

УДК 532.542.2

**ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ ТРУБЫ**© 2021 г. Л. И. Казаков<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>ФГУП НИИАЭ (Автоэлектроники), Севастополь, Россия

\*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.

После доработки 07.07.2021 г.

Принята к публикации 14.07.2021 г.

Изложена приближенная теория стационарного осесимметричного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в начальном участке круглой трубы. Она дает расчетные значения разных физических характеристик устанавливающегося течения, совпадающие в пределах  $\pm 2\%$  с известными ранее расчетными и экспериментальными данными. Вместо традиционного применения для всей длины начального участка уравнения Бернулли, в представленной работе для определения величины давления используется уравнение среднего по сечению трубы осевого градиента давления.

*Ключевые слова:* начальный участок, пограничный слой, ядро течения, закон Гагена–Пуазейля

DOI: 10.31857/S0032823521050052

**1. Введение.** Важная в научном и практическом отношениях проблема установления течения Пуазейля в трубах имеет более чем вековую историю. Первым задачу о движении вязкой жидкости в начальном участке круглой трубы приближенно решил в 1891 году Буссинеск. Ему удалось довольно точно найти (судя по [1], с. 232) длину начального участка  $L = 0.2445a \text{Re}_a$ , где  $a$  – радиус трубы,  $\text{Re}_a$  – число Рейнольдса по радиусу. Затем задачу решали (также приближенно) Л. Шиллер и С.М. Тарг [1–3]. Большое значение имели экспериментальные исследования, прежде всего, самого Пуазейля (и его предшественника Гагена) [4], классические измерения Никурадзе [5], а также многочисленные и весьма тщательные измерения течения по капиллярам разных жидкостей при разных температурах [6]. В наше время, с развитием вычислительной техники пришла возможность выполнять математические эксперименты, т.е. решать задачи численно. В кратком, но емком обзоре исследований по обсуждаемой проблеме [7], отмечено неудовлетворительное состояние вопроса: так, длины начального участка, найденные разными авторами, отличаются в три раза; даже полученные численно длины разнятся более чем на 20%.

В отечественной литературе по гидравлике за 1956–2016 гг. – в монографиях, справочниках, учебниках, справочных и учебных пособиях, конспектах лекций – для длины  $L$  начального участка чаще всего приводят формулу Л. Шиллера, что, вообще говоря, неверно, поскольку она выведена в рамках теории, пригодной лишь для первой четверти начального участка, не дает необходимого асимптотического стремления с расстоянием относительной скорости по оси трубы к 2, что наглядно подтверждает рис. 3, где кривая Шиллера на некотором расстоянии упирается в уровень 2. Это рас-

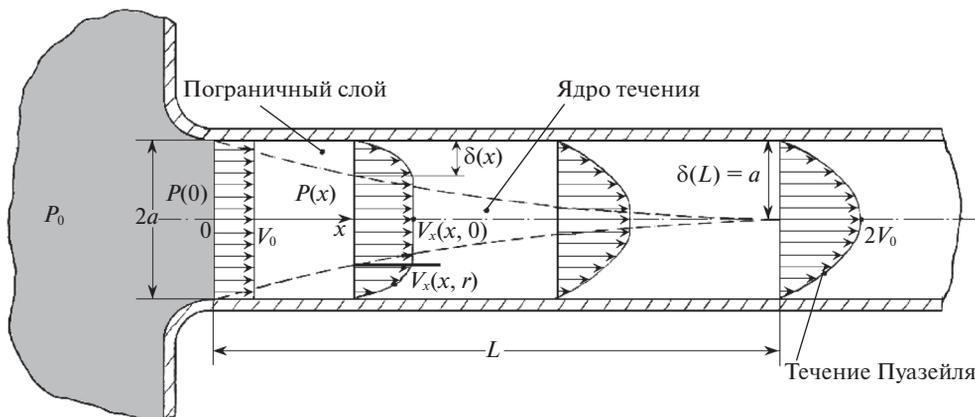


Рис. 1. Схема ламинарного течения вязкой жидкости в начальном участке  $L$  круглой трубы.

стояние и считают, по недоразумению, длиной начального участка. В мировой же литературе чаще ссылаются на Буссинеска, а в последнее время – на новые, более точные численные результаты. Так, в [7] для  $Re_a \gg 1$  найдено:  $L = 0.2268a Re_a$ , что для ньютоновских жидкостей подтверждено в [8]. Близкое значение для  $Re_a > 100$  (0.2248) получено ранее в [9]. Но в работе [10] аналогичный численный результат для  $Re_a > 250$  (0.2181) на 4% меньше.

**2. Нулевое приближение.** Из уравнения Навье–Стокса и уравнения непрерывности при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ,  $V_\varphi = 0$  имеем ([11], с. 76):

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} \right) \quad (2.1)$$

$$V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $V_x$ ,  $V_r$  – осевая и радиальная скорости частиц жидкости в потоке;  $P = P(x, r)$  – давление;  $\rho = \text{const}$  – плотность жидкости;  $\nu = \mu/\rho$  – ее кинематическая вязкость;  $\mu$  – вязкость. На входе в трубу ( $x = 0$ ) скорость потока считаем однородной, т.е.  $V_x(0, r) = V_0 = \text{const}$ . Далее благодаря вязкости жидкости на стенках трубы образуется и развивается пограничный слой, толщина которого  $\delta(x)$  постепенно увеличивается от нуля  $\delta(0) = 0$  до  $\delta(L) = a$ , где  $L$  – длина начального участка, как показано на рис. 1. Центральные части сечений начального участка трубы заполнены внешним (по отношению к пограничному слою) потоком, называемым ядром течения с неизменной в каждом сечении скоростью. При  $x \geq L$  в трубе устанавливается течение Пуазейля с параболическим профилем скоростей [11, с. 82]:

$$V_x(x, r) = 2V_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (2.4)$$

Так обычно (вслед за Л. Прандтлем [5], с. 34) представляют качественную картину течения в начальном участке трубы.

