
УДК 621.9.047;532.528

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯВЛЕНИЯ “СТРУЙНОСТИ” ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ

© 2021 г. Н. М. Миназетдинов^{1,*}

¹*Российский новый университет, Москва, Россия*

**e-mail: nminazetdinov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.

После доработки 19.06.2021 г.

Принята к публикации 14.07.2021 г.

При электрохимической обработке металлов в межэлектродном промежутке в местах с пониженным статическим давлением возникает кавитация. В рамках модели “идеального процесса” электрохимической обработки решена двумерная задача, связанная с определением формы обрабатываемой поверхности с учетом присоединенной кавитации. Применяется условие, позволяющее учесть влияние электрического поля на гидродинамику кавитационного течения идеальной несжимаемой жидкости в межэлектродном промежутке.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, кавитация, идеальная несжимаемая жидкость

DOI: 10.31857/S0032823521050064

1. Введение. Существенное влияние на процесс электрохимической обработки металлов оказывают гидродинамические факторы. Поток раствора электролита в межэлектродном промежутке между границами электрода-инструмента (катода) и обрабатываемой заготовки (анода) должен обеспечивать стабильное протекание электродных реакций, удаление продуктов этих реакций и охлаждение электродов: анода и катода [1–3].

При определенных условиях в результате обтекания потоком электролита острых кромок катода возникают каверны, заполненные парами жидкости и газом, выделяющимся в процессе электрохимической обработки. Электропроводность газовой среды, заполняющей каверну, существенно ниже электропроводности электролита, и как следствие, происходит неравномерное растворение металла на различных участках анода, чем можно объяснить появление струйных неровностей в виде волнистой поверхности, ориентированной в направлении потока электролита [1].

В монографии [4] выполнен обзор различных механизмов образования и способов устранения данного нежелательного явления, которое в научно-технической литературе получило название “струйности”. Там же отмечено, что значительная роль в образовании “струйности” принадлежит явлению присоединенной кавитации [5].

В работах [6, 7], представлены решения двумерных задач, связанных с определением установившейся [8] анодной границы с учетом кавитации в предположение, что течение электролита описывается моделью идеальной несжимаемой жидкости. Для описания кавитационного обтекания острой кромки катода бесконечно длинной каверной была применена схема Кирхгофа [5].

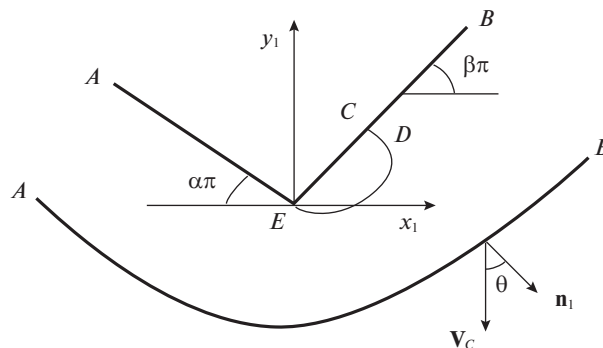


Рис. 1.

В данной работе в рамках математической модели [6], рассматривается двумерная схема электрохимического формообразования с учетом каверны конечной протяженности.

2. Схема электрохимической обработки. Геометрия сечения межэлектродного промежутка представлена на рис. 1. Двугранный угол AEB соответствует границе катода. Введем систему декартовых координат (x_1, y_1) , связанную с катодом. Начало координат выбрано в точке E , точки A и B являются бесконечно удаленными. Углы наклона граней AE и EB к оси абсцисс определяется значениями $\alpha\pi$ и $\beta\pi$ соответственно, причем $0 \leq \alpha < \pi/2$, $0 \leq \beta < \pi/2$. Катод совершает поступательное перемещение в направлении, противоположном оси ординат, с постоянной скоростью V_c . В процессе обработки с течением времени формируется установившаяся анодная граница AB . В установившемся режиме геометрия межэлектродного промежутка не меняется во времени [8].

Граница AEB катода отделена от границы AB анода зазором, в котором осуществляется установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости. Для определенности будем считать, что течение осуществляется в направлении от входа в межэлектродный канал в окрестности точки A к точке B . В точке E происходит отрыв потока с поверхности катода-инструмента с образованием каверны. В модели задачи считается, что граница каверны DE , согласно схеме Рябушинского [5], замыкается на фиктивную пластинку DC , перпендикулярную грани EB катода.

