

УДК 532.516:534:1

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

© 2021 г. А. А. Гурченков^{1,2,*}¹ФИЦ “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия²МАИ (исследовательский университет), Москва, Россия

*e-mail: challenge2005@mail.ru

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.

После доработки 11.04.2021 г.

Принята к публикации 20.04.2021 г.

Изучается эволюция течения вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине в присутствии магнитного поля. Представлено аналитическое решение трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. Определено поле скоростей и индуцированное магнитное поле в потоке вязкой электропроводной жидкости, заполняющей полупространство, ограниченное плоской стенкой. Жидкость вместе с ограничивающей плоскостью вращается как одно целое с постоянной угловой скоростью вокруг неперпендикулярного к плоскости направления. Неустановившийся поток индуцирован внезапно начинающимися колебаниями стенки и приложенным магнитным полем, направленным перпендикулярно плоскости. Рассматривается ряд частных случаев движения стенки. На основании полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенки.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, электропроводная жидкость, нормальные колебания, пограничные слои

DOI: 10.31857/S0032823521050040

1. Введение. Магнитная гидродинамика (МГД) начала интенсивно развиваться с середины прошлого века в связи с бурным развитием исследований в астрофизике, термоядерной энергетике, а также созданием новых приборов и устройств для энергетических и двигательных систем.

Большой цикл работ был связан с исследованием магнитогидродинамических пограничных слоев. Интерес к подобной проблематике связан с возможностью использования электромагнитного поля как управляющего фактора, приводящего к перестройке всего течения, что особенно актуально в связи с развитием гиперзвуковой аэродинамики и ракетной техники. Была найдена глубокая аналогия между обтеканием тел и обтеканием локальных сопротивлений.

Данное исследование обобщает предыдущие результаты [1–5]. Изучалось [1] нестационарное движение вязкой жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой. Рассматривались [2] неустановившиеся пограничные слои вязкой несжимаемой жидкости (слои Рэлея–Стокса) на вращающейся пластине в отсутствие магнитного поля. Эволюция вязкого потока на вращающейся пластине, индуцированная продольными колебаниями стенки и вдувом (отсосом) среды в отсутствие магнитного поля, изучалась в [3]. Установившееся течение идеальной электропроводной жидкости вращающейся между параллельными стенками в постоянном магнитном поле исследовалось в [4]. Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости

между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля представлено в [5]. В настоящей работе изучается нестационарный поток несжимаемой вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине при наличии магнитного поля. Жидкость занимает полупространство, ограниченное плоской стенкой и вращается вместе со стенкой с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси. В момент времени $t > 0$ стенка начинает совершать продольные колебания и в тот же момент времени по нормали к стенке включается однородное магнитное поле, индукция которого постоянна. Далее исследуется распространение возмущений в однородной проводящей среде под действием однородного магнитного поля и продольных колебаний стенки. Побудительными мотивами написания данной работы явились как фундаментальный, так и сугубо прикладной аспекты в современных геофизических исследованиях. В частности, весьма насущна проблема определения параметров искусственного источника волн, по электромагнитному эффекту вызванного им вращения. Актуальность темы обусловлена необходимостью изучения Мирового океана, играющего все большую роль в жизни человечества. Это способствовало началу исследований макроскопических движений морской воды (проводящая жидкость), находящейся в магнитном поле Земли, которые сопровождаются появлением электрических токов и, как следствие, индуцированного магнитного поля. Тем самым задача определения индуцированного электромагнитного поля распадается на две части: определение поля скоростей волнения и нахождение по заданному полю скоростей электромагнитного возмущения. При этом скорость движения среды находят или из результатов натуральных наблюдений, или из решения гидродинамической задачи. Представленная работа может служить математической моделью течений морской воды, находящейся в магнитном поле Земли, а также других процессов в астрофизических задачах (магнитосферах планет, джетах и аккреционных дисках и т.п.). В работе обсуждается случай резонанса (частота продольных колебаний стенки совпадает с удвоенной частотой проекции угловой скорости вращения системы тело–жидкость). Резонанс приводит к нетривиальному физическому эффекту: амплитуда колеблющегося поля скоростей не стремится к нулю на бесконечности, а остается ограниченной.

2. Аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики. Рассмотрим движение вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в полупространстве, ограниченном плоской стенкой, которая вращается вместе со стенкой как одно целое с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$, причем вектор ω_0 образует с этой плоскостью угол β ($0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$). Бесконечная пластина H ограничивает полупространство Q , заполненное несжимаемой жидкостью плотности ρ , кинематической вязкости ν и магнитной проницаемости μ . Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U . Схематично геометрия представлена на рис. 1.

Свяжем с пластиной декартову систему координат Q_{xyz} с ортами \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z так, что плоскость O_{xz} совпадает с пластиной, а ось Q_y направлена перпендикулярно пластине внутрь жидкости.

