

УДК 621.438

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДОРОДНИЦЫНА ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОТОКАХ© 2021 г. В. Д. Борисевич^{1,*}, Е. П. Потанин^{2,3,**}¹ *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия*² *Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия*³ *Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия***e-mail: VDBorisevich@mephi.ru****e-mail: potanin45@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2020 г.

После доработки 04.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Предлагается методика расчета неизотермических ламинарных пограничных слоев на вращающемся в газовой среде диске, основывающаяся на использовании преобразования Дородницына. Приближенный учет нелинейных инерционных членов выполнен методом Слезкина–Тарга. Показано, что при охлаждении поверхности диска-торца, вращающегося медленнее внешнего потока, можно не только ослабить радиальное течение вязкого теплопроводного газа, но и изменить направление скорости потока в пограничном слое на противоположное. Обсуждается возможность использования полученных результатов для уменьшения маскирующего влияния торцевых элементов при экспериментальном изучении устойчивости вращательных потоков, а также для управления циркуляционными потоками в замкнутых системах.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, вращающийся поток, преобразование Дородницына, градиент температуры, вязкость, циркуляция, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823521060035

1. Введение. В последние годы значительный интерес исследователей вызывают вращательные движения газообразных сред. Это относится к проблемам геофизической гидродинамики [1, 2], изучению конвективных течений в системах с градиентом температуры [3], разделению изотопов в газовых центрифугах [4–6], вопросам переработки отработавшего ядерного топлива [7, 8], а также расчетам теплопередачи вблизи вращающихся тел [9–11]. Особый интерес представляет газодинамика циркуляционных течений вязкого газа в роторе центробежных аппаратов применительно к процессу умножения разделительных эффектов по высоте колонны [12].

Как известно, при вращении сплошных сред в ограниченных торцами или другими тормозящими элементами системах возникают трехмерные гидродинамические явления, описываемые с помощью нелинейных гидродинамических уравнений [13]. Если рассматривать движение среды в прямом круговом вращающемся цилиндре при наличии тормозящей крышки или другого элемента (например, газоотборника в газовой центрифуге), то на первый взгляд представляется, что при выполнении условия $L/R = 10$ (где L – длина системы, R – ее радиус) момент сил трения газа о торец значительно меньше раскручивающего момента сил на дне и вблизи боковой поверхности цилиндра, в результате чего торцевым торможением вращательного течения мож-

но пренебречь и считать вращение газа в основном объеме подобным вращению твердого тела с угловой скоростью цилиндра. Однако, эти представления, как следует из детального рассмотрения взаимодействия вращательного потока с неподвижными торцевыми поверхностями, являются весьма приближенными. Оказывается, что на неподвижных торцевых поверхностях образуются очень тонкие пограничные слои и, как следствие, большие осевые градиенты азимутальной скорости, в результате чего сильное вязкое торможение основного вращательного потока изменяет азимутальную скорость течения в основном объеме даже при большом отношении длины системы L к ее радиусу R .

Эффективное использование газовой центрифуги невозможно без создания противотока тяжелой и легкой фракций, что может осуществляться механическим способом, предполагающим использование приторцевых элементов, тормозящих вращательный поток [5]. При этом в основном объеме устройства возбуждается сложное трехмерное движение газовой среды, представляющее собой квазитвердое вращение с некоторой угловой скоростью, отличной от скорости вращения ротора, на которое наложено вторичное осевое течение. Отметим, что термин квазитвердое относится только к ядру потока и представляет собой описание вращения газа как твердого тела при наличии равномерного осевого потока. Численные расчеты газодинамики таких потоков сталкиваются с трудностями в силу необходимости расчета очень тонких пограничных слоев на торцах. Поэтому для приближенных оценок исследователи прибегают к упрощенному моделированию, заменяя тормозящий элемент дисковой поверхностью.