При постановке задачи и ее решении рассматриваются два векторных поля: стационарное электрическое поле и поле скоростей установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости в межэлектродном промежутке, а также их взаимосвязь.

3. Математическая модель процесса электрохимической обработки. Согласно [9] введем аналитическую функцию $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$, где $v(x_1, y_1)$ – функция тока, а $u(x_1, y_1)$ – потенциал электрического поля. Величина $u(x_1, y_1)$ принимает постоянные значения на границах электродов

$$u|_{AB} = u_a, \quad u|_{AE} = u|_{BC} = u_c \quad (3.1)$$

В модели каверна считается диэлектриком [6], и ее граница CDE является участком линии тока, и на ее поверхности существует точка M раздвоения этой линии. Для определенности рассмотрим случай, когда точка M расположена между точками D и E . Будем считать, что

$$v(x_1, y_1)|_{CDE} = 0 \quad (3.2)$$

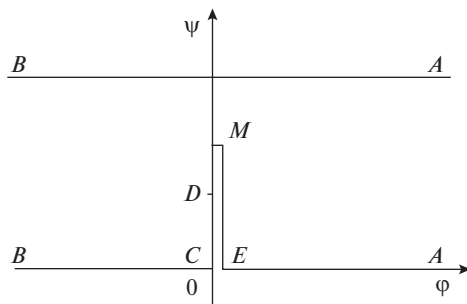


Рис. 2.

Нормальная производная потенциала электрического поля на искомой установившейся анодной границе AB удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0} \left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon} \cos \theta \right), \quad (3.3)$$

где κ – удельная электропроводность среды, ε – электрохимический эквивалент металла, ρ – плотность материала анода, θ – угол между вектором \mathbf{V}_c скорости подачи катода и вектором \mathbf{n}_1 нормали к анодной границе (рис. 1), a_0, a_1 – постоянные величины [10].

Произведем замену переменных по формулам

$$\psi = (u - u_c)/(u_a - u_c), \quad \varphi = v/(u_a - u_c), \quad z = z_1/H = x + iy,$$

где $H = a_0 \kappa (u_a - u_c)/j_0$ – характерная длина, $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$ – характерная плотность тока [11].

Безразмерный комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, согласно формулам (3.1)–(3.3) удовлетворяет граничным условиям

$$\psi|_{AB} = 1, \quad \psi|_{AE} = \psi|_{BC} = 0 \quad (3.4)$$

$$\varphi|_{CDE} = 0 \quad (3.5)$$

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{AB} = \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{AB} = b + \cos \theta, \quad b = -\frac{a_1}{j_0} \quad (3.6)$$

Область изменения безразмерного комплексного потенциала электрического поля представлена на рис. 2.

Из условий (3.4), (3.6) следует, что безразмерные величины межэлектродных зазоров на бесконечности в окрестностях точек A и B равны соответственно

$$h_1 = \frac{1}{b + \cos \alpha \pi}, \quad h_2 = \frac{1}{b + \cos \beta \pi} \quad (3.7)$$

4. Параметрическое представление безразмерного комплексного потенциала электрического поля. Введем параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t ($0 < \xi < \pi/2$, $0 < \delta < \pi|\tau|/4$) ($\tau = i|\tau|$) (рис. 3).

Согласно условиям (3.4) и (3.5) функция $W(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = 0; \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad \varphi(i\delta) = 0; \quad \delta \in [0, c], \quad \psi(i\delta) = 0; \quad \delta \in [c, \pi|\tau|/4] \\ \psi(\pi/2 + i\delta) = 0; \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4], \quad \psi(\xi + \pi\tau/4) = 1; \quad \xi \in (0, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

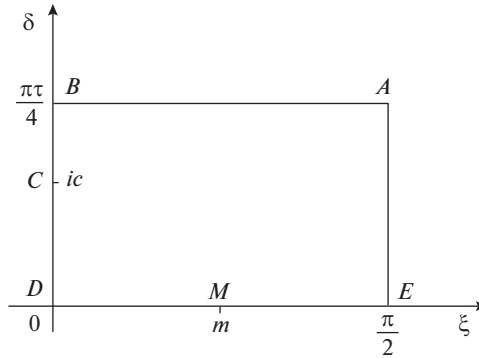


Рис. 3.