В момент времени $t > 0$ пластина начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $\vec{u}(t)$ и в этот момент включается однородное магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , которое направлено перпендикулярно пластине, т.е. $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$.

Перед тем как написать уравнения движения вязкой электропроводной жидкости скажем несколько слов об уравнении индукции $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B}$. Важным свойством этого уравнения является его инвариантность по отношению к переходу к вращающейся системе координат. Это объясняется тем, что в магнито-гидродинамическом приближении поле \vec{B} обладает указанной инвариантностью. Другое важное

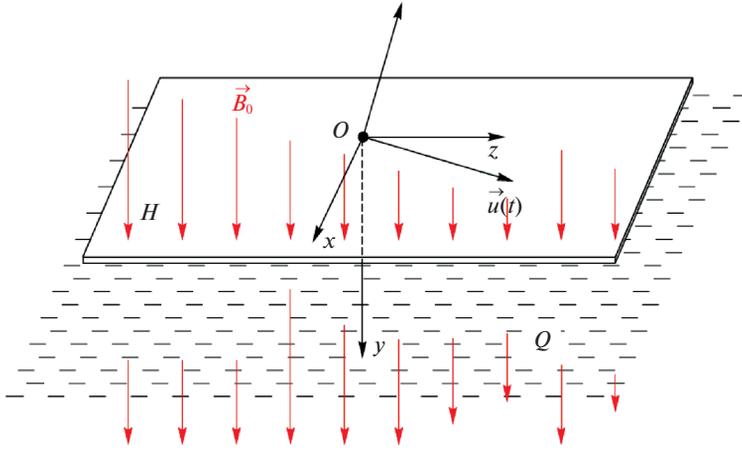


Рис. 1.

свойство этого уравнения заключается в том, что в случае бесконечно проводящей жидкости сохраняется поток поля \vec{B} через любую материальную поверхность в жидкости (силовые линии вморожены в движущееся вещество). Магнитное число Рейнольдса $Re_m = \frac{VL}{\nu_m}$, выражающее отношение по порядку величины второго члена в правой стороне этого уравнения к первому, будем считать большим. Здесь V – характерная скорость задачи, L – характерный размер, ν_m – магнитная вязкость. Случай $Re_m \ll 1$ реализуется не только при очень высокой проводимости, но и в случае больших размеров и скоростей системы, что характерно для астрофизических задач. Поскольку представленная задача может служить математической моделью течения морской воды (проводящая жидкость) в магнитном поле вращающейся Земли, то имеет место случай $Re_m \gg 1$. В этом случае в уравнении индукции нужно оставить только первый член.

Уравнение движения жидкости в системе координат Q_{xyz} , вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, а также граничные и начальные условия имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \\ &+ \nabla U + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\mu \rho} \text{rot } \vec{B} \times \vec{B} \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \quad \text{при } \vec{r} \in Q \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \\ \text{div } \vec{B} &= 0, \quad \text{при } \vec{r} \in Q \end{aligned} \tag{2.1}$$

граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}, t) &= \vec{u}(t), \quad \vec{r} \in H, \quad t > 0 \\ |\vec{v}(\vec{r}, t)| &\rightarrow 0, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty, \quad t > 0 \\ \vec{v}(\vec{r}, 0) &= 0, \quad \vec{r} \in Q \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 = \text{const}, \quad \vec{r} \in H, \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{r} \in Q$$

Здесь t – время, \vec{r} – радиус-вектор относительно полюса O , \vec{v} – скорость жидкости, P – давление.

Решение системы уравнений (2.1), удовлетворяющее начальным и граничным условиям ищем в виде:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x(y, t)\vec{e}_x + v_z(y, t)\vec{e}_z \\ \vec{B} &= B_x(y, t)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + B_z(y, t)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$P = \frac{\rho}{2}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r})^2 + \rho U + \rho q(y, t)$$

Тогда система (2.1) распадается на подсистемы:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \cdot \vec{e}_y \cdot v_z = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - 2\vec{\omega}_0 \cdot \vec{e}_y \cdot v_x = v \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\vec{v}(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y) - \frac{1}{\mu\rho} \left(B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (2.5)$$

Обозначим $\omega_y = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{e}_y = \Omega$ и введем комплексную структуру

$$\hat{v} = v_x(y, t) + iv_z(y, t), \quad \hat{u} = u_x + iu_z, \quad \hat{B} = B_x(y, t) + iB_z(y, t)$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - i2\Omega\hat{v} &= v \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu\rho} \frac{\partial \hat{B}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