Влияние эффектов торможения среды проявляется также при попытках экспериментального изучения устойчивости одномерных вращательных потоков. Поскольку избежать воздействия торцов в эксперименте практически невозможно и при этом отсутствует возможность адекватного сопоставления с теоретическим анализом, исследование часто сводится к изучению устойчивости довольно сложного трехмерного течения. Один из примеров нежелательного влияния торцов связан с движением газа между двумя концентрическими вращающимися с различными угловыми скоростями цилиндрами и возбуждаемой при этом классической неустойчивости Рэлея—Тейлора. В данном случае тормозящие вращение среды неподвижные торцевые элементы вызывают вторичные циркуляционные потоки, налагающиеся на вихревую циркуляцию Тейлора.

Физическая причина обсуждаемых выше нелинейных явлений связана с нарушением равновесия центробежных сил и сил, обусловленных градиентом давления в тонких пограничных слоях. Очевидно, что радиальный градиент давления, обусловленный вращением всего столба газа, практически не зависит от осевой координаты z . В то же время центробежная сила неоднородна по z вблизи тормозящего элемента, уменьшаясь к торцу в силу прилипания среды. В результате в пограничном слое газ движется к оси, а в основном объеме возникает вторичный осевой циркуляционный поток, налагающийся на измененный вращательный поток. Последнее оказывает маскирующее влияние на механизм потери устойчивости.

В настоящей работе предлагается метод снижения тормозящего воздействия торцов и, следовательно, вторичных циркуляционных потоков, за счет принудительного увеличения плотности газа при охлаждении твердой неподвижной торцевой поверхности. С помощью этого же механизма за счет изменения температуры вращающегося торца можно управлять осевой циркуляцией в газовой центрифуге.

При изучении отмеченных выше явлений возникает проблема расчета гидродинамических и тепловых пограничных слоев вблизи вращающегося в неподвижной среде диска или в условиях вращения среды вблизи неподвижной торцевой поверхности. При рассмотрении практических задач часто используют аналитические решения, позволяющие понять суть того или иного процесса и оценить интенсивность гидроди-

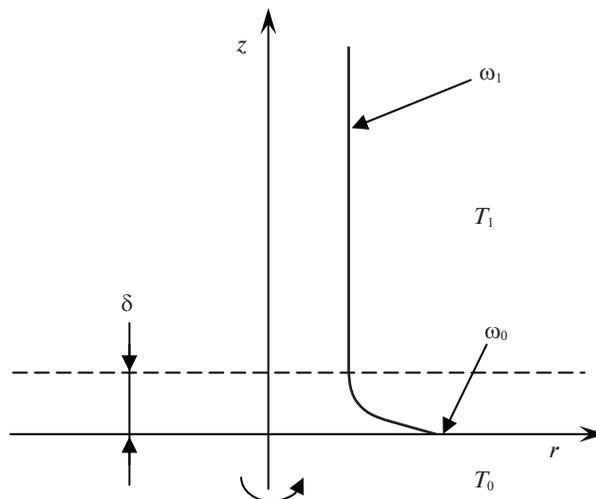


Рис. 1. Схема гидродинамического потока вблизи вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0 диска при наличии внешнего потока ω_1 . За δ , T_0 и T_1 обозначена толщина пограничного слоя, температура диска и температура во внешнем потоке соответственно.

намических и тепловых потоков. Сложность аналитического решения этой задачи состоит в необходимости одновременного учета нелинейных инерционных членов в уравнениях движения и осевого градиента температуры. В газе неоднородность температуры приводит к соответствующему перераспределению плотности. Влияние последнего можно учесть с помощью предложенного А.А. Дородницыным метода [14], основанного на введении модифицированных осевой координаты и скорости среды.

Отметим, что ниже при изучении неизотермического вращательного течения газа вблизи протяженного нагретого (охлажденного) диска мы будем использовать авторемодельное представление, в котором окружная и радиальная скорости пропорциональны первой степени радиуса. Такой выбор решения подтверждается многочисленными исследованиями, как изотермических задач, так и изучением гидродинамики вращающихся нагретых дисков, подробный обзор которых дан в [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерный ламинарный пограничный слой вязкого теплопроводного газа на бесконечно протяженном вращающемся с угловой скоростью ω_0 диске при наличии внешнего потока, вращающегося с угловой скоростью ω_1 . На рис. 1 показана толщина гидродинамического пограничного слоя δ , а также температуры T_0 и T_1 диска и внешнего потока соответственно. Отметим, что угловая скорость внешнего потока ω_1 может быть как меньше, так и больше ω_0 . Аналогично температура во внешнем (рис. 1) потоке T_1 может быть как меньше, так и больше температуры диска.