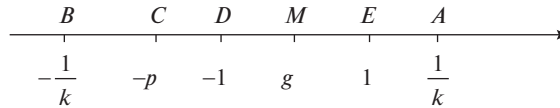


Рис. 4.

Введем вспомогательную комплексную переменную u , область изменения которой – верхняя полуплоскость G_u (рис. 4) и выполним конформное отображение прямоугольника G_t (рис. 3) на полуплоскость G_u с помощью эллиптического синуса [12]

$$u = \operatorname{sn} \left(2K(k) \left(\frac{2t}{\pi} - \frac{1}{2} \right), k \right) = -\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2(2t)}{\vartheta_3(2t)}; \quad k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \right)^2 \tag{4.2}$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi\vartheta_3^2}{2}, \quad g = -\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(2m)}{\vartheta_3(2m)}, \quad p = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(2ci)}{\vartheta_3(2ci)},$$

где $\vartheta_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ – тета-функции для периодов π и $\pi\tau$, $\vartheta_i = \vartheta_i(0)$ [12].

С помощью интеграла Кристоффеля–Шварца [13], найдем производную функции, отображающей область G_u на область изменения комплексного потенциала (рис. 2)

$$\frac{dW}{du} = N \frac{u - g}{(1 - u^2k^2)\sqrt{(u - 1)(u + p)}}; \quad N = \text{const} \tag{4.3}$$

Используя эллиптические функции Якоби [12]

$$\operatorname{cn}(w) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(w/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(w/\vartheta_3^2)}, \quad \operatorname{dn}(w) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(w/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(w/\vartheta_3^2)}$$

и равенство [12]

$$\frac{d}{dw} \operatorname{sn}(w) = \operatorname{cn}(w) \operatorname{dn}(w),$$

из соотношения (4.2) найдем

$$\frac{du}{dt} = \frac{4K(k)}{\pi} \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_2\vartheta_3} \frac{\vartheta_1(2t)\vartheta_4(2t)}{\vartheta_3^2(2t)} \tag{4.4}$$

Подставляя формулы (4.2)–(4.4) в соотношение

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{du} \frac{du}{dt},$$

получим

$$\frac{dW}{dt} = N_1 \frac{\vartheta_1(2t) \vartheta_4(2t)}{\vartheta_3^2 \vartheta_3^2(2t) - \vartheta_2^2 \vartheta_2^2(2t)} \frac{F(t, m)}{\sqrt{F(t, ci) (\vartheta_3 \vartheta_2(2t) + \vartheta_2 \vartheta_3(2t))}}; \quad N_1 = \text{const}$$

$$F(t, a) = \vartheta_3(2a) \vartheta_2(2t) - \vartheta_2(2a) \vartheta_3(2t)$$

Из формулы [12]

$$\vartheta_4(y+z) \vartheta_4(y-z) \vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(y) \vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(y) \vartheta_2^2(z) \quad (4.5)$$

следует

$$\vartheta_3^2 \vartheta_3^2(2t) - \vartheta_2^2 \vartheta_2^2(2t) = \vartheta_4^2(2t) \vartheta_4^2$$

Тогда

$$\frac{dW}{dt} = N_2 \frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)} \frac{F(t, m)}{\sqrt{F(t, ci) (\vartheta_3 \vartheta_2(2t) + \vartheta_2 \vartheta_3(2t))}}; \quad N_2 = \text{const} \quad (4.6)$$

Используя формулы прибавления полупериодов для тета-функций [12]

$$\vartheta_4(2t) = iq^4 e^{-2it} \vartheta_1(2t - \pi\tau/2); \quad q = e^{-\pi i \tau}, \quad (4.7)$$

затем, используя формулу удвоения [12]

$$\vartheta_1(2t) \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 = 2\vartheta_1(t) \vartheta_2(t) \vartheta_3(t) \vartheta_4(t), \quad (4.8)$$

найдем

$$\vartheta_4(2t) = 2iq^4 e^{-2it} \frac{\vartheta_1(t_2) \vartheta_2(t_2) \vartheta_3(t_2) \vartheta_4(t_2)}{\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4}; \quad t_2 = t - \pi\tau/4$$

Выражение (4.6) с учетом формул (4.7), (4.8) представим в виде

$$\frac{dW}{dt} = N_2 \frac{-iq^4 e^{2it} \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 \vartheta_1(2t)}{2\vartheta_1(t_2) \vartheta_2(t_2) \vartheta_3(t_2) \vartheta_4(t_2)} \frac{F(t, m)}{\sqrt{F(t, ci) (\vartheta_3 \vartheta_2(2t) + \vartheta_2 \vartheta_3(2t))}} \quad (4.9)$$