граничные и начальные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \hat{v}(y, t) &= \hat{u}(t), \quad \text{при } y = 0, \quad \hat{B}(y, t) = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad t > 0 \\ |\hat{v}(y, t)| &= 0, \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad |\hat{B}(y, t)| = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \\ \hat{v}(y, 0) &= 0, \quad \hat{B}(y, 0) = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Исключая магнитную индукцию из уравнений (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} &= 0 \\ \hat{v}(0, t) &= \hat{u}(t) \quad \text{при } y = 0 \\ \hat{v}(0, t) &= 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \\ \hat{v}(y, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) ищем с помощью синус-преобразования Фурье, которое введем формулой [8]

$$\vec{V}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \vec{V}(y, t) \sin \lambda y dy$$

Дифференциальное уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(\lambda, t)}{\partial t^2} + (v\lambda^2 - i2\Omega) \frac{\partial \tilde{V}(\lambda, t)}{\partial t} + \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho} \tilde{V}(\lambda, t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(v\dot{u}'_t + \frac{B_0^2}{\mu\rho} \hat{u} \right) = \mu(\lambda, t) \quad (2.8)$$

$$\tilde{V}(\lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}(\lambda, 0)}{\partial t} = 0,$$

здесь $\mu(\lambda, t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(v\dot{u}'_t + \frac{B_0^2}{\mu\rho} \hat{u} \right)$.

Характеристическое уравнение (2.8) и его корни

$$q^2 + (v\lambda^2 - i2\Omega)q + \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho} = 0$$

$$q_{1,2} = -\frac{1}{2}(v\lambda^2 - i2\Omega) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(v\lambda^2 - i2\Omega)^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho}} = \sigma \pm \omega,$$

где

$$\sigma = -\frac{1}{2}(v\lambda^2 - i2\Omega), \quad \omega^2 = \frac{1}{4}(v\lambda^2 - i2\Omega)^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho} = \sigma^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho}$$

Решение неоднородного уравнения (2.8) имеет вид

$$\tilde{V}(\lambda, t) = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t},$$

где c_1, c_2 находятся по методу Лагранжа вариации произвольных постоянных

$$c'_1 e^{q_1 t} + c'_2 e^{q_2 t} = 0$$

$$c'_1 q_1 e^{q_1 t} + c'_2 q_2 e^{q_2 t} = \mu(\lambda, t)$$

Откуда

$$c_1(t) = \tilde{c}_1 + \int_0^t \frac{\mu(\lambda, \tau) e^{-q_1 \tau}}{q_1 - q_2} d\tau, \quad c_2(t) = \tilde{c}_2 - \int_0^t \frac{\mu(\lambda, \tau) e^{-q_2 \tau}}{q_1 - q_2} d\tau$$

Наконец

$$\tilde{V}(\lambda, t) = \tilde{c}_1 e^{q_1 t} + \tilde{c}_2 e^{q_2 t} + \frac{1}{q_1 - q_2} \int_0^t \mu(\lambda, \tau) (e^{q_1(t-\tau)} - e^{q_2(t-\tau)}) d\tau \quad (2.9)$$

Удовлетворяя начальным условиям, получаем

$$\tilde{V}(\lambda, t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \mu(\lambda, \tau) e^{\sigma(t-\tau)} \text{sh } \omega(t-\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Для нахождения $\hat{V}(y, t)$ применим обратное синус-преобразование Фурье

$$\hat{V}(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^\infty \tilde{V}(\lambda, t) \sin \lambda y d\lambda$$

имеем

$$\hat{V}(y, t) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\omega_0} \int_0^t \left[v\dot{u}'_t(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} \hat{u}(\tau) \right] e^{\sigma(t-\tau)} \text{sh } \omega(t-\tau) d\tau \sin \lambda y d\lambda$$

или

$$\hat{V}(y, t) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^t \left[v \hat{u}'_t(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} \hat{u}(\tau) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda y}{\omega} e^{\sigma(t-\tau)} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) d\lambda d\tau \quad (2.11)$$

Вектор касательных напряжений, действующий со стороны жидкости на стенку, определяется выражением [1]

$$\hat{F} = \rho v \left. \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Подставляя скорость $\hat{V}(y, t)$ из (2.11), получаем

$$\hat{F} = \rho v \frac{2}{\pi_0} \int_0^t \left[v \hat{u}'_t(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} \hat{u}(\tau) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\omega} e^{\sigma(t-\tau)} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) d\lambda d\tau \quad (2.12)$$

Найденные соотношения полностью решают задачу.

3. Продольные квазигармонические колебания пластины. Рассмотрим квазигармонический режим, т.е. будем считать, что все временные факторы задачи зависят от времени посредством множителя $e^{\lambda t}$: $\lambda = -\alpha + i\omega$.

