
УДК 532.59:534.1

РАВНОМЕРНЫЕ И НЕРАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ОТ ВСПЫХНУВШЕГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА

© 2021 г. В. В. Булатов^{1,*}, Ю. В. Владимиров^{1,**}, И. Ю. Владимиров^{2,***}

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

²*Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, Москва, Россия*

**e-mail: internalwave@mail.ru*

***e-mail: vladimyura@yandex.ru*

****e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2021 г.

После доработки 05.06.2021 г.

Принята к публикации 10.06.2021 г.

В работе исследованы дальние поля поверхностных волновых возмущений от локализованного источника, вспыхнувшего в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены интегральные представления решения, описывающие структуру волновых поверхностных возмущений. Изучены характеристики возбуждаемых волновых полей вдали от источника возмущений. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

Ключевые слова: поверхностные волны, равномерные асимптотики, волновой фронт, функция Эйри

DOI: 10.31857/S0032823521050039

1. Введение. Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [1–4]. Современное состояние результатов исследований линейных и нелинейных поверхностных волновых возмущений содержится в [5–10]. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений [11–16]. В ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования [1–4, 7, 8]. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой однородной жидкости [1–4, 13, 15–17]. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления поверхностных волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред. Ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежит

в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц [8–10]. Для мониторинга и предупреждения опасных природных волновых явлений в океане, в том числе обнаружения волн большой амплитуды, необходимо проводить оперативный анализ волновых явлений с помощью различных математических моделей. Одной из основных используемых моделей можно считать предположение о генерации волновых пакетов импульсным воздействием. Для проведения прогнозных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым, в том числе по фотоснимкам из космоса, волновым картинам [7, 8, 11, 12]. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

Целью настоящей работы является построение равномерных и неравномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых вспыхнувшим источником возмущений в тяжелой однородной жидкости конечной глубины.

2. Постановка задачи и интегральные формы решений. Рассматриваются волновые возмущения на поверхности идеальной тяжелой жидкости конечной глубины H , распространяющиеся от точечного импульсного источника возмущений, вспыхнувшего в момент $t = 0$. Источник находится на глубине z_0 (т.е. в точке $(0, 0, -z_0)$; $0 < z_0 < H$) и мгновенно выбрасывает объем жидкости Q . Следуя [1–5, 7, 8] потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, u, v, w – компоненты возмущения вектора скорости поверхностных волн) в линейном приближении можно описать уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости

$$\Delta\Phi(x, y, z, t) = Q\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad \Phi \equiv 0, \quad t < 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, g – ускорение свободного падения. Решение этой задачи получается путем применения преобразования Фурье по переменным x, y, t . Тогда возвышение свободной поверхности жидкости $\eta(x, y, t)$ можно представить в виде

$$\eta(x, y, t) = \frac{iQ}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega t + \nu y + \mu x)) \frac{\omega \operatorname{ch}(k(H - z_0))}{\operatorname{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))} d\nu d\mu d\omega, \quad (2.1)$$

где $\Omega^2(k) = gk \operatorname{th} kH$ – дисперсионное соотношение для поверхностных волн в слое конечной толщины [1–5, 7].

3. Неравномерные асимптотики решений. Далее будут исследоваться асимптотики интеграла (2.1), позволяющие эффективно рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей вдали от источника возмущений. Внутренний интеграл в (2.1) по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Контур интегрирования необходимо сместить в область $\operatorname{Im} \omega > 0$, тогда замыкая его в нижнюю полу-плоскость, учитывая полюса при $\omega = \pm\Omega(k)$, можно получить

$$\eta(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\mu x + \nu y)) \frac{\operatorname{ch}(k(H - z_0))}{\operatorname{ch}(kH)} \cos(\Omega(k)t) d\nu d\mu$$

Перейдем далее к полярным координатам: $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, проинтегрируем по переменной ψ , в результате имеем

$$\eta(r, t) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(k(H - z_0))}{\text{ch}(kH)} k J_0(kr) \cos(\Omega(k)t) dk \quad (3.1)$$

Заменим функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$: $J_0(kr) \approx \cos(kr - \pi/4)\sqrt{2/\pi kr}$ [18]. Получающийся в результате интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= I_+(r, t) + I_-(r, t) \\ I_{\pm}(r, t) &= \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(it(kV \pm \Omega(k)) - i\pi/4) k^{-1/2} dk \\ F(k) &= \frac{k \text{ch}(k(H - z_0))}{2\sqrt{2r\pi}^{3/2} \text{ch}(kH)}, \end{aligned}$$