С помощью уравнений (2.1) и (2.3) найдем среднее по площади  $S = \pi a^2$  сечения трубы значение осевой компоненты градиента давления ([3], с. 358, (2.7)):

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{1}{S} \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} dS = -\frac{4\rho}{a^2} \int_0^a r V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dr + \frac{2\mu}{a} \left. \frac{\partial V_x}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) – следствие уравнений движения, полученное без разделения течения на центральную область (ядро) и пограничный слой.

Обозначим через  $V(x)$  скорость в ядре течения на оси трубы:

$$V(x) = V_x(x, 0), \quad 0 \leq x \leq L$$

С учетом (2.4) имеем:

$$V_0 \leq V(x) \leq 2V_0$$

Поэтому вдоль трубы скорость заметно изменяется на расстоянии  $x \sim L$ , т.е.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \approx \frac{V(x)}{L} \approx \frac{V_0}{L} = \text{const} \quad (2.6)$$

В пределах пограничного слоя  $\partial V_x / \partial r \approx V(x) / \delta(x)$ . По опыту  $L$  обычно составляет десятки и более калибров трубы, и всегда можно считать

$$\delta(x) \leq a \ll L$$

Как далее станет ясно (см. (3.28)), второе неравенство эквивалентно требованию  $\text{Re}_a \gg 4$ . Тогда из уравнения непрерывности (2.3) и уравнений (2.1), (2.2), соответственно, следует:

$$V_r \sim \frac{a}{L} V \ll V, \quad \text{или} \quad \frac{V_r}{V_0} \ll 1 \quad (2.7)$$

$$\left| \frac{\partial P / \partial r}{\partial P / \partial x} \right| \sim \frac{\delta}{L} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{dP}{dx}, \quad P = P(x) \quad (2.8)$$

Это дает возможность упростить исходную систему уравнений (2.1)–(2.3):

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial(rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0 \quad (2.10)$$

Согласно (2.7) и (2.8) зависимостью давления от радиальной переменной  $r$  во всех сечениях вдоль трубы следует пренебречь и считать

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{dP}{dx} \quad (2.11)$$

Для пограничного слоя удобно вместо  $r$  ввести поперечную координату  $y = a - r$ . В качестве нулевого приближения представим осевую скорость  $V_x(x, r)$  в виде

$$V_x(x, y) = V(x) f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (2.12)$$

где профили скоростей во всех сечениях пограничного слоя определяет задаваемая подходящим образом функция  $f(\eta)$ , а функции  $V(x)$  и  $\delta(x)$  предстоит найти. Для слоя конечной толщины функция  $f(\eta)$  должна удовлетворять условиям:

$$f(0) = 0; \quad f(\eta \geq 1) = 1; \quad \lim_{\eta \rightarrow 1-0} \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (2.13)$$

Эти условия вытекают из физической сути пограничного слоя.

Подставив (2.12) в (2.5), используя соотношения

$$\begin{aligned} r &= a - y, \quad dr = -dy, \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial y} \\ dy &= \delta d\eta, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\delta'}{\delta} \eta \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Vf) = \frac{v}{\delta^2} \left( \lambda f - \zeta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right), \quad (2.15)$$

где

$$\lambda = \frac{V' \delta^2}{v} \quad (2.16)$$

$$\zeta = \frac{V \delta \delta'}{v} \quad (2.17)$$

и, учитывая (2.11), найдем:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{4\mu V}{a\delta} \left\{ \left( \lambda + \frac{\zeta}{2} \right) \int_0^{a/\delta} f^2 d\eta - \frac{\delta}{a} (\lambda + \zeta) \int_0^{a/\delta} \eta f^2 d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right\} \quad (2.18)$$

Параметры  $\lambda$  и  $\zeta$  безразмерны. Штрих означает производную по  $x$ . Для любого профиля справедливо:

$$\int_0^{a/\delta} f^2(\eta) d\eta = \frac{a}{\delta} - \alpha, \quad \int_0^{a/\delta} \eta f^2 d\eta = \frac{a^2}{2\delta^2} - \beta, \quad (2.19)$$

где  $\alpha < 1$  и  $\beta < 1$  – константы, зависящие от профиля  $f(\eta)$ . С учетом (2.19) выражение (2.18) можно представить в виде:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho V V' - \frac{6\mu V}{a^2} R(x), \quad (2.20)$$

где

$$R(x) = \frac{1}{3} \left\{ \lambda \left( \frac{a^2}{2\delta^2} - 2\alpha \frac{a}{\delta} + 2\beta \right) - \zeta \left( \alpha \frac{a}{\delta} - 2\beta \right) + \frac{a}{\delta} f'(0) \right\} \quad (2.21)$$

В самом начале трубы пограничный слой на стенке весьма тонок, его влияние на течение пренебрежимо мало, и жидкость почти по всему сечению можно считать идеальной. Тогда из уравнения Бернулли ([11], с. 25, 37)  $P + \rho V^2/2 = \text{const}$  следует, что

$$\frac{dP}{dx} \Big|_{x=0} = -\rho V V' \quad (2.22)$$

Л. Шиллер ([2], с. 58) предполагал, что "...падение давления в начальном участке происходит по уравнению Бернулли...", т.е. считал для всего начального участка  $0 < x < L$  справедливым уравнение (2.22), а не (2.20). По этой причине его "... теория

очень хорошо передает распределение скоростей...» ([2], с. 62), ([5], с. 35)) лишь в первой четверти начального участка и дает заниженное вдвое значение его длины  $L$  (см. рис. 3).