Система уравнений (2.6), (2.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda v_x + 2\Omega v_z &= v \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial}{\partial y} B_x \\ \lambda v_z - 2\Omega v_x &= v \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_z + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial}{\partial y} B_z \\ \lambda B_x &= B_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \lambda B_z &= B_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\bar{v}(\bar{\omega}_0 \times \bar{e}_y) - \frac{1}{\mu\rho} \left(B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Исключим из уравнений (3.1) магнитную индукцию. Тогда система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \lambda v_x + 2\Omega v_z &= \left(v + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \lambda v_z - 2\Omega v_x &= \left(v + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

умножим второе уравнение на i и сложим с первым уравнением

$$\lambda(v_x + iv_z) - 2\Omega i(v_x + iv_z) = \left(v + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v_x + iv_z) \quad (3.2)$$

Обозначим $v_x + iv_z = W_2$, $W_2|_{y=0} = u_x(0) + iu_z(0)$, тогда

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = \frac{\lambda - i2\Omega}{v + B_0^2/\mu\rho\lambda} W_2; \quad W_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty$$

Далее, умножая второе уравнение на i и вычитая из первого, получаем

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = \frac{\lambda + i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda} W_1 \quad (3.3)$$

$$W_1 = v_x - iv_z, \quad W_1|_{y=0} = u_x(0) - iu_z(0), \quad W_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

при этом

$$\begin{aligned} W_1 &= v_x - iv_z; & v_x &= \frac{1}{2}(W_1 + W_2) \\ W_2 &= v_x + iv_z; & v_z &= \frac{i}{2}(W_1 - W_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение уравнений (3.2)–(3.4) существует при $\lambda \neq \pm i2\Omega$.

$$\begin{aligned} W_1 &= [u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y}, & \text{где} & \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda + i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}, & \text{Re } \mu_1 < 0 \\ W_2 &= [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y}, & \text{где} & \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}, & \text{Re } \mu_2 < 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2} \left([u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y} + [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y} \right) e^{\lambda t} \\ v_z &= \frac{i}{2} \left([u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y} - [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y} \right) e^{\lambda t} \\ B_x &= \frac{B_0}{\lambda} \frac{\partial v_x}{\partial y}, & B_z &= \frac{B_0}{\lambda} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ q(y, t) &= 2 \int \bar{v} (\bar{\omega}_0 \times \bar{e}_y) dy - \frac{1}{2\mu\rho} (B_x^2 + B_z^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Или в векторной форме:

$$\bar{v}(y, t) = e^{\lambda t} \left[\bar{u}(0) \frac{E_1 + E_2}{2} + i\bar{u}(0) \times \bar{e}_y \frac{E_1 - E_2}{2} \right], \quad (3.7)$$

где $E_j = e^{\mu_j y}$; $j = 1, 2$, $\mu_j = \sqrt{\frac{\lambda \pm i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}$.

Рассмотрим резонансный случай: $\lambda = \pm i2\Omega$. Тогда:

$$\begin{aligned} \bar{v}(y, t) &= e^{\lambda t} \left[\bar{u}(0) \frac{E_1 + 1}{2} + i\bar{u}(0) \times \bar{e}_y \frac{E_1 - 1}{2} \right] & \text{при} & \quad \lambda = +i2\Omega \\ \bar{v}(y, t) &= e^{\lambda t} \left[\bar{u}(0) \frac{1 + E_2}{2} + i\bar{u}(0) \times \bar{e}_y \frac{1 - E_2}{2} \right] & \text{при} & \quad \lambda = -i2\Omega \end{aligned}$$

В обоих случаях при $y \rightarrow \infty$ поле скоростей жидкости

$$\bar{v}(y, t) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} [\bar{u}(0) \mp i\bar{u}(0) \times \bar{e}_y]$$

носит колебательный характер и, оставаясь ограниченным, не стремится к нулю. В этом резонансном случае $\lambda = \pm i2\Omega$ решение удовлетворяет условиям на пластинке H , но не удовлетворяет условиям на бесконечности. Это так называемый “гидродинамический парадокс”.

Из соотношений (3.7) находим поле $\vec{B} = (B_x, B_z)$

$$\vec{B}(y, t) = \frac{B_0}{\lambda} e^{\lambda t} \left[\bar{u}(0) \frac{\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2}{2} + i \bar{u}(0) \times \bar{e}_y \frac{\mu_1 E_1 - \mu_2 E_2}{2} \right]$$

и поле давлений

$$q(y, t) = \left[(\bar{\omega}_0 \times \bar{e}_y) \left[\bar{u}(0) \left(\frac{E_1}{\mu_1} + \frac{E_2}{\mu_2} \right) + i (\bar{u}(0) \times \bar{e}_y) \left(\frac{E_1}{\mu_1} - \frac{E_2}{\mu_2} \right) \right] \right] e^{\lambda t} - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu \rho} |\vec{B}(y, t)|^2$$

