'Reilly O.M.* Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods (The Role of the Balance Laws). Springer, 2017. xx+425 p.
10. *Lainé E.* Exercices de Mécanique. Librairie Vuibert, Paris. 1964.
11. *Sanmartin Juan R., Vallejo Miguel. A.* Widespread error in a standard problem in the dynamics of deformable bodies // Am. J. Phys. 1978. V. 46. № 9. P. 949–950.
12. *Prato D., Gleiser R.J.* Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table // Am. J. Phys. 1982. V. 50. № 6. P. 536–539.
13. *Sanmartin J.R., Vallejo M.A.* Comment on “Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table” // Am. J. Phys. 1983. V. 51. № 7. P. 585.
14. *Calcin M.G.* The dynamics of a falling chain: II // Am. J. Phys. 1989. V. 57. № 2. P. 157–159.
15. *Brun P.T., Audoly B., Goriely A., Vella D.* The surprising dynamics of a chain on a pulley: lift off and snapping // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2016. V. 472:20160187.
16. *Vrbik J.* Chain sliding off a table // Am. J. Phys. 1993. V. 61. № 3. P. 258–261.
17. *Moreno R., Page A., Riera J., Hueso J.L.* Video analysis of sliding chains: A dynamic model based on variable-mass systems // Am. J. Phys. 2015. V. 83. № 6. P. 258–261.
18. *Virga E.G.* Chain paradoxes // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2014. V. 471: 20140657.

### Plane-Parallel Sliding of a Flexible Inextensible Chain over the Rounded Edge of a Horizontal Table

A. S. Sumbatov<sup>a, #</sup>

<sup>a</sup> FRC “Computer Science and Control”, Dorodnitsyn Computing Center of RAS, Moscow, Russia

<sup>#</sup> e-mail: sumbatov@ccas.ru

One of the classical problems of two-dimensional chain dynamics without and with dry friction is considered. In this problem an analytical formula for the chain tension along its total length is found. The conditions for chain contact release are studied. The existence of the energy integral in the frictionless case makes it possible to obtain these conditions in the

analytical way. In the case when friction exists, the numerical-analytical research results are given.

*Keywords:* exible inextensible chain, contact motion, unilateral constraint, chain tension, dry friction

## REFERENCES

1. *Tait P.G., Steel W.J.* A Treatise on the Dynamics of a Particle. 2nd ed. Cambridge, UK: Macmillan, 1865. xvi+363 p.
2. *Love A.E.H.* Theoretical Mechanics (An Introductory Treatise on the Principles of Dynamics). Cambridge: Univ. Press, 1897. xvi+379 p.
3. *Jeans J.H.* An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Boston: GINN & Co Publ., 1907. viii+364 p.
4. *Lamb H.* Dynamics. Cambridge: Univ. Press. Reprinted, 1961. xii+351 p.
5. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part 2. 6-th ed. N.Y.: McMillan Comp., 1905. xiv+484 p.
6. *Appell P.* Traité de Mécanique Rationnelle. T. 2. Dynamique des systèmes. Mécanique Analytique. 6-e éd. Paris: Gauthier-Villiar. 1953.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd LVII. Berlin: Springer, 1967. 796 s.
8. *Cayley A.* On a class of dynamical problems // Proc. R. Soc. London, 1857, vol. 8, pp. 506–511.
9. *O'Reilly O.M.* Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods (The Role of the Balance Laws). Springer, 2017. xx+425 p.
10. *Lainé E.* Exercices de Mécanique. Librairie Vuibert, Paris. 1964.
11. *Sanmartin Juan R., Vallejo Miguel. A.* Widespread error in a standard problem in the dynamics of deformable bodies // Am. J. Phys., 1978, vol. 46, no. 9, pp. 949–950.
12. *Prato D., Gleiser R.J.* Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table // Am. J. Phys., 1982, vol. 50, no. 6, pp. 536–539.
13. *Sanmartin J.R., Vallejo M.A.* Comment on “Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table” // Am. J. Phys., 1983, vol. 51, no. 7, p. 585.
14. *Calcin M.G.* The dynamics of a falling chain: II // Am. J. Phys., 1989, vol. 57, no. 2, pp. 157–159.
15. *Brun P.T., Audoly B., Goriely A., Vella D.* The surprising dynamics of a chain on a pulley: lift off and snapping // Proc. R. Soc. London. Ser. A, 2016, vol. 472: 20160187.
16. *Vrbik J.* Chain sliding off a table // Am. J. Phys., 1993, vol. 61, no. 3, pp. 258–261.
17. *Moreno R., Page A., Riera J., Hueso J.L.* Video analysis of sliding chains: A dynamic model based on variable-mass systems // Am. J. Phys., 2015, vol. 83, no. 6, pp. 258–261.
18. *Virga E.G.* Chain paradoxes // Proc. R. Soc. London. Ser. A, 2014, vol. 471: 20140657.