Согласно (2.20) и (2.22) должно выполняться условие  $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = 0$ . За пределами начального участка трубы, где уже установилось течение Пуазейля,  $\delta = a$ ,  $\delta' = 0$ ,  $V_r = 0$ ,  $V = 2V_0$ ,  $V' = 0$  и, следовательно, по (2.16) и (2.17)  $\lambda = \zeta = 0$ . Согласно (2.1), (2.4), (2.20), (2.21) здесь:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{8\mu V_0}{a^2} = -\frac{4\mu V_0 f'(0)}{a^2} \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что функция  $f(\eta)$  должна удовлетворять также условию

$$f'(0) = 2, \quad \text{т.е.} \quad f(\eta) \approx 2\eta; \quad \eta \ll 1 \quad (2.24)$$

Условиям (2.13), (2.24) удовлетворяет параболический профиль ([5], с. 34), ([2], с. 58))

$$f(\eta) = \begin{cases} 2\eta - \eta^2, & \eta \leq 1 \\ 1, & \eta \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

который примем за основу. Тогда из уравнения постоянства расхода  $Q$  жидкости

$$Q = \pi a^2 V_0 = 2\pi \int_{a-\delta(x)}^a V_x(x, r) r dr + \pi(a - \delta(x))^2 V(x),$$

подставив в него (2.12) и используя (2.14), найдем в нулевом приближении осевую скорость в ядре течения:

$$V(x) = V_0(\varepsilon) = \frac{V_0}{1 - \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2}, \quad (2.26)$$

где

$$\varepsilon(x) = \delta(x)/a \quad (2.27)$$

относительная толщина пограничного слоя. Теперь на основании (2.12), (2.14), (2.25)–(2.27) осевая скорость по сечению трубы в нулевом приближении примет вид:

$$V_x(x, r) = \begin{cases} V_0(\varepsilon)(2\eta - \eta^2), & \eta \leq 1 \\ V_0(\varepsilon), & 1 \leq \eta \leq \frac{1}{\varepsilon(x)} \end{cases} \quad (2.28)$$

где

$$\eta(x, r) = \frac{1}{\varepsilon(x)} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (2.29)$$

При  $x > L$  будет  $\varepsilon(x) = 1$  и (2.28) переходит в течение Пуазейля (2.4). Из (2.28) видно, что в нулевом приближении осевая скорость течения от параметров  $\lambda$  (2.16) и  $\zeta$  (2.17) не зависит. Можно установить, что эти параметры связаны соотношением:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{V} \frac{dV}{d\varepsilon} \zeta \quad (2.30)$$

Из (2.17) также найдем выражение для обратной  $\varepsilon(x)$  функции:

$$\frac{vx(\varepsilon)}{a^2 V_0} = \int_0^\varepsilon \frac{\varepsilon V(\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) V_0} d\varepsilon \quad (2.31)$$

В нулевом приближении легко найти радиальные скорости течения. Из (2.10) и (2.14) следует:

$$\left(1 - \frac{y}{a}\right) V_r(x, y) = \int_0^y \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial x} dy \quad (2.32)$$

Используя (2.15), (2.16), (2.25), найдем:

$$\frac{\partial V_x(x, r)}{\partial x} = \begin{cases} V' \left[ 2\eta \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right) - \eta^2 \left(1 - \frac{2\zeta}{\lambda}\right) \right], & \eta \leq 1 \\ V', & \eta \geq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Подставив это в (2.32) с учетом (2.12), получим:

$$V_r(x, r) = \begin{cases} \frac{\varepsilon a^2 V'}{r} \left[ \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right) \left(\eta^2 - \frac{2\varepsilon}{3} \eta^3\right) - \left(1 - \frac{2\zeta}{\lambda}\right) \left(\frac{\eta^3}{3} - \frac{\varepsilon \eta^4}{4}\right) \right], & \eta \leq 1 \\ -\frac{V'}{2} r, & \eta \geq 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

**3. Первое приближение.** Подставив (2.20) в уравнение (2.9), представим уравнения (2.9) и (2.10) соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rV_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_r V_x)}{\partial r} - rV V' - \frac{6\nu V}{a^2} rR(x) &= \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial(rV_x V)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_r V)}{\partial r} - rV_x V' &= 0 \end{aligned}$$

Вычтем первое уравнение из второго и, проинтегрировав обе части полученного уравнения по  $y$  от  $y = 0$  до  $y$  с учетом (2.14), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{V} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V_x}{V} \right) - \frac{\tau}{\rho V^2} &= -\frac{V'}{V} [2\delta^{**}(y) + \delta^*(y)] - \int_0^y \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{V_x}{V} \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \right] dy + \\ &+ \frac{1}{V} \left(1 - \frac{y}{a}\right) V_r(y) \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) - \frac{6\nu}{a^2 V} R(x) \left(y - \frac{y^2}{2a}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где обозначено:

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.2)$$

– напряжение трения на стенке трубы,

$$\delta^*(y) = \int_0^y \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \quad (3.3)$$

$$\delta^{**}(y) = \int_0^y \frac{V_x}{V} \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \quad (3.4)$$

При  $y \rightarrow a$  должно быть:  $V_x \rightarrow V$ ,  $\delta^*(y) \rightarrow \delta^*$ ,  $\delta^{**}(y) \rightarrow \delta^{**}$ , где  $\delta^* = \delta^*(a)$  – “толщина вытеснения”,  $\delta^{**} = \delta^{**}(a)$  – “толщина потери импульса” ([12], с. 59, 60). Тогда (3.1) перейдет в “уравнение импульсов” ([12], с. 89)

$$\int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{V_x}{V} \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \right] dy + \frac{V'}{V} [2\delta^{**} + \delta^*] = \frac{\tau}{\rho V^2} - \frac{3\nu}{aV} R(x) \quad (3.5)$$

При  $x \rightarrow \infty$  согласно (2.21) имеем:  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ,  $V' = 0$ ,  $\lambda = \zeta = 0$ ,  $R(\infty) = \frac{a}{3\delta} \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$ . Тогда

из (3.5) следует:  $\tau = \frac{3\mu V}{a} R(\infty) = \frac{\mu V}{\delta} \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$  ч.т.д.