На первый взгляд может показаться, что рассмотрение такой задачи для безграничной области течения не имеет смысла. Однако, при инженерных расчетах, ограниченных боковыми стенками вращательных потоков, решения для безграничного диска могут быть использованы при анализе характеристик приторцевых пограничных слоев в области невязкого ядра потока [15–17], а также для оценки циркуляции в случае, когда толщина торцевого пограничного слоя много меньше радиуса системы ($\delta \ll R$).

Предположим, что вязким нагревом можно пренебречь. В дальнейшем мы оценим условия применимости этого приближения. С учетом зависимости плотности, динамической вязкости и теплопроводности от температуры система уравнений, описывающая стационарные гидродинамический и тепловой пограничные слои на вращающемся диске, принимает вид [18]

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.4)$$

где v_r , v_ϕ и v_z – радиальная, азимутальная (окружная) и осевая компоненты скорости сплошной среды; $\eta = \rho \nu$ – коэффициент динамической вязкости, κ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность, p – давление, T – температура.

Система (2.1)–(2.4) не содержит уравнения движения в проекции на ось z , так как последнее служит лишь для определения слабой зависимости давления от осевой координаты в пограничном слое [13]. К системе уравнений (2.1)–(2.4) следует добавить уравнение состояния в виде

$$p = \rho R^* T / \mu, \quad (2.5)$$

где μ – молярная масса, R^* – универсальная газовая постоянная.

Рассмотрим задачу в приближении малого изменения плотности газа по радиусу, когда выполняется неравенство

$$\alpha < 1, \quad (2.6)$$

где $\alpha = V_\phi^{*2} / V_m^2$ – безразмерный параметр сжимаемости, V_ϕ^* – характерное значение азимутальной скорости газа, V_m – наиболее вероятная скорость молекул.

Отметим, что в ранее использованном [16] линеаризованном подходе при анализе инерционных членов в уравнениях Навье–Стокса учитывался только третий центробежный член в левой части уравнения (2.1), а в (2.2) силами инерции пренебрегалось совсем. В рамках развитого далее подхода учитываются все нелинейные члены в левых частях уравнений (2.1) и (2.2).

Предположим, что температура газа не зависит от радиальной координаты, что находится в соответствии с пренебрежением вязким нагревом в уравнении энергии (2.4). Теплоемкость газа полагаем независимой от температуры. Систему уравнений (2.1)–(2.4) будем решать при следующих граничных условиях, учитывающих условие прилипания на твердой поверхности:

$$z = 0: \quad v_r = 0, \quad v_\phi = \omega_0 r, \quad v_z = 0, \quad T = T_0 \quad (2.7)$$

$$z = \delta: \quad v_r = 0, \quad v_\phi = \omega_1 r, \quad T = T_1 \quad (2.8)$$

Отметим, что впервые автомодельное решение для бесконечно протяженного диска в неподвижной среде в случае изотермического течения несжимаемой жидкости было предложено Карманом [19]. Оно сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений движения сплошной среды при постоянстве температуры в пространстве, когда центробежные силы отбрасывают среду к периферии, чему препятствуют силы вязкости в слое вблизи поверхности диска. При этом предполагалось,

что плотность среды не изменяется в пространстве. В настоящей работе рассмотрена неизотермическая задача, когда температура диска отличается от температуры среды внешнего вращающегося потока. В этом случае к системе уравнений динамики необходимо добавить уравнение энергии. Кроме того, учитывается зависимость вязкости и теплопроводности газовой среды от температуры, а также изменение плотности газа, связанное с изменением температуры. Следует отметить, что в данной постановке физические явления описываются решениями Бириха–Остроумова [20]. Отличие заключается лишь в том, что роль центробежных сил играют силы тяжести.