где $V = r/t$, функция $\Omega(k)$ продолжается при $k < 0$ нечетным образом, и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Далее рассматривается асимптотика интегралов $I_{\pm}(r, t)$ при больших значениях r, t и фиксированных значениях V , то есть в точке движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\Omega(k)$ – монотонно возрастающая функция k , то фазовая функция интеграла $I_+(r, t)$ не имеет стационарных точек на действительной оси k , потому этот интеграл экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$ (точнее, при $Vt/H \gg 1$). Фазовая функция интеграла $I_-(r, t)$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $\pm k_0$, где k_0 – положительный корень уравнения: $q'(k) = 0$, $q(k) = kV - \Omega(k)$. Тогда главный член асимптотики возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$, может быть вычислен по методу стационарной фазы

$$\eta(r, t) \approx Q \sqrt{\frac{2\pi}{itk_0 q''(k_0)}} F(k_0) \cos(tq(k_0)) \quad (3.2)$$

Асимптотика (3.2) становится непригодной при $V \rightarrow C$ ($C = \sqrt{gH}$ – максимальная групповая скорость поверхностных волн), то есть вблизи волнового фронта, где стационарные точки $\pm k_0$ сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления $k = 0$. Для построения локальных асимптотик с помощью подходящей замены следует свести исходный интеграл к эталонному интегралу. Выбор эталонного интеграла определяется распределением стационарных точек фазовой функции и особых точек подынтегральной функции в зависимости от параметров задачи. Построение асимптотики сводится к выбору соответствующей специальной функции, ее нескольких первых производных и к определению зависимости аргументов этой специальной функции, а также амплитудных и фазовых множителей [19–22]. Вычислим далее локальную асимптотику интеграла $I_-(r, t)$ вблизи волнового фронта, то есть при $V \rightarrow C$, и, соответственно, при $r \approx Ct$. Очевидно, что основной вклад в локальную асимптотику дает окрестность значения $k = 0$, которая отвечает распространению длинных волн с максимальной групповой скоростью [1–4, 17]. При малых значениях k функции $F(k)$, $q(k)$ допускают следующие разложения: $F(k) = F'(0)k + \dots$, $q(k) = q'(0)k + q'''(0)k^3/6 + \dots$, где $F'(0) = (2\pi)^{-3/2} r^{-1/2}$, $q'(0) = V - C$, $q'''(0) = \sqrt{gH}^{5/2}$. Тогда, аппроксимируя фазовую функцию $q(k)$ кубичным полиномом, $F(k)$ – линейной функцией, можно получить

$$I_-(r, t) \approx \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F'(0)\sqrt{k} \exp(it(q'(0)k + q'''(0)k^3/6) - i\pi/4) dk$$