4. Структура пограничных слоев. Пусть пластина движется со скоростью $\bar{u}(t) = \bar{u}(0) e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha + i\omega$. Поле скоростей вязкой электропроводной жидкости имеет вид

$$\vec{v}(y, t) = e^{(-\alpha+i\omega)t} \left[\bar{u}(0) \frac{E_1 + E_2}{2} + i \bar{u}(0) \times \bar{e}_y \frac{E_1 - E_2}{2} \right], \quad (4.1)$$

где $E_1 = e^{\mu_1 y}$, $E_2 = e^{\mu_2 y}$, $\mu_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda \pm i2\Omega}{v + B_0^2/\mu\rho\lambda}}$, $\text{Re } \mu_{1,2} < 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\lambda \pm i2\Omega}{v + B_0^2/\mu\rho\lambda} = \frac{-\alpha A + B(\omega \pm 2\Omega) + i(\alpha B + A(\omega \pm 2\Omega))}{A^2 + B^2},$$

где $A = v - \frac{\alpha B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}$, $B = -\frac{\omega B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}$.

Тогда $A^2 + B^2 = v^2 + \frac{B_0^4 - 2v\alpha\mu\rho B_0^2}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}$.

Обозначим

$$C = \frac{-\alpha A + B(\omega \pm 2\Omega)}{A^2 + B^2}, \quad D = \frac{\alpha B + A(\omega \pm 2\Omega)}{A^2 + B^2}$$

Рассмотрим $\mu_{1,2} = \sqrt{C + iD}$.

Введем обозначения $\sqrt{C + iD} = \mu_{1,2} = \frac{1}{\delta_{1,2}} + ik_{1,2}$, где индекс 1 соответствует знаку +, индекс 2 – знаку –.

При этом

$$\frac{1}{\delta_{1,2}^2} = \frac{\sqrt{C^2 + D^2} + C}{2}, \quad k_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{C^2 + D^2} - C}{2}$$

С учетом введенных обозначений поле скоростей принимает вид:

$$\vec{v} = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)},$$

где $\hat{A}_1 = \frac{1}{2} [\bar{u}(0) + i \bar{u}(0) \times \bar{e}_y] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_1}$, $\hat{A}_2 = \frac{1}{2} [\bar{u}(0) - i \bar{u}(0) \times \bar{e}_y] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_2}$.

Полученное решение представляет суперпозицию двух волн с волновыми числами $k_{1,2}$ и частотой ω , распространяющихся вдоль оси Oy навстречу друг другу и экспоненциально затухающих на расстояниях порядка $\delta_{1,2}$ соответственно. Величина пограничного слоя определяется расстоянием, на котором амплитуда волны уменьшается в “ e ” раз, т.е. $\delta_{1,2}$ это толщины пограничных слоев, примыкающих к стенке.

Плоские волны индуцированы затухающими гармоническими колебаниями пластины. Фазовые скорости этих волн различны, т.к. волновые числа k_1, k_2 различны. Кроме того, скорости зависят от частоты. Это означает, что поток вязкой электропроводной жидкости представляет собой дисперсионную среду.

Групповые скорости этих волн $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ также различны. Они зависят от коэффициентов затухания и вращения системы, магнитной индукции и параметров жидкости. Амплитуды этих волн зависят от величины проекции угловой скорости на ось y , параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости. Отметим, что волна, излучаемая стенкой, затухает на глубине δ_1 , а другая волна, набегающая из бесконечности на стенку, затухает на глубине δ_2 .

Выберем индукцию поля $B_0^2 = 2\nu\alpha\mu\rho$. Тогда $A^2 + B^2 = v^2$, где $A = v \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$, $B = -v \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$.

В этом случае волновые числа имеют вид

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\nu}} \left(\sqrt{1 + \frac{(\omega \pm 2\Omega)^2}{\alpha^2}} + \frac{2\omega(\omega \pm 2\Omega)}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}} \left(\sqrt{1 + \frac{(\omega \pm 2\Omega)^2}{\alpha^2}} - \frac{2\omega(\omega \pm 2\Omega)}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Волновые числа k_1 и k_2 , а также величины пограничных слоев δ_1 и δ_2 не зависят от магнитной проницаемости и электропроводности жидкости и определяются лишь коэффициентом затухания α и вязкостью жидкости ν .

Кроме того, на характер распространения волн существенное влияние оказывает вращение жидкости (проекция угловой скорости вращения системы на ось Oy).

Введем безразмерную переменную $Y = \omega/\alpha$ и безразмерный параметр $S = 2\Omega/\alpha$. Тогда выражения для волновых чисел примут вид

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\nu}} \left(\sqrt{1 + (Y \pm S)^2} + \frac{2Y(Y \pm S)}{Y^2 + 1} + \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}} \left(\sqrt{1 + (Y \pm S)^2} - \frac{2Y(Y \pm S)}{Y^2 + 1} - \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

На рис. 2 представлены графики зависимости волновых чисел k_1, k_2 от Y (частота ω при фиксированном $s = 2$).