3. Решение автомодельной задачи. Введем преобразование А.А. Дородницына и преобразованную осевую компоненту скорости v_{z1} [14]

$$Z_0 = \int_0^z \frac{\rho(z)}{\rho_1} dz \quad (3.1)$$

$$v_{z1} = v_z \rho / \rho_1 \quad (3.2)$$

Будем искать решение в виде

$$v_r = rF(Z_0), \quad v_\varphi = rG(Z_0), \quad T = T_0 + (T_1 - T_0)\theta(Z_0), \quad (3.3)$$

причем коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности изменяются пропорционально первой степени температуры, то есть $\eta = \eta_1 T / T_1$, $\kappa = \kappa_1 (T / T_1)$ [21]. Здесь η_1 и κ_1 – коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности среды во внешнем потоке. Учтем, что внешний поток вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 и имеет плотность ρ_1 , а в пограничном слое выполняется следующее условие [13, 15]

$$\frac{dp}{dr} = \rho_1 \omega_1^2 r \quad (3.4)$$

Поскольку сила, связанная с градиентом давления и действующая на элемент объема газа в пограничном слое, направлена к оси вращения и зависит от плотности во внешнем потоке ρ_1 и угловой скорости ω_1 , а центробежная сила, направленная к периферии, определяется осевыми распределениями плотности $\rho(z)$ и азимутальной скорости $v_\varphi(z)$, возникает возможность изменения интенсивности и направления циркуляции не только за счет изменения ω_1 , но и варьированием теплофизических параметров задачи. Используя методику расчета [16], в основе которой лежит сведение уравнений пограничного слоя в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, получим следующую систему уравнений

$$F^2 + v_{z1} F' - G^2 + \omega_1^2 \frac{1}{n} = -\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta + v_1 F'' \quad (3.5)$$

$$2FG + v_{z1} G' = v_1 G'' \quad (3.6)$$

$$2F + v_{z1}' = 0 \quad (3.7)$$

$$v_{z1} \theta' = \chi_1 \theta'' \quad (3.8)$$

где $n = T_1 / T_0$, $\chi_1 = \kappa_1 / \rho_1 c_p$ и $v_1 = \eta_1 / \rho_1$ – коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости во внешнем потоке соответственно, штрих означает дифференцирование по переменной Z_0 .

Для получения аналитического решения системы (3.5)–(3.8) воспользуемся приближенным методом усреднения нелинейных инерционных членов по толщине пограничного слоя δ_0 [22] с использованием условия прилипания среды на твердых поверхностях и приближенных граничных условий Тарга

$$Z_0 = 0: \quad F = 0, \quad G = \omega_0, \quad v_{z1} = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.9)$$

$$Z_0 = \delta_0: \quad F = 0, \quad G = \omega_1, \quad G' = 0, \quad \theta = 1 \quad (3.10)$$

Существенным моментом при получении решения в рамках модели Тарга является условие исчезновения осевого градиента азимутальной скорости среды на внешней границе пограничного слоя.

Проведем усреднение нелинейных инерционных членов в уравнениях (3.5) и (3.6), а также осевой скорости в конвективном члене уравнения энергии (3.8) по толщине пограничного слоя

$$Av_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} [F^2 + v_{z_1} F' - G^2] dZ_0 + \frac{\omega_1^2}{n} \quad (3.11)$$

$$Bv_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} [2FG + v_{z_1} G'] dZ_0 \quad (3.12)$$

$$C = \frac{1}{\delta_0 v_1} \int_0^{\delta_0} v_{z_1} dZ_0, \quad (3.13)$$

где A и B постоянные, подлежащие определению.

После несложного интегрирования по частям с учетом граничных условий (3.9) и (3.10) соотношения (3.11), (3.12) принимают вид

$$Av_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} 3F^2 dZ_0 - \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} G^2 dZ_0 + \frac{\omega_1^2}{n} \quad (3.14)$$

$$Bv_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} 4FG dZ_0 - \frac{2\omega_1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} F dZ_0 \quad (3.15)$$

Используя введенные обозначения, уравнения движения и энергии запишем в форме

$$A + \frac{\omega_1^2}{v_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta = \frac{d^2 F}{dZ_0^2} \quad (3.16)$$

$$B = \frac{d^2 G}{dZ_0^2} \quad (3.17)$$

$$C \frac{d\theta}{dZ_0} = \frac{d^2 \theta}{dZ_0^2} \quad (3.18)$$

Введем новые переменные $f = F/\omega_0$, $g = G/\omega_0$ и $w = v_{1z}/\sqrt{\omega_0 v_1}$, $\delta = \delta_0 \sqrt{\omega_0/v_1}$, $Z = Z_0/\delta_0 = Z_0/(\delta \sqrt{v_1/\omega_0})$.