Из граничных условий (4.1) следует

$$\frac{1}{4} \oint_{t=\pi\tau/4} \frac{dW}{dt} dt = i, \quad \frac{1}{4} \oint_{t=\pi/2+\pi\tau/4} \frac{dW}{dt} dt = -i \quad (4.10)$$

В формулах (4.10) выражение (4.9) интегрируется соответственно по четверти дуг окружностей бесконечно малого радиуса с центрами в точках B ($t = \pi\tau/4$) и A ($t = \pi/2 + \pi\tau/4$) против часовой стрелки. Используя соотношение (4.9), и первую формулу из (4.10) с помощью теории вычетов [13], найдем

$$N_2 = \frac{4\vartheta_2 \vartheta_3 \sqrt{(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2)(\vartheta_3 \vartheta_3(2ci) - \vartheta_2 \vartheta_2(2ci))}}{\pi \vartheta_3 \vartheta_3(2m) - \vartheta_2 \vartheta_2(2m)} \quad (4.11)$$

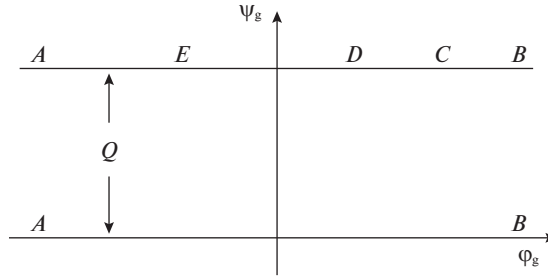


Рис. 5.

Далее, с помощью выражений (4.9), (4.11), и второй формулы из (4.10) получим уравнение

$$\frac{\sqrt{(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2)(\vartheta_3\vartheta_3(2ci) - \vartheta_2\vartheta_2(2ci))}}{\sqrt{(\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2)(\vartheta_3\vartheta_3(2ci) + \vartheta_2\vartheta_2(2ci))}} \left(\frac{\vartheta_3\vartheta_3(2m) + \vartheta_2\vartheta_2(2m)}{\vartheta_3\vartheta_3(2m) - \vartheta_2\vartheta_2(2m)} \right) = 1 \quad (4.12)$$

5. Гидродинамика кавитационного течения идеальной жидкости в межэлектродном промежутке. Введем комплексный потенциал двумерного установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости $W_g(z) = \varphi_g(x, y) + i\psi_g(x, y)$, где $\varphi_g(x, y)$ – потенциал скорости $\mathbf{V} = \text{grad } \varphi_g$, $\psi_g(x, y)$ – функция тока [5].

Твердые и свободные границы течения являются линиями тока, следовательно

$$\begin{aligned} \psi_g(\xi) = Q; \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad \psi_g(i\delta) = Q; \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4] \\ \psi_g(\pi/2 + i\delta) = Q; \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4], \quad \psi_g(\xi + \pi\tau/4) = 0; \quad \xi \in (0, \pi/2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

В плоскости комплексного потенциала W_g области течения соответствует полоса ширины $Q = V_1h_1 = V_2h_2$, V_1, V_2 – значения скорости в точках A и B соответственно (рис. 5).

Функция dW_g/dt на горизонтальных сторонах прямоугольника G_t принимает действительные значения, а на вертикальных – мнимые, имеет нули первого порядка в точках D ($t = 0$), E ($t = \pi/2$), полюса первого порядка в точках B ($t = \pi\tau/4$), A ($t = \pi/2 + \pi\tau/4$). Согласно принципу симметрии Шварца [13], функцию dW_g/dt можно аналитически продолжить через границы области G_t на всю плоскость. Продолженная таким образом функция будет двоякопериодической с периодами $\pi, \pi\tau$ и известными особенностями в прямоугольнике периодов [12]. Согласно теории эллиптических функций функцию dW_g/dt можно представить в виде [14]

$$\frac{dW_g}{dt} = N_3 \frac{\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)\vartheta_4(t)}{\vartheta_1(t - \pi\tau/4)\vartheta_2(t - \pi\tau/4)\vartheta_1(t + \pi\tau/4)\vartheta_2(t + \pi\tau/4)}; \quad N_3 = \text{const}$$