Исключим из уравнения (3.1) величины  $\tau$  и  $V_r(y)$  с помощью соотношений (3.5) и (2.32) и учтем (3.3), (3.4). Проинтегрировав обе части полученного уравнения по  $y$ , найдем:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{V_x(x, y)}{V(x)} &= -\frac{1}{a} \int_0^y \frac{V_x}{V} dy + \\ &+ \frac{V'}{v} \left\{ 2 \int_0^y \int_0^a \frac{V_x}{V} \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy dy + \int_0^y \int_0^a \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy dy \right\} + \\ &+ \frac{V}{v} \int_0^y \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{V_x}{V} \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \right] dy dy + \\ &+ \frac{1}{v} \int_0^y \left\{ \left(1 - \frac{V_x}{V}\right) \int_0^y \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{dV_x}{dx} dy \right\} dy + R(x) \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первое приближение к искомому профилю скорости  $V_x(x, y)$  получим, подставив в правую часть (3.6) функцию нулевого приближения (2.12) и перейдя к переменным (2.29), (2.27)  $\eta$  и  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \frac{V_x(x, y)}{V(x)} &= (2\lambda + \zeta) \int_0^\eta \int_\eta^{\varepsilon^{-1}} (1 - f^2) (1 - \varepsilon\eta) d\eta d\eta + \\ &+ (\lambda + \zeta) \int_0^\eta \left\{ \left(1 - f\right) \int_0^\eta f (1 - \varepsilon\eta) d\eta - \int_\eta^{\varepsilon^{-1}} (1 - f) (1 - \varepsilon\eta) d\eta \right\} d\eta - \\ &- \varepsilon \int_0^\eta \left\{ f + \zeta \int_\eta^{1/\varepsilon} \eta f (1 - f) d\eta + (1 - f) \zeta \int_0^\eta \eta f d\eta \right\} d\eta + R(\varepsilon) \left(1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Последнее слагаемое здесь имеет “кубический” профиль  $\left(1 - r^3/a^3\right)$ , который по мере роста этого слагаемого с ростом  $x$  будет несколько “скруглять” края плоской части ядра течения, придавая пограничному слою асимптотические черты так, что для первого приближения в отличие от (2.13)

$$\lim_{\eta \rightarrow 1-0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_x}{V} \right) \neq 0$$

Поэтому только на оси трубы ( $r = 0$ ,  $y = a$ ) будет верным условие

$$\frac{V(x, 0)}{V(x)} = 1,$$

как и в случае асимптотического пограничного слоя, например, при начальном профиле Блазиуса для пластины ([12], с. 29).

Подставив в (3.7) исходный параболический профиль (2.25), вычислив для него по формулам (2.19) входящие в  $R(x)$  (2.21) постоянные

$$\alpha = \frac{7}{15}, \quad \beta = \frac{2}{15} \quad (3.8)$$

и по результатам интегрирования, найдем первое приближение для функции  $V_x(x, r)$  в переменных

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon(x)} \left(1 - \frac{r}{a}\right); \quad \varepsilon(x) = \frac{\delta(x)}{a} \quad (3.9)$$

$$\frac{V_x(x, r) r}{V_0 a} = Z(\varepsilon) \left[ F(\varepsilon, \eta) + R(\varepsilon) \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right) \right], \quad (3.10)$$

где

$$Z(\varepsilon) = \frac{V(\varepsilon)}{V_0} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \eta) = & \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left[ -\eta + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon} \left\{ \frac{3}{15} - \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^4}{15} + \frac{\eta^5}{90} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon \left( \frac{11}{60} - \frac{\eta^2}{6} + \frac{2}{15} \eta^4 - \frac{13}{180} \eta^5 + \frac{1}{84} \eta^6 \right) \right\} + \frac{\zeta(\varepsilon)}{\varepsilon} \left\{ \frac{2}{15} - \frac{\eta^3}{6} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{15} \eta^4 - \frac{1}{45} \eta^5 - \varepsilon \left( \frac{1}{10} - \frac{2}{15} \eta^4 + \frac{11}{90} \eta^5 - \frac{1}{42} \eta^6 \right) \right\} \right] \\ & 0 \leq \eta \leq 1, \quad \varepsilon \geq 1 - \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\frac{V_x(x, r) r}{V_0 a} = Z(\varepsilon) \left[ \frac{r}{a} - 1 + \varepsilon + F(\varepsilon, 1) + R(\varepsilon) \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right) \right]; \quad 1 \leq \eta \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \leq 1 - \frac{r}{a} \quad (3.13)$$

При  $r = 0$  ( $\eta = \varepsilon^{-1} \geq 1$ ) из (3.13) и (3.12) следует:

$$R(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - F(\varepsilon, 1) = 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \lambda(\varepsilon) \left( \frac{19}{90} - \frac{113}{1260} \varepsilon \right) - \zeta(\varepsilon) \left( \frac{7}{90} - \frac{41}{630} \varepsilon \right) \quad (3.14)$$

Выразив в (3.13)  $F(\varepsilon, 1)$  через  $R(\varepsilon)$  из (3.14), получим:

$$\frac{V_x(x, r)}{V_0} = Z(\varepsilon) \left[ 1 - R(\varepsilon) \frac{r^2}{a^2} \right]; \quad \varepsilon \leq 1 - \frac{r}{a} \quad (3.15)$$

Приравняв (3.14) и (2.21) с учетом (2.24), (3.8), найдем соотношение между параметрами  $\lambda(\varepsilon)$  и  $\zeta(\varepsilon)$ , соответствующее первому приближению:

$$\lambda \left( 1 - \frac{28}{15} \varepsilon + \frac{9}{5} \varepsilon^2 - \frac{113}{210} \varepsilon^3 \right) - \zeta \left( \frac{14}{15} \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{41}{105} \varepsilon^3 \right) = -4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 \quad (3.16)$$