Отметим, что в уравнение (3.18) входит величина C , зависящая от усредненной по толщине слоя осевой компоненты скорости. Это позволяет исследовать взаимное влияние гидродинамики и теплопереноса. Первоначально находится решение уравнения (3.18), в которое входит неизвестная пока величина C . Это решение используется при интегрировании уравнения (3.16).

Решение системы (3.16)–(3.18) при $v_1 = \chi_1$ имеет вид

$$f = \delta^2 \left\{ \frac{A - N}{2} (Z^2 - Z) + \frac{N}{\beta^2} (Z - 1) - \frac{N}{\beta^2} [Z \exp(-\beta) - \exp(-\beta Z)] \right\} \quad (3.19)$$

$$g = (1 - m) Z^2 - 2(1 - m) Z + 1 \quad (3.20)$$

$$\theta = \frac{\exp(-\beta Z) - 1}{\exp(-\beta) - 1}, \quad (3.21)$$

где $\beta = \delta k$, $m = \omega_1/\omega_0$, $N = m^2(1 - n^{-1})/(\exp(-\beta) - 1)$, а величины A , δ , B и k определяются из решения системы трех уравнений, полученных с использованием (3.14), (3.15), граничного условия для производной азимутальной компоненты скорости на внешней границе слоя и уравнения усреднения осевой скорости $k = -\int_0^1 wdZ$

$$A = \frac{A^2\delta^4}{40} + AF + D - \frac{8}{15}(1 - m)^2 + \frac{4}{3}(1 - m) - 1 + \frac{m^2}{n} \quad (3.22)$$

$$2(1 - m) = -A\delta^4 \left(\frac{3 + 2m}{30} \right) + N(4\delta^2 D - D_1) \quad (3.23)$$

$$k = 2\delta^3 \left\{ ND_2 + \frac{5}{4(3 + 2m)\delta^4} (2 - 2m - N(4\delta^2 D - D_1)) \right\}, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \delta^4 N^2 \left\{ \frac{1}{40} + \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\beta^2} - \frac{6}{\beta^3} \right) \exp(-\beta) \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta^4} \left[4 - \frac{21}{2\beta} + \frac{6}{\beta^2} + \left(1 - \frac{12}{\beta^2} \right) \exp(-\beta) + \left(1 + \frac{9}{2\beta} + \frac{6}{\beta^2} \right) \exp(-2\beta) \right] \\ D_1 &= m\delta^4 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \exp(-\beta) \right] \\ D_2 &= \frac{1}{24} + \frac{1}{6\beta^2} (1 - \exp(-\beta)) + \frac{\exp(-\beta)}{\beta^4} - \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^4} \\ F &= N\beta^4 \left[-\frac{1}{20} + \frac{1}{4\beta^2} - \frac{3}{\beta^4} + \frac{6}{\beta^5} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\beta^2} - \frac{6}{\beta^3} \right) \exp(-\beta) \right] \end{aligned}$$

В отсутствие осевого градиента температуры ($n = 1$, $N = 0$) решение совпадает с результатом [22].

Отметим, что если не учитывать изменения плотности с координатой z ($n = 1$, равные температуры на поверхности диска и во внешнем потоке), направление течения в пограничном слое на диске меняет знак в зависимости от того, больше или меньше единицы величина параметра $m = \omega_1/\omega_0$. При $m < 1$ (диск вращается быстрее внешнего потока) центробежная сила превосходит радиальный градиент давления и течение направлено к периферии, а радиальный поток положителен. Если диск вращается медленнее внешнего потока ($m > 1$) или покоится ($m \rightarrow \infty$) сила, связанная с градиентом давления, по абсолютной величине превышает центробежную и течение вблизи диска направлено к оси [13]. Это обстоятельство приводит к тому, что при попытках экспериментального наблюдения неустойчивости Рэлея–Тейлора, а также других возможных неустойчивостей вращающейся среды [23–25] возникают трудности, связанные с действием торцевых поверхностей лабораторных устройств в силу изменения характера течения от одномерного к трехмерному. Достаточно отметить, что в [26] для наблюдения неустойчивости одномерного потока с характерным для безграничных по высоте вращающихся цилиндров профилем азимутальной скорости использовалась установка с очень большим отношением L/R . Ниже выполненные оценки по-

казывают, что уменьшая температуру тормозящих торцевых поверхностей можно избежать или существенно подавить нежелательные трехмерные явления, связанные с циркуляцией, а также регулировать эти потоки при реально достижимых параметрах газовой среды и отношений температур n .