В рассматриваемом случае $k(\omega)$ – волновое число, вообще говоря, комплексное. Его действительная часть характеризует зависимость фазовой скорости волны от частоты, а мнимая часть – зависимость коэффициента затухания амплитуды волны от частоты. Дисперсия, как правило, связана с внутренними свойствами материальной среды. При этом выделяются частотная (временная) дисперсия, когда поляризация в диспергирующей среде зависит от значений поля в предшествующие моменты времени (память), и пространственная дисперсия, когда поляризация в данной точке зависит от значений поля в некоторой области пространства (нелокальность). Из графиков видно, что волновое число k_2 монотонно возрастает с увеличением частоты коле-

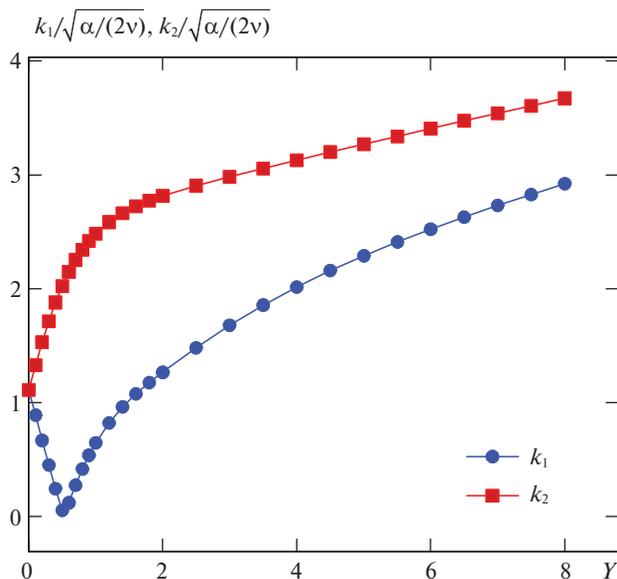


Рис. 2.

баний стенки, в то время как волновое число k_1 имеет сложный характер и угловую точку.

Анализ зависимостей волновых чисел δ_1 и δ_2 от Y (частоты ω) при фиксированном s ($s = 2$), представленных на рис. 3, показывает, что существуют особые точки нестационарной задачи, в окрестности которых волновые числа обращаются в бесконечность. При этом производные $\partial\delta_1/\partial Y$ и $\partial\delta_2/\partial Y$ терпят разрыв первого рода, поэтому вопрос распространения волновых пакетов в данной среде необходимо дополнительно исследовать. Для волны, излучаемой колеблющейся стенкой, особой точкой является $Y = 2.81$, в окрестности которой волновое число δ_1 терпит разрыв и с ростом частоты стремится к нулю. При этом скорость волнового пакета v_{gr1} , представленная на рис. 4 терпит разрыв также в этой точке ($Y = 2.81$). Волна, набегающая на стенку, имеет особую точку $Y = 1.31$, в которой волновое число δ_2 имеет бесконечный разрыв и при дальнейшем росте частоты стремится к нулю.

Рассмотрим случай резонанса $\omega = 2\Omega$ (в безразмерных переменных $Y = S$). Волновое число и толщина пограничного слоя для волны, излучаемой стенкой, имеют вид

$$k_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2v}} \left\{ \sqrt{1 + 4S^2} + \frac{5S^2 - 1}{S^2 + 1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{2v}{\alpha}} \left\{ \sqrt{1 + 4S^2} - \frac{5S^2 - 1}{S^2 + 1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

При этом набегающая волна имеет волновое число $k_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{v}} \frac{S}{\sqrt{1 + S^2}}$ и толщину пограничного слоя $\delta_2 = \sqrt{\frac{v}{\alpha}} \sqrt{1 + S^2}$.

Представляет интерес сравнить полученное решение с решением задачи о колебаниях плоской стенки в вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся в полупространстве ограниченной стенкой, рассмотренной в работе [6].

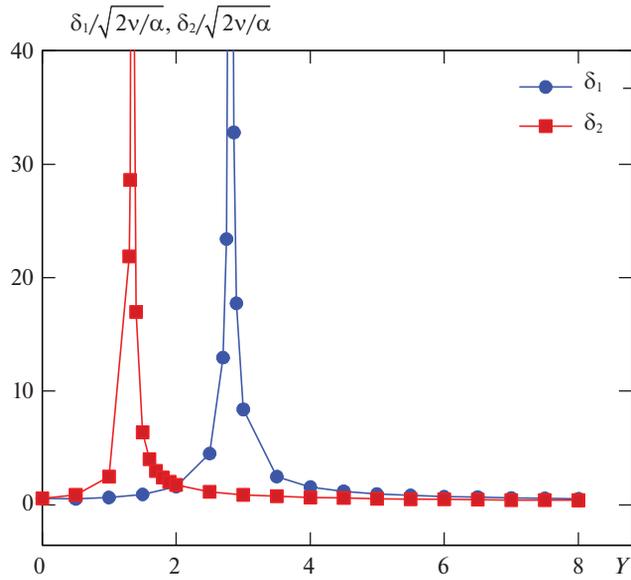


Рис. 3.