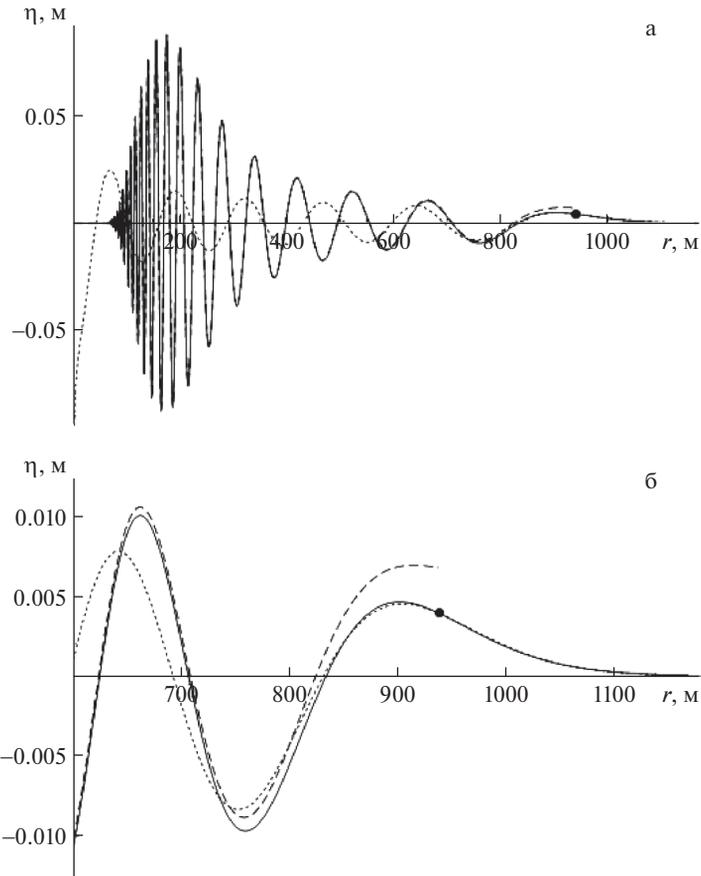


Рис. 1. Точное решение, приближение стационарной фазы и локальная асимптотика.

Локальная асимптотика возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в окрестности волнового фронта $r \approx Ct$ выражается через функцию Эйри и ее производную [20–22]

$$\eta(r, t) \approx -Q(2\pi)^{3/2} F'(0)(q'''(0)t)^{-1/2} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta) \quad (3.3)$$

$$\theta = q'(0)t^{2/3}(2q'''(0))^{-1/3}, \quad \text{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\theta s + s^3/3)) ds$$

На рис. 1 изображены результаты расчетов по точным формулам (3.1) (сплошная линия), в приближении стационарной фазы (3.2) (штриховая линия), и по формуле (3.3) – локальная асимптотика (пунктирная линия), точкой отмечено положение волнового фронта. Для наглядности приведены результаты расчетов для двух пространственных масштабов. Полученные результаты показывают, что вне окрестности волнового фронта метод стационарной фазы позволяет точно описать поведение волнового поля. В окрестности волнового фронта локальная асимптотика практически совпадает с точным решением. Параметры расчетов были следующие: $Q = 10^3 \text{ м}^3$, $t = 60 \text{ с}$, $H = 25 \text{ м}$, $z_0 = 5 \text{ м}$. Используемые в расчетах пространственно-временные параметры соответствуют возможным масштабам нелокальных источников возбуждения поверхностных волн в океане [5, 7, 8, 11, 12].

4. Равномерные асимптотики решений. Для построения равномерной асимптотики интеграла (3.1) выполним регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $q(k)$ в новую функцию: $\tau(s) = q(k(s)) = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарные точки $\pm k_0$ будут отвечать точкам $s_{\pm} = \pm\sqrt{\sigma}$ соответственно. Из этого условия можно получить: $\sigma = (-3q(k_0)/2)^{2/3}$, в результате интеграл $I_-(r, t)$ можно представить в виде

$$I_-(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) s^{-1/2} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds,$$

где $G(s) = F(k(s))\sqrt{s/k(s)} \frac{dk}{ds}$ – регулярная функция переменной s . Действительно, по построению функция $k = k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому $\frac{dk}{ds}$ – четная регулярная функция, $s/k(s)$ – четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{s/k(s)}$ – четная регулярная функция и, следовательно, $G(s)$ – регулярная функция, как произведение трех регулярных функций. Следуя общей схеме метода построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов) функцию $G(s)$ представим в виде [20–22]: $G(s) = P(s) + R(s)$, $P(s) = as^2 + bs + c$, где $P(s)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $-\sqrt{\sigma}$, 0 , $\sqrt{\sigma}$, $R(s) = s(s^2 - \sigma)R_1(s)$, где $R_1(s)$ – регулярная функция. В результате можно получить

$$I_-(r, t) = I_0(r, t) + I_1(r, t)$$

$$I_0(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (as^2 + bs + c) s^{-1/2} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds$$

$$I_1(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) s^{-1/2} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds$$

Интеграл $I_0(r, t)$ вычисляется аналитически [19, 20]

$$I_0(r, t) = \frac{Q}{2} \pi^{3/2} (-ic2^{5/3} t^{-1/6} \text{Ai}^2(\xi) - 2bt^{-1/2} (\text{Ai}^2(\xi))' + ai2^{1/3} t^{-5/6} (\text{Ai}^2(\xi))''),$$

где $\xi = -\sigma(t/2)^{2/3}$. Для интеграла $I_1(r, t)$ справедлива оценка: $I_1(r, t) = O(I_0(r, t)/t)$, так как этот интеграл интегрированием по частям можно привести к виду

$$\begin{aligned} I_1(r, t) &= \frac{iQ}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} (sR_1'(s) + R_1(s)/2) s^{-1/2} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds = \\ &= \frac{iQ}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s) s^{-1/2} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds, \end{aligned}$$