Применяя преобразование (4.8) представим полученное выражение в виде

$$\frac{dW_g}{dt} = \frac{N_3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2} \frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_1(t - \pi\tau/4)\vartheta_2(t - \pi\tau/4)\vartheta_1(t + \pi\tau/4)\vartheta_2(t + \pi\tau/4)} \quad (5.2)$$

Интегрируя выражения (5.2) по четверти дуги окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке B ($t = \pi\tau/4$) против часовой стрелки и используя равенство

$$\frac{1}{4} \oint_{t=\pi\tau/4} (dW_g/dt) dt = -iQ, \text{ вытекающее из граничных условий (5.1), найдем}$$

$$N_3 = -\frac{4Q}{\pi} \vartheta_2 \vartheta_3 q^{-1/4}; \quad q = \exp(\pi \tau i) \quad (5.3)$$

Применяя формулы (4.7), (4.8) и (5.3) выражения (5.2) представим в виде

$$\frac{dW_g}{dt} = -\frac{4Q}{\pi} \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)} \quad (5.4)$$

Введем в рассмотрение функцию Жуковского [5]

$$\chi(t) = \ln \frac{V_0 dz}{dW_g} = r + i\theta_g; \quad r = \ln \frac{V_0}{V} \quad (5.5)$$

где V – модуль скорости, V_0 – величина скорости на свободной поверхности DE , θ_g – угол скорости с осью абсцисс x .

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы [5, 15]

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \omega(t), \quad (5.6)$$

где $\chi_0(t) = r_0 + i\theta_0$ – функция Жуковского для вспомогательного течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе AB модуль скорости постоянный и равен V_* , $\omega(t)$ – функция, аналитическая в области G_t и непрерывная в ее замыкании \bar{G}_t .

Согласно схеме течения, выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \chi(i\delta) &= \operatorname{Im} \chi_0(i\delta) = (0.5 + \beta)\pi; \quad \delta \in [0, c) \\ \operatorname{Im} \chi(i\delta) &= \operatorname{Im} \chi_0(i\delta) = \beta\pi; \quad \delta \in (c, \pi|\tau|/4] \\ \operatorname{Im} \chi(\pi/2 + i\delta) &= \operatorname{Im} \chi_0(\pi/2 + i\delta) = -\alpha\pi; \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi(\xi) &= \operatorname{Re} \chi_0(\xi) = 0; \quad \xi \in [0, \pi/2] \\ \operatorname{Re} \chi(\xi + \pi\tau/4) &= \ln \frac{V_0}{V_*} = r_0; \quad \xi \in [0, \pi/2] \end{aligned} \quad (5.8)$$

на границе AB при $t = \xi + \pi\tau/4$, граничные значения гармонически сопряженных функций $r(\xi + \pi\tau/4)$ и $\theta_g(\xi + \pi\tau/4)$ связаны соотношением [6]

$$e^{-r(\xi + \pi\tau/4)} = \frac{(b + \cos \theta_g(\xi + \pi\tau/4)) d\varphi_g d\xi}{V_0 \left| \frac{d\xi}{d\varphi} \right|} \quad (5.9)$$

Используя формулы (4.6), (4.11) и (5.4) условие (5.9) представим в виде

$$\begin{aligned} C \frac{Q}{V_0} F_2(\xi) \left(b + \cos \theta_g \left(\xi + \frac{\pi\tau}{4} \right) \right) e^{r(\xi + \pi\tau/4)} &= 1, \\ C &= \frac{F_1(0, m)}{\sqrt{F_1(0, ci) (\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2)}}, \quad F_1(t, a) = \vartheta_3(2a) \vartheta_3(2t) - \vartheta_2(2a) \vartheta_2(2t), \\ F_2(\xi) &= \frac{\sqrt{F_1(\xi, ci) (\vartheta_3 \vartheta_3(2\xi) + \vartheta_2 \vartheta_2(2\xi))}}{F_1(\xi, m)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Используя условия $\theta_g(\pi\tau/4) = \operatorname{Im} \chi(\pi\tau/4) = \beta\pi$ из соотношения (5.10) найдем

$$\frac{Q}{V_0} = \frac{e^{-r(\pi\tau/4)}}{b + \cos \beta\pi} \quad (5.11)$$

С учетом равенства (5.11) выражение (5.10) представим в виде

$$\frac{CF_2(\xi)}{b + \cos \beta \pi} \left(b + \cos \theta_g \left(\xi + \frac{\pi \tau}{4} \right) \right) e^{r(\xi + \pi \tau / 4) - r(\pi \tau / 4)} = 1 \quad (5.12)$$