Используя выражения (3.10)–(3.14), (3.9), (2.14), запишем уравнение постоянства расхода жидкости для первого приближения осевой скорости:

$$Q = \pi a^2 V_0 = 2\pi a^2 V(\varepsilon) \left\{ \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^2 + \left( \varepsilon - \frac{1}{4} \right) R(\varepsilon) + \varepsilon \int_0^1 F(\varepsilon, \eta) d\eta \right\}$$

Вычисляя по (3.12)

$$\int_0^1 F(\varepsilon, \eta) d\eta = -\frac{\varepsilon}{4} + \lambda \left( \frac{11}{70} - \frac{71}{1120} \varepsilon \right) + \zeta \left( \frac{11}{210} - \frac{71}{1680} \varepsilon \right)$$

и учитывая (3.14), получим:

$$V(\varepsilon) = \frac{2V_0}{1 + \frac{\varepsilon}{3}(1 - \varepsilon) + \lambda \left( \frac{19}{90} - \frac{11}{36} \varepsilon + \frac{53}{504} \varepsilon^2 \right) + \zeta \left( \frac{7}{90} - \frac{1}{6} \varepsilon + \frac{23}{252} \varepsilon^2 \right)} \quad (3.17)$$

Найденные соотношения первого приближения (3.16), (3.17) и точное выражение (2.30) составляют систему уравнений для определения неизвестных функций  $V(\varepsilon)$  (или  $Z(\varepsilon)$  (3.11)),  $\lambda(\varepsilon)$ ,  $\zeta(\varepsilon)$ . Исключив из нее  $\lambda$  и  $\zeta$ , для  $Z(\varepsilon)$  получим дифференциальное уравнение

$$Z'(\varepsilon) = -\frac{Z a_{22} b_1 - a_{12} \left( \frac{2}{Z} - 1 - \frac{\varepsilon}{3}(1 - \varepsilon) \right)}{\varepsilon a_{21} b_1 - a_{11} \left( \frac{2}{Z} - 1 - \frac{\varepsilon}{3}(1 - \varepsilon) \right)}, \quad (3.18)$$

где  $b_1(\varepsilon)$ ,  $a_{ik}(\varepsilon)$  – известные полиномы. Уравнение (3.18) – уравнение Абеля второго рода ([13], с. 48, п. 4.11(б)). Его приближенное решение найдем сначала, для граничных условий  $Z(0) = 1$ ,  $Z(1) = 2$ , а затем вычисляя по (3.18) наклоны интегральной кривой  $Z(\varepsilon)$  в начальной и конечной точках и применяя метод последовательных приближений [13, с. 23], найдем:

$$Z(\varepsilon) = 1 + \frac{28}{45} \varepsilon + \frac{64}{195} \varepsilon^2 + \frac{71}{585} \varepsilon^3 - \frac{14}{195} \varepsilon^4 \quad (3.19)$$

$$Z'(\varepsilon) = \frac{28}{45} + \frac{128}{195} \varepsilon + \frac{71}{195} \varepsilon^2 - \frac{56}{195} \varepsilon^3 \quad (3.20)$$

Приближенное решение (3.19) уравнения (3.18) хорошо удовлетворяет последнему: значения  $Z'(\varepsilon)/Z(\varepsilon)$ , вычисленные по (3.19), (3.20), а также при подстановке функции (3.19) в правую часть уравнения (3.18), разнятся менее чем на 0.27%.

Зная  $Z(\varepsilon)$  и  $Z'(\varepsilon)$ , найдем параметры  $\lambda(\varepsilon)$  и  $\zeta(\varepsilon)$ :

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{90\varepsilon}{7S(\varepsilon)} \left( 1 - \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) Z'(\varepsilon) \quad (3.21)$$

$$\zeta(\varepsilon) = \frac{90}{7S(\varepsilon)} \left( 1 - \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) Z(\varepsilon), \quad (3.22)$$

где

$$S(\varepsilon) = 1 + \frac{251}{910} \varepsilon - \frac{1886}{3185} \varepsilon^2 + \frac{10}{21} \varepsilon^3 - \frac{9198}{3185} \varepsilon^4 + \frac{20443}{7644} \varepsilon^5 - \frac{267}{455} \varepsilon^6 \quad (3.23)$$

Отсюда при  $\varepsilon \ll 1$  следует:

$$\lambda(\varepsilon) \approx 8\varepsilon, \quad \zeta(\varepsilon) \approx \frac{90}{7}; \quad \lambda(1) = \zeta(1) = 0 \quad (3.24)$$

Подставив полученные разложения в (2.31), после интегрирования найдем:

$$\frac{vx(\varepsilon)}{a^2 V_0} = \frac{x(\varepsilon)}{a \operatorname{Re}_a} = \frac{1}{100} \left\{ \frac{24301}{351} \varepsilon + \frac{4633}{234} \varepsilon^2 + \frac{727}{81} \varepsilon^3 + \frac{1007}{252} \varepsilon^4 + \frac{2687}{945} \varepsilon^5 - \frac{178}{117} \varepsilon^6 + \frac{52528}{351} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{151}{27} \ln(1 - \varepsilon) \right\}, \quad (3.25)$$

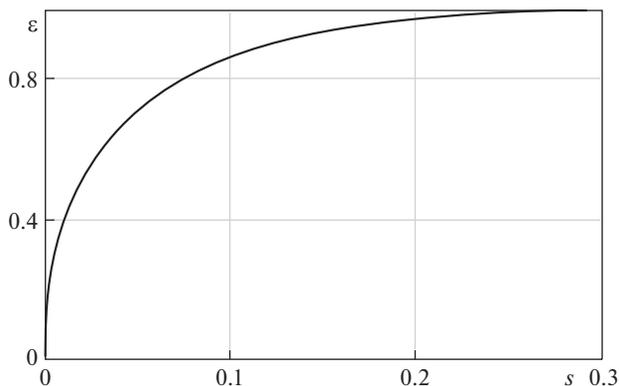


Рис. 2. Относительная толщина  $\varepsilon(s)$  пограничного слоя в начальном участке трубы,  $s = x/(a \text{Re}_a)$ .