где $G_1(s)$ – регулярная функция. Таким образом $I_1(r, t)$ с точностью до множителя t^{-1} того же вида, что интеграл $I_0(r, t)$. Далее, в силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $a = c = 0$, $b = G(\sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = F(k_0)(2/k_0 q''(k_0))^{1/2}$. Тогда главный член равномерной (по параметру V) асимптотики $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\eta(r, t) \approx -2Q\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_0 q''(k_0)}} F(k_0) \text{Ai}(-\sigma(t/2)^{2/3}) \text{Ai}'(-\sigma(t/2)^{2/3}) \quad (4.1)$$

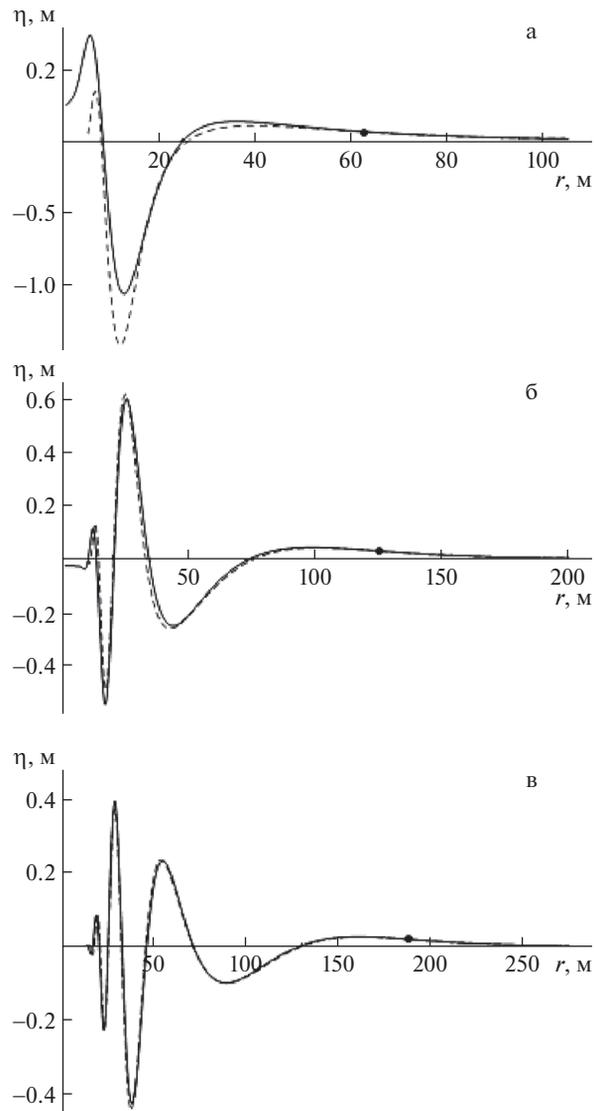


Рис. 2. Точное решение и равномерная асимптотика: а – $t = 4$ с, б – $t = 8$ с, в – $t = 12$ с.

На рис. 2 представлены результаты расчетов по точным формулам (3.1) (сплошная линия), по формуле (4.1) – равномерная асимптотика (штриховая линия) для различных моментов времени, точкой отмечено положение волнового фронта.

Заключение. В работе изучены дальние поля поверхностных возмущений от всплывшего локализованного источника в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта. Изучены характеристики возбуждаемых поверхностных возмущений в зависимости от основных параметров волновой генерации. Полученные асимптотики

дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред. Используемое модельное представление вспыхнувшего источника возмущений может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации волновых пакетов, в том числе волн больших амплитуд [7, 9–12]. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров дают возможность в дальнейшем провести оценку основных характеристик начального возмущения.