Функция $d\chi_0/dt$ в точке C ($t = ic$) имеет полюс первого порядка с вычетом равным $1/2$. Учитывая, что на сторонах прямоугольника G_T выполняется условие $\operatorname{Re}(d\chi_0/dt) = 0$, продолжим функцию $d\chi_0/dt$ по принципу симметрии Шварца на всю плоскость и получим эллиптическую функцию с периодами $\pi, \pi\tau$. Представляя функцию $d\chi_0/dt$ в виде линейной комбинации логарифмических производных тета-функций [12] и затем интегрированием получим выражение функции $\chi_0(t)$ [15]

$$\chi_0(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t + ic) \vartheta_4(t + ic)}{\vartheta_1(t - ic) \vartheta_4(t - ic)} + iA_0 t + iB_0 \quad (5.13)$$

Используя условия

$$\operatorname{Im} \chi_0(0) = (0.5 + \beta) \pi, \quad \operatorname{Im} \chi_0(\pi/2) = -\alpha \pi,$$

получим

$$A_0 = -2(\alpha + \beta) \quad \text{и} \quad B_0 = \beta \pi$$

Учитывая, что $\chi_0(\pi\tau/4) = r_0 + i\beta\pi$ из соотношения (5.13) выразим величину r_0

$$r_0 = c + (\alpha + \beta) \frac{\pi|\tau|}{2} \quad (5.14)$$

Для неизвестной функции $\omega(t)$, выполняются граничные условия

$$\operatorname{Im} \omega(i\delta) = 0, \quad \operatorname{Im} \omega(\pi/2 + i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4] \quad (5.15)$$

$$\operatorname{Re} \omega(\xi) = 0, \quad \xi \in [0, \pi/2] \quad (5.16)$$

$$\frac{CF_2(\xi)}{b + \cos \beta \pi} (b + \cos(T(\xi) + \mu(\xi))) e^{v(\xi) - v(0)} = 1 \quad (5.17)$$

$$T(\xi) = \operatorname{Im} \chi_0 \left(\xi + \frac{\pi \tau}{4} \right), \quad \mu(\xi) = \operatorname{Im} \omega \left(\xi + \frac{\pi \tau}{4} \right), \quad v(\xi) = \operatorname{Re} \omega \left(\xi + \frac{\pi \tau}{4} \right)$$

Учитывая граничные условия (5.15), (5.16) функцию $\omega(t)$ можно разложить в ряд с вещественными коэффициентами [6, 15]

$$\omega(t) = 2i \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2tk) \quad (5.18)$$

$$\text{Тогда } \mu(\xi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\xi k) \operatorname{ch} \left(\frac{\pi|\tau|}{2} k \right), \quad v(\xi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(2\xi k) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi|\tau|}{2} k \right).$$

Используя условия

$$\chi \left(\frac{\pi \tau}{4} \right) = \ln \frac{V_0}{V_2} + \beta \pi i, \quad \chi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \tau}{4} \right) = \ln \frac{V_0}{V_1} - \alpha \pi i,$$

найдем

$$\frac{V_0}{V_2} = \exp \left(r_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi|\tau|}{2} k \right) \right), \quad \frac{V_0}{V_1} = \exp \left(r_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \operatorname{sh} \left(\frac{\pi|\tau|}{2} k \right) \right) \quad (5.19)$$

Таблица 1. Результаты расчета гидродинамических характеристик

L	V_0/V_1	V_0/V_2	V_1/V_2	Q/V_0
0.5	1.93258	2.61023	1.35065	0.45865
0.7	2.03995	2.75523	1.35065	0.43451
0.9	2.24487	3.03204	1.35065	0.39485

Из условия $V_1 h_1 = V_2 h_2$, формул (3.7) и (5.19) следует, что должно выполняться равенство

$$\frac{V_1}{V_2} = \exp\left(2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left((-1)^k - 1\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi|\tau|k}{2}\right)\right) = \frac{h_2}{h_1} = \frac{b + \cos \alpha\pi}{b + \cos \beta\pi} \quad (5.20)$$