Оценим погрешность метода усреднения нелинейных инерционных членов по толщине пограничного слоя путем сравнения с известными точными результатами. Рассмотрим, например, изотермический случай диска, вращающегося в неподвижной среде. Приближенное решение для гидродинамических параметров согласно (3.19) и (3.20) при этом принимает вид

$$f = \frac{A}{2} \delta^2 (Z^2 - Z) \quad (3.25)$$

$$g = (1 - Z)^2 \quad (3.26)$$

$$w = \frac{1}{6} A \delta^3 (3Z^2 - 2Z^3), \quad (3.27)$$

где $A = -2/15$, $\delta = 7/2$.

Введем коэффициент момента сил сопротивления диска

$$C_M = \frac{M}{\rho \omega_0^2 R^5}, \quad (3.28)$$

где $M = 4\pi\eta \int_0^R r^2 \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right|_{Z=0} dr = \pi\eta\omega_0 \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{Z=0}$ – момент сил сопротивления. Сравним результаты для коэффициента момента сил сопротивления диска, смачиваемого с двух сторон, полученного приближенным методом усреднения Тарга C_M^{Targ} с точным численным значением C_M для рассматриваемого частного случая. Используя (3.26), найдем

$$C_M^{\text{Targ}} = \frac{1.8}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (3.29)$$

где $\text{Re} = \rho \omega_0 R^2 / \eta$ – число Рейнольдса. При этом точное значение коэффициента сопротивления, полученное в результате численных расчетов [19, 22], равно $C_M = 1.935 \cdot \text{Re}^{-1/2}$. Как видно результат отличается на 7%. Аналогично, соответствующие значения осевой компоненты скорости на большом удалении от диска равны: $v_z^{\text{Targ}}(\infty) = \frac{1}{6} A \delta^2 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho} = -0.953 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho}$ и $v_z(\infty) = -0.886 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho}$ [22].

4. Результаты расчета. Рассмотрим сначала более подробно случай, когда газ вращается быстрее диска ($m < 1$). Если осевой градиент температуры отсутствует ($n = 1$), то вторичное течение в пограничном слое направлено к оси, а радиальная компонента скорости (рис. 2) отрицательна. На рис. 2а показаны характерные профили азимутальной скорости $V_\varphi(z)$ и температуры $T(z)$ газа вблизи вращающегося диска. Следует обратить внимание на то, что радиальная скорость среды $V_r(z)$ в пограничном слое (рис. 2б) направлена к оси (противоположно радиальному направлению, см. рис. 2б). Если охлаждать диск, то плотность газа вблизи поверхности диска будет возрастать. Это будет приводить к увеличению центробежной силы и, следовательно, к уменьшению циркуляционного потока. При сильном охлаждении диска ($n > 1$) направление радиального потока изменяется на обратное. Этот случай проиллюстрирован на рис. 3.

На рис. 4 и 5 показаны зависимость рассчитанного параметра k , характеризующего интенсивность осевого потока, от отношения температур во внешнем потоке и на