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров (№ АААА-А20-120011690131-7), И.Ю. Владимиров (№ 0128-2021-0002), и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // in: *Handbuch der Physik*, Springer, 1960. V. 9. P. 446–778.
2. *Черкесов Л.В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наукова думка, 1973. 247 с.
3. *Алешков Ю.З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
4. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
5. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Publ., 2017. 1500 p.
8. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer AG, 2018. 625 p.
9. *Kharif C., Pelinovsky E., Slynayev A.* Rogue Waves in the Ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
10. *Шамин Р.В.* Математические вопросы волн-убийц. М.: ЛЕНАНД, 2016. 168 с.
11. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 117–127.
12. *Беляев М.Ю., Виноградов П.В., Десинов Л.В., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация по снимкам из космоса источника океанских кольцевых волн вблизи острова Дарвин // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 70–83.
13. *Chen X.-B., Wu G.X.* On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 445. P. 77–91.
14. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *Eur. J. Mech. B Fluids.* 2002. V. 21. P. 283–291.
15. *Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // *Rus. J. Math. Phys.* 2016. V. 23. P. 455–475.
16. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в жидкости бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 23–29.
17. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
18. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.

19. Грикуров В.Э. Явление перекрытия приакустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода // Изв. вузов. Радиофизика, 1980. Т. 23. № 9. С. 1038–1045.
20. Froman N., Froman P. Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge. Univ. Press, 2002. 214 p.
21. Kravtsov Yu., Orlov Yu. Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer. 1999. 228 p.
22. Borovikov V.A. Uniform Stationary Phase Method. IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40. London: Inst. Electr. Engin., 1994. 233 p.

Uniform and Non-Uniform Asymptotics of Far Surface Fields from Flashed Localized Source

V.V. Bulatov^{a,#}, Yu.V. Vladimirov^{a,##}, and I.Yu. Vladimirov^{b,###}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: internalwave@mail.ru*

^{##}*e-mail: vladimyura@yandex.ru*

^{###}*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of surface wave far fields generation from a localized source that flashed in a heavy liquid of finite depth is investigated. Integral representations of the solution are constructed that describe the structure of wave surface disturbances. The characteristics of the excited wave fields far from the source of disturbances are studied. Uniform and non-uniform asymptotic solutions are constructed, expressed in terms of the Airy function and its derivative, which make it possible to describe the far fields of surface perturbations both near and far from the wave front.

Keywords: surface waves, uniform asymptotics, wave front, Airy function

REFERENCES

1. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // in: Handbuch der Physik, Springer, 1960. Vol. 9, pp. 446–778.
2. Cheresov L.V. Surface and Internal Waves. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 247 p. (in Russian)
3. Aleshkov Yu.Z. Theory of Waves on the Surface of a Heavy Liquid. Leningrad: Univ. Press, 1981.
4. Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 2001. 524 p.
5. Shamin R.V. Computational Experiments in Modeling of the Surface Waves in the Ocean. Moscow: Nauka, 2008. 133 p. (in Russian)
6. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Waves in Stratified Media. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)
7. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Publ., 2017. 1500 p.
8. Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer AG, 2018. 625 p.
9. Kharif C., Pelinovsky E., Slynayev A. Rogue Waves in the Ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
10. Shamin R.V. Mathematical Modelling of Rogue Waves. Moscow: Lenand, 2016. 168 p. (in Russian)
11. Belyaev M.Y., Desinov L.V., Kumakshev S.A., Sekerzh-Zen'kovich S.H., Krikalev S.K. Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2009, no. 1, pp. 110–120.
12. Belyaev M.Y., Vinogradov P.V., Desinov L.V., Kumakshev S.A., Sekerzh-Zen'kovich S.H. Identification of a source of oceanic ring waves near Darwin's island based on space photos // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2011, no. 1, pp. 67–80.
13. Chen X.-B., Wu G.X. On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // J. Fluid Mech., 2001, vol. 445, pp. 77–91.
14. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech.. B Fluids, 2002, vol. 21, pp. 283–291.

15. *Dobrokhotov S. Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // *Rus. J. Math. Phys.*, 2016, vol. 23, pp. 455–475.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I. Yu.* Far fields of the surface disturbances produced by a pulsating source in an infinite-depth fluid // *Fluid Dyn.*, 2017, no. 5, pp. 617–622.
17. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Phys. Uspekhi*, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
18. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
19. *Grikurov V.É.* Caustic overlap in a surface waveguide and a generalization of the ray method // *Radiophys. & Quantum Electr.*, 1980, vol. 23, iss. 9, pp. 690–695.
20. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
21. *Kravtsov Yu., Orlov Yu.* Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
22. *Borovikov V.A.* Uniform Stationary Phase Method. IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40. London: Inst. Electr. Engin., 1994. 233 p.