где

$$\text{Re}_a = \frac{V_0 a}{\nu} \quad (3.26)$$

– число Рейнольдса.

В (3.25) разложение правой части начинается с квадратичного члена, как это и должно быть в силу того, что при  $\varepsilon \ll 1$

$$\frac{\nu x(\varepsilon)}{a^2 V_0} \approx \frac{7}{90} \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{7\varepsilon^2}{180} = \frac{7}{180} \frac{\delta^2}{a^2}$$

Отсюда для самого начала трубы имеем:

$$\delta(x) = 5.071 \sqrt{\frac{\nu x}{V_0}}, \quad (3.27)$$

что совпадает с оценкой толщины пограничного слоя на пластине в задаче Блазиуса ([12], с. 32). При  $x \rightarrow \infty$  из (3.25) следует:

$$\delta(x) \approx a \left[ 1 - \exp \left( -0.08 - \frac{17.88 x}{\text{Re}_a a} \right) \right]$$

Графическое представление относительной толщины пограничного слоя вдоль начального участка (пунктир на рис. 1) дает рис. 2, где показана зависимость  $\varepsilon(s)$ ,  $s = x/(a \text{Re}_a)$ , соответствующая уравнению (3.25).

Длину  $L$  начального участка трубы, следуя Прандтлю ([1], с. 225), определим условием  $V(L) = 0.99 \cdot 2V_0$ . Согласно (3.19) этому соответствует значение  $\varepsilon(L) = 0.9852$ . Тогда по (3.25) найдем:

$$L = 0.2305a \text{Re}_a \quad (3.28)$$

Эта величина меньше, чем дает формула Буссинеска  $L = 0.26a \text{Re}_a$  ([5], с. 36), ([14], с. 164)), заметно больше расчетных значений Л. Шиллера ( $L = 0.115a \text{Re}_a$ , ([2], с. 60)) и С.М. Тарга ( $L = 0.16a \text{Re}_a$ , ([1], с. 248)) и почти совпадает с численным результатом работы [7]  $L = 0.2268a \text{Re}_a$ .

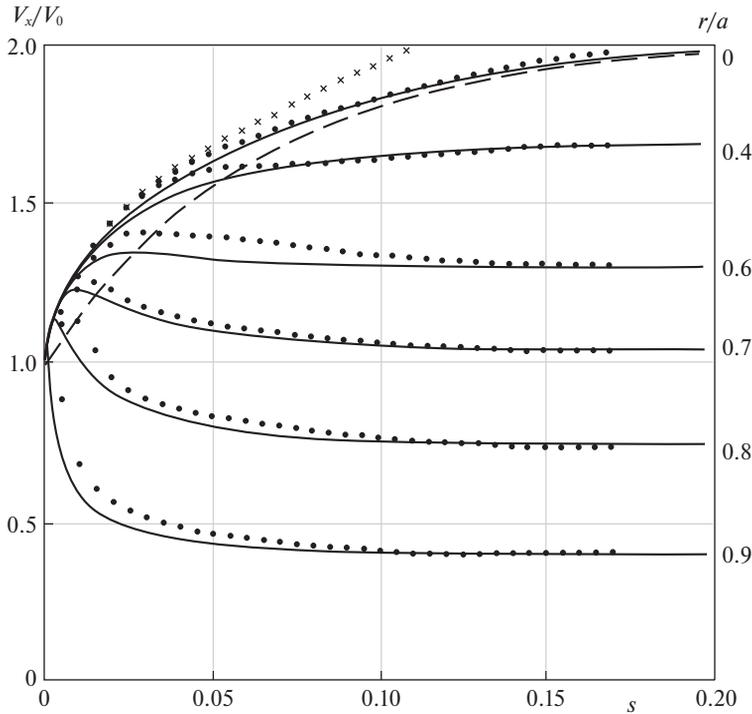


Рис. 3. Зависимость осевых скоростей  $V_x(x, r)/V_0$  на начальном участке круглой трубы при ламинарном течении вязкой жидкости от  $s = x/(a Re_a)$ :  $\cdot \cdot \cdot \cdot$  — экспериментальные кривые Никурадзе;  $-\ -$  — теория Буссинеска;  $\times \times \times \times$  — теория Шиллера;  $\text{—}$  — расчет по формулам (3.10), (3.15) с учетом (3.14), (3.19)–(3.23).

Теперь, зная  $V(\epsilon)$ ,  $\lambda(\epsilon)$  и  $\zeta(\epsilon)$ , можем вычислить по формулам первого приближения (3.9)–(3.15) осевую скорость жидкости в сечениях трубы. При этом найдем, что, поскольку при  $x > L \epsilon \rightarrow 1$ ,  $\lambda(\epsilon) \rightarrow 0$ ,  $\zeta(\epsilon) \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 1 - \frac{r}{a}$ ,  $V(\epsilon) \rightarrow 2V_0$ , то

$$V_x(\infty, r) = \frac{2V_0}{r/a} \left[ -\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{r}{3a}\right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right) \right] = 2V_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

т.е. на больших расстояниях  $x > L$  течение переходит в течение Пуазейля.