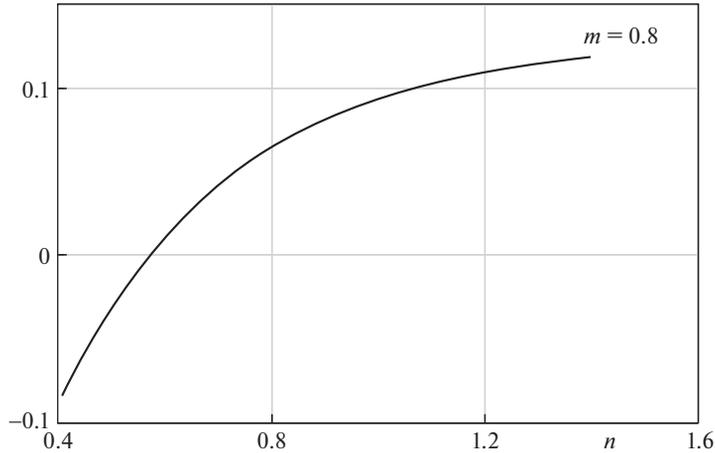


Рис. 4. Зависимость величины k от параметра n при более быстром вращении диска, чем внешняя среда.

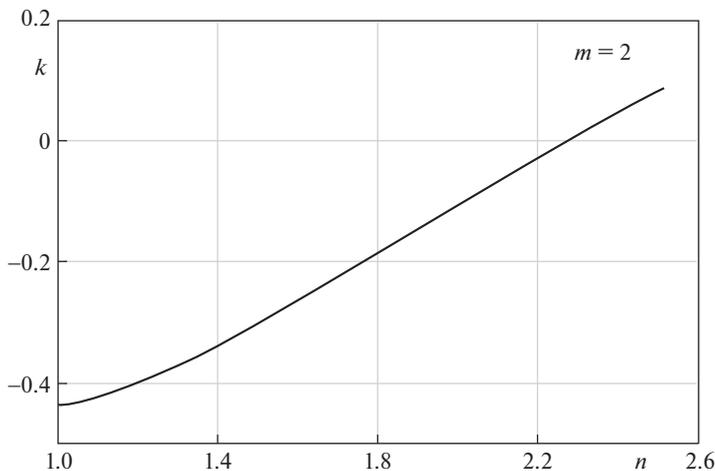


Рис. 5. Зависимость величины k от параметра n в случае, если диск вращается медленнее, чем внешняя среда.

личаются направлениями циркуляции. Это связано с тем, что если среда над диском вращается медленнее диска ($m = 0.8$), то центробежная сила в пограничном слое превышает радиальный градиент давления и радиальная скорость направлена к периферии ($k > 0$). При $m = 2$ уже градиент давления превосходит центробежную силу, и направление циркуляции изменяет знак. Как видно из рис. 6, при возрастании параметра n плотность среды у поверхности диска увеличивается, что позволяет в конечном итоге изменить знак радиальной скорости на положительный в случае, если в отсутствие градиента температуры он был отрицателен.

Оценим количественно на основании полученных аналитических зависимостей (3.19)–(3.21) и соотношений (3.22)–(3.24) эффективность процесса регулирования радиальной скорости в пограничном слое и параметр n_{cr} , при котором должна происходить остановка циркуляционного потока. Для этого определим поток газа в погранич-

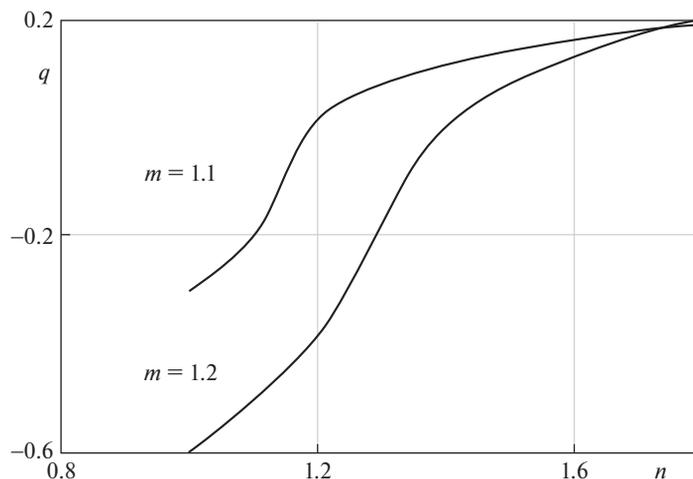


Рис. 6. Зависимости безразмерного потока $q = Q/r^2 \sqrt{\omega_0 v_1}$ от отношения температур во внешнем потоке и на диске $n = T_1/T_0$ при различных значениях параметра m .

ном слое при различных значениях параметров m и $n = T_1/T