Зависимость $z(t)$ может быть получена интегрированием функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp(\chi(t)) dW_g}{V_0 dt} \quad (5.21)$$

Подставляя в (5.21) формулы (5.4), (5.6), (5.13) и (5.18) получим

$$\frac{dz}{dt} = M \frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)} \left(\frac{\vartheta_1(t+ic)\vartheta_4(t+ic)}{\vartheta_1(t-ic)\vartheta_4(t-ic)}\right)^{0.5} \exp\left(2i\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(2tk) - 2(\alpha + \beta)ti\right), \quad (5.22)$$

где $M = -\frac{4Q}{\pi V_0} \vartheta_2 \vartheta_3 \exp(\beta\pi i)$.

Согласно схеме течения (см. рис. 1) точка C принадлежит лучу EB , расположенному под углом $\beta\pi$ относительно оси абсцисс, следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\operatorname{Im} z_C}{\operatorname{Re} z_C} = \frac{\operatorname{Im} z(ic)}{\operatorname{Re} z(ic)} = \operatorname{tg} \beta\pi \quad (5.23)$$

Длина L отрезка EC , характеризующая длину каверны, определяется по формуле

$$L = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z_C + \operatorname{Im}^2 z_C} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z(ic) + \operatorname{Im}^2 z(ic)} \quad (5.24)$$

Для численного решения задачи задаются геометрические величины α , β , L и параметры a_0 , a_1 , j_0 . В разложении (5.18) сохраняется конечное число n слагаемых и составляется система уравнений, в которой требуется выполнение условия (5.17) в дискретных точках $\xi_k = \pi/(2k)$, где $k = \overline{1, n}$. К полученной системе добавляются уравнения (4.12), (5.23) и (5.24). В процессе решения определяются коэффициенты b_k , $k = \overline{1, n}$ и параметры m , c , $|\tau|$. Затем с помощью соотношений (5.11), (5.19), (5.20) и (5.22) определяются гидродинамические и геометрические характеристики течения.

6. Результаты расчетов. Задача решена при

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.25, \quad a_0 = 0.906, \quad a_1 = -12.82, \quad j_0 = 100 \text{ А/см}^2$$

Для заданных значений получаем, что $h_2/h_1 = 1.35065$. В табл. 1 представлены результаты расчетов величин V_0/V_1 , V_0/V_2 , V_1/V_2 , Q/V_0 для трех значений величины L : 0.5, 0.7, 0.9. Величина отношения V_1/V_2 при различных значениях L одна и та же, и совпадает с величиной отношения h_2/h_1 .

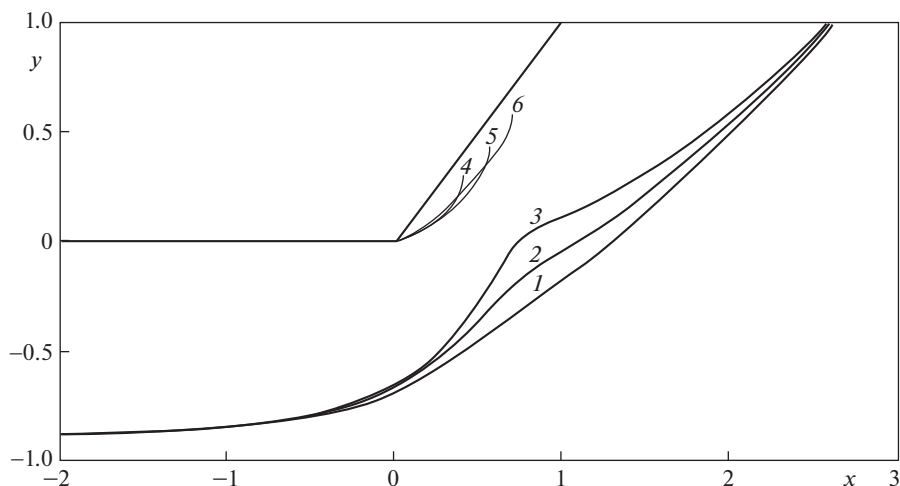


Рис. 6.

На рис. 6 представлены графики анодных границ и каверн. Линии 1 и 4 соответствуют анодной границе и границе каверны для значения $L = 0.5$, линии 2 и 5 для значения $L = 0.7$, линии 3 и 6 для значения $L = 0.9$.