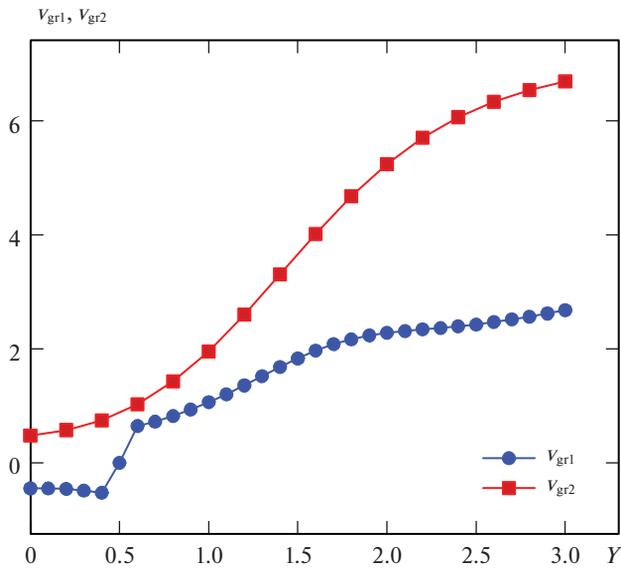


Рис. 4.

Структура решения имеет вид

$$\vec{v} = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{1}{2} [\vec{u}(0) + i\vec{u}(0) \times \vec{e}_y] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_1} \\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{2} [\vec{u}(0) - i\vec{u}(0) \times \vec{e}_y] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_2}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

но амплитуды волн и волновые числа волн разные, т.к. корни характеристического уравнения совершенно другие, а именно $\mu_j = \hat{\delta}_{1,2}^{-1} + i\hat{k}_{1,2}$, причем выбраны такие ветви корня, для которых $\text{Re } \mu_j \leq 0$; $j = 1, 2$. Полученное решение представляет суперпозицию двух волн с волновыми числами k_j ($j = 1, 2$) и частотой ω , распространяющихся вдоль оси Oy навстречу друг другу и экспоненциально затухающих на расстояниях порядка δ_j соответственно. Решение (4.2) равномерно пригодно для всей области, как в нерезонансном, так и в резонансном случае ($2\Omega = \omega$). Действительно, при $\Omega = \omega$

$$k_1 = \frac{4\Omega}{\sqrt{2\nu}}(\alpha^2 + 16\Omega^2)^{-1/4}, \quad \delta_1 = \frac{4\Omega}{k_1}(2\alpha^2 + 16\Omega^2)^{-1/2}, \quad k_2 = 0, \quad \delta_2 = \sqrt{\nu/\alpha}, \quad (4.3)$$

т.е. в резонансном случае волна, набегающая на пластину, отсутствует, однако решение продолжает затухать вглубь жидкости. При $\alpha = 0$ однако, $\delta_2 \rightarrow \infty$, и решение становится непригодным при $y \rightarrow \infty$, т.к. толщина одного из пограничных слоев неограниченно возрастает. Этот эффект отсутствия колебательного решения при $\omega = 2\Omega$ обсуждается в работе [2]. Важным заключением из приведенного анализа является тот факт, что затухание снимает трудности, отмеченные в [2]. В этом смысле оно играет аналогичную роль, что и отсос жидкости с поверхности пористой пластины, рассмотренный в [3]. Найдем связь между волновыми числами нашей задачи и волновыми числами задачи о колебаниях стенки в вязкой несжимаемой жидкости. Обозначим волновые числа этой задачи $\tilde{k}_{1,2}$, $\tilde{\delta}_{1,2}$. Выполняя простые, но громоздкие вычисления, получаем

$$k_{1,2} = \left\{ \frac{\alpha}{\tilde{\delta}_{1,2}} - \omega\tilde{k}_{1,2} \right\} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}}, \quad \frac{1}{\delta_{1,2}} = \left\{ \frac{\omega}{\tilde{\delta}_{1,2}} - \alpha\tilde{k}_{1,2} \right\} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}}$$

Сравним волновые числа для случая резонанса $\omega = 2\Omega$ ($Y = S$) $\tilde{k}_{1,2} = 0$, $\tilde{\delta}_{1,2} = \sqrt{\nu/\alpha}$.