Далее вычислим распределение удельного трения жидкости о стенки начального участка трубы. Согласно (3.2), (2.14), (3.9)–(3.12), (3.14)

$$\tau = \frac{\mu V(\epsilon)}{a\epsilon} \left\{ 3\epsilon - \epsilon^2 + \lambda(\epsilon) \left( \frac{3}{5} - \frac{49}{60}\epsilon + \frac{113}{420}\epsilon^2 \right) + \zeta(\epsilon) \left( \frac{2}{15} - \frac{1}{3}\epsilon + \frac{41}{210}\epsilon^2 \right) \right\}$$

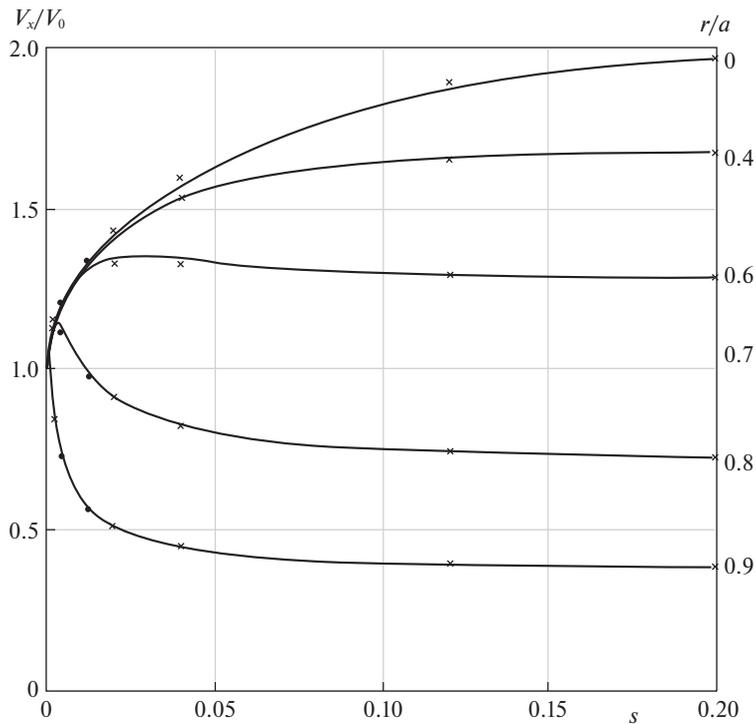
При  $\epsilon \ll 1$ , учитывая (3.24) и (3.27), получим:

$$\tau = \frac{12 \mu V_0}{7 \delta(x)} = 0.3381 \sqrt{\frac{\rho \mu V_0^3}{x}},$$

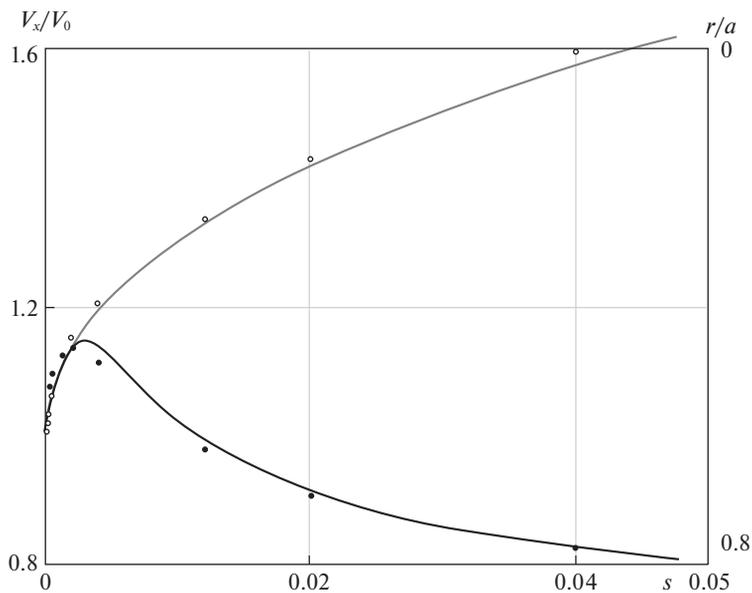
что лишь на 1.8% превышает результат Блазиуса для пластины ([12], с. 29). При  $\epsilon \rightarrow 1$

$$\tau = \frac{4\mu V_0}{a},$$

как и должно быть для течения Пуазейля.



**Рис. 4.** Сравнение приближенных кривых  $V_x(x, r)/V_0$  с численными расчетами: — расчет по формулам (3.10), (3.15); • — данные работы [10]; × — данные работы [14].



**Рис. 5.** Сравнение приближенных кривых  $V_x(x, r)/V_0$  с точными данными работы [10] при малых аргументах  $s$  для  $r/a = 0$  (○) и  $r/a = 0.8$  (●).

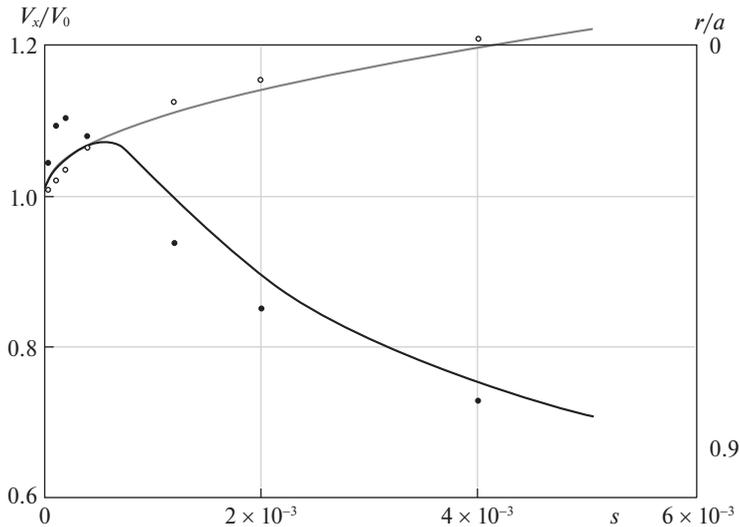


Рис. 6. Сравнение приближенных кривых  $V_x(x, r)/V_0$  с точными данными работы [10] при малых аргументах  $s$  для  $r/a = 0$  (○) и  $r/a = 0.9$  (●).