Заключение. Результаты решения отражают качественные эффекты, связанные с влиянием каверны и ее размеров на образование макродефектов обрабатываемой поверхности, высота которых может составлять от 10 до 100 мк [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мороз И.И., Алексеев Г.А., Водяницкий О.А и др. Электрохимическая обработка металлов. М.: Машиностроение, 1969. 208 с.
2. Wilson J.F. Practice and Theory of Electrochemical Machining. R.E. Publishing Company, 1982. 252 p.
3. Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A.P. Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proc. Seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). 2013. V. 6. P. 13–26.
4. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008, 413 с.
5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. Миназетдинов Н.М. О кавитационном течении идеальной несжимаемой жидкости при электрохимической обработке металлов // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 1. С. 45–53.
7. Миназетдинов Н.М. Об одной модели кавитационного течения при электрохимической обработке // Вестн. Российского нового университета. Сер.: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2020. № 3. С. 41–51.
8. Давыдов А.Д., Козак Е. Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
9. Крылов А.Л. Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 2. С. 321–323.
10. Миназетдинов Н.М. Гидродинамическая интерпретация одной задачи теории размерной электрохимической обработки металлов // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 60–68.
11. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 80 с.

12. Уттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа Т. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
14. Терентьев А.Г. Струйное обтекание системы двух препятствий // Тр. сем. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. Вып. 1. С. 110–123.
15. Киселев О.М., Котляр, Л.М. К задаче о течении тяжелой жидкости с двумя свободными поверхностями. // ПММ. 1973. Т. 37. № 5. С. 849–856.

Hydrodynamic Model of the Phenomenon of “Jet” in Electrochemical Machining of Metals

N. M. Minazetdinov^{a, #}

^aRussian New University Moscow, Russia

[#]e-mail: nminazetdinov@yandex.ru

During electrochemical machining of metals in the interelectrode gap in places with low static pressure there is a phenomenon of cavitation. As part of the “ideal process” model of electrochemical processing, a two-dimensional problem is solved related to determining the shape of the treated surface taking into account attached cavitation. A condition is applied that allows taking into account the influence of the electric field on the hydrodynamics of the cavitating flow of an ideal incompressible liquid in the interelectrode gap.

Keywords: electrochemical machining of metals, cavitation, ideal incompressible fluid

REFERENCES

1. Moroz I.I., Alekseev G.A., Vodyanitskii O.A. et al. Electrochemical Machining of Metals. Moscow: Mech. Engng., 1969. 208 p. (in Russian)
2. Wilson J.F. Practice and Theory of Electrochemical Machining. R.E. Publ. Co., 1982. 252 p.
3. Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A.P. Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proc. Seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). 2013. vol. 6, pp. 13–26.
4. Zhitnikov V.P., Zaytsev A.N. Pulse Electrochemical Machining. Moscow: Mech. Engng., 2008. 413 p. (in Russian).
5. Gurevich M.I. Theory of Jets in Ideal Fluids. N.Y.: Acad. Press, 1957. 585 p.
6. Minazetdinov N.M. Cavitation flow of an ideal incompressible fluid in the electrochemical machining of metals // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 29–35.
7. Minazetdinov N.M. On one model of cavitation flow of electrolyte in electrochemical machining // Vestn. of Russian New Univ. Complex Systems: Models, Analysis, Management, 2020, no. 3, pp. 41–51 (in Russian).
8. Davydov A.D., Kozak Ye. High-Speed Electrochemical Forming. Moscow: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian).
9. Krylov A.L. Cauchy problem for Laplace equation in the theory of electrochemical metal processing // Dokl Akad Nauk SSSR, 1968, vol. 178, no. 2, pp. 321–323 (in Russian).
10. Minazetdinov N.M. A hydrodynamic interpretation of a problem in the theory of the dimensional machining of metals // JAMM, 2017, vol. 73, no. 1, pp. 41–47.
11. Klokov V.V. Electrochemical Forming. Kazan: Izd. Kazan Univ., 1984. 80 p. (in Russian).
12. Whitaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927. 612 p.
13. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Nauka, 1987. 688 p. (in Russian).
14. Terentyev A.G. Jet flow of two obstacles system // Workshop of the Seminar on Boundary Value Problems, 1964, vol. 1, pp. 110–123. (in Russian).
15. Kiselev O.M., Kotliar L.M. On the problem of flow of a heavy fluid with two free surfaces // JAMM, 1973, vol. 37, no. 5, pp. 804–811.