Получаем $k_2 = \frac{\alpha}{\tilde{\delta}_{1,2}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\nu}} \frac{S}{\sqrt{1 + S^2}}$, $\delta_2 = \frac{\sqrt{\nu}}{\alpha} \sqrt{1 + S^2}$, т.е. в электропроводной жидкости в магнитном поле существует набегающая на стенку волна. Толщина пограничного слоя увеличилась в $\sqrt{1 + S^2}$ раз. Также различны волновые числа k_1 и \hat{k}_1 .

Сопоставляя результаты, видим, как магнитное поле меняет профиль скорости, толщину пограничного слоя и касательные напряжения на стенке. Интересно сопоставить результаты, полученные в [5] с результатами данной статьи. Различные краевые условия в задачах обеих работ приводят к различным решениям для поля скоростей. В [5] решение представлено в виде суперпозиции двух волн, одна из которых является отраженной от неподвижной стенки. Эти волны имеют равные волновые числа и толщины пограничных слоев, причем они отличаются от соответствующих величин в данной задаче. Скорости волновых пакетов [5] совпадают в отличие от представленной работы, где скорости волновых пакетов различны и отличны от [5]. И только в резонансном случае $\omega = 2\Omega$ волновые числа [5], которые имеют вид $k = \frac{\sqrt{\alpha/\nu}}{\sqrt{1 + \alpha^2/(4\Omega^2)}}$, $\delta =$

$= \frac{\sqrt{\nu}}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{\alpha^2}}$ совпадают с результатами для набегающей волны k_2 и δ_2 , полученными в представленной статье.

Заключение. Проведен анализ задачи неустановившегося течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации. Найденны

точные решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладыва-ется. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, дей-ствующие из жидкости на стенку. Для случая “нормальных” колебаний пластины рассмотрен случай резонанса и исследована структура пограничных слоев, примы-кающих к стенке. Показано, как магнитное поле меняет характер течения электро-проводной жидкости, изменяя поле скоростей жидкости, величины волновых чисел и пограничных слоев. Кроме того, меняются и касательные напряжения, действо-ющие из жидкости на стенку.

Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравне-ний рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более слож-ных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учёта си-ловых воздействий при движении жидкости в полостях различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движу-щейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.
2. Thornley Cl. On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // *Quan J. Mech. Appl. Math.* 1968. V. 21. № 4. P. 455–462.
3. Гурченков А.А., Яламов Ю.И. Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // *ПМТФ.* 1980. № 4. С. 66–69.
4. Холодова Е.С. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. С.-Петер-бургский государственный университет. С.-Петербург, 2019. 451 с.
5. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 5–6. С. 770–778.
6. Гурченков А.А. Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела. М.: Физ-матлит, 2010. 221 с.
7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразо-вания. М.: Наука, 1971. 288 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.

Nonstationary Flow of Viscous Incompressible Electrically Conductive Fluid on a Rotating Plate

A. A. Gurchenkov^{a,b,#}

^a FRC “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russia

^b MAI (Research University), Moscow, Russia

[#] e-mail: challenge2005@mail.ru

In this work, we study the evolution of the flow of a viscous electrically conductive fluid on a rotating plate in the presence of a magnetic field. An analytical solution of three-dimension- al unsteady equations of magnetohydrodynamics is presented. The velocity field and the in- duced magnetic field in the flow of a viscous electrically conductive liquid filling a half- space bounded by a flat wall are determined. The fluid, together with the bounding plane, rotates as a whole with a constant angular velocity around a direction not perpendicular to the plane. An unsteady flux is induced by suddenly beginning vibrations of the wall and an applied magnetic field directed perpendicular to the plane. A number of special cases of wall motion are considered. On the basis of the results obtained, the individual structures of the boundary layers near the wall are investigated.

Keywords: equations of magnetohydrodynamics, electrically conductive fluid, normal vibrations, boundary layers

REFERENCES

1. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid. M.: Gostekhizdat, 1955, 521 p. (in Russian)
2. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // *Quan J. Mech. Appl. Math.* 1968. V. 21, no. 4, pp. 455–462.
3. *Gurchenkov A.A., Yalamov Yu.I.* Unsteady flow on a porous plate in the presence of injection (suction) of the medium // *PMTE*, 1980, no. 4, pp. 66–69. (in Russian)
4. *Gurchenkov A.A.* Unsteady motion of a viscous fluid between rotating parallel walls // *PMM*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 251–255. (in Russian)
5. *Kholodova E.S.* Thesis for the degree of Doctor of Phys.-Math. Sciences, St. Petersburg, State Univ., St. Petersburg. 2019, 451 p. (in Russian)
6. *Gurchenkov A.A.* Swirling Fluid Dynamics in the Cavity of a Rotating Body. Moscow: Fizmatlit, 2010, 221 p. (in Russian)
7. *Dech G.* Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and z-Transform. Moscow: Nauka, 1971, 288 p. (in Russian)
8. *Korn G., Korn T.* Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers Moscow: Nauka, 1978. 832 s.