Рисунок 3 демонстрирует степень соответствия расчета по первому приближению (3.10), (3.15) относительных осевых скоростей  $V_x(x, r)/V_0$  результатам измерений ([5], с. 36, рис. 13). Совпадение расчета с экспериментом в начале трубы не очень хорошее, что, видимо, обусловлено наличием “закругления” на входе в трубу, обеспечивающего ламинарность течения, но не учитываемого всеми известными теориями, однако, в дальнейшем расчетные и экспериментальные кривые асимптотически сливаются. Показаны также теоретические кривые Буссинеска и Шиллера установления с расстоянием скорости жидкости на оси трубы.

На рис. 4 приведено сравнение рассчитанных по (3.10), (3.15) кривых  $V_x(x, r)/V_0$  с результатами численных расчетов, взятыми из работ [10, 14]. Почти все расчетные точки этих работ точно ложатся на соответствующие приближенные кривые. На рис. 5, 6 показано сравнение  $V_x(x, r)/V_0$  с численными данными работы [10] для малых значений аргумента  $s$ .

**Заключение.** Развита теория установления течения Гагена–Пуазейля в начальном участке круглой трубы. Найденная длина начального участка  $L = 0.2305aRe_d$  [15] близка к современному значению, полученному численным методом [7]. Теория хорошо объясняет известные экспериментальные результаты И. Никурадзе [5] и подтверждается численными данными работ [10, 14].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
2. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 230 с.
3. Слѣзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
4. Воларович М.П. Работы Пуазейля о течении жидкости в трубах // Изв. АН СССР. Серия физ. 1947. Т. 11. № 1.
5. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. 2 М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 283 с.
6. Schiller L. und Kirsten H. Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken // Physikalische Zeitschrift. 1921. V. 22. S. 523–528.
7. Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A. The development lengths of laminar pipe and channel flows // J. Fluid. Eng. 2005. V. 127. № 6. P. 1154–1160.

8. *Poole R.J., Ridley B.S.* Development – length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids // *J. Fluid. Eng.* 2007. V. 129. P. 1281–1287.
9. *Mehrotra A.K., Patience G.S.* Unified entry length for Newtonian and power – law fluids in laminar pipe flow // *Can. J. Chem. Eng.* 1990. V. 68. P. 529–533.
10. *Shimomukay K., Kanda H.* Numerical study of normal pressure distribution in entrance pipe flow // *Electr. Trans. Numer. Anal.* 2008. V. 30. P. 10–25.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: ГИФМЛ, 1962. 479 с.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. *Hornbeck R.W.* Laminar flow in the entrance region of a pipe // *Appl. Sci. Res. A.* 1964. V. 13. P. 224–236.
15. *Казakov Л.И.* Развитие течения Пуазейля в круглой трубе. Севастополь: 2019. 32 с. – Деп. в ВИНТИ 07.10.2019 № 80-B2019.

### Laminar Flow of a Viscous Liquid in the Entrance Region of a Circular Pipe

L.I. Kazakov<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup> *Research Institute of Autoelectronics, Sevastopol, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

An approximate theory of stationary axisymmetric laminar flow of a viscous incompressible fluid in the entrance region of a circular pipe is presented. It gives correct (within  $\pm 2\%$ ) calculated values of different physical characteristics of the established flow, which coincide with the known calculated and experimental data. The success of the theory is largely due to the use of an exact equation for the average axial pressure gradient over the pipe section, instead of the usual application for the entire length of the entrance region of the Bernoulli equation.

*Keywords:* entrance region, boundary layer, flow core, Hagen–Poiseuille law

### REFERENCES

1. *Targ S.M.* Basic Problems of the Theory of Laminar Flows. Moscow; Leningrad: GITTL, 1951. 420 p. (in Russian)
2. *Shiller L.* Movement of Liquid in Pipes. Moscow; Leningrad: ONTI, 1936. 230 p. (in Russian)
3. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Liquid. Moscow: GITTL, 1955. 519 p. (in Russian)
4. *Volarovich M.P.* Poiseuille's works on the flow of liquid in pipes // *Izv. USSR Acad. Sci. Ser. Phys.*, 1947, vol. 11, no. 1.
5. *Prandtl L., Titiens O.* Hydro- and Aeromechanics. Vol. 2. Moscow; Leningrad: ONTI, 1935. 283 p. (in Russian)
6. *Schiller L., Kirsten H.* Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken (in connection with the discussion of the results of experimental studies V. Zarkow) // *Physikalische Zeitschrift*, 1921, vol. 22, S. 523–528.
7. *Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A.* The development lengths of laminar pipe and channel flows // *J. Fluid. Eng.*, 2005, vol. 127, no. 6, pp. 1154–1160.
8. *Poole R.J., Ridley B.S.* Development – length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids // *J. Fluid. Eng.*, 2007, vol. 129, pp. 1281–1287.
9. *Mehrotra A.K., Patience G.S.* Unified entry length for Newtonian and power–law fluids in laminar pipe flow // *Can. J. Chem. Eng.*, 1990, vol. 68, pp. 529–533.
10. *Shimomukay K., Kanda H.* Numerical study of normal pressure distribution in entrance pipe flow // *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 2008, vol. 30, pp. 10–25.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics: Vol. VI. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
12. *Loitsyansky L.G.* Laminar Boundary Layer. Moscow: GIFML, 1962. 479 p. (in Russian)
13. *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka, 1976. 576 p. (in Russian)
14. *Hornbeck R.W.* Laminar flow in the entrance region of a pipe // *Appl. Sci. Res. A.*, 1964, vol. 13, pp. 224–236.
15. *Kazakov L.I.* Development of the Poiseuille flow in a round tube. Sevastopol, 2019. 32 p. – Dep. in VINITI 07.10.2019 No. 80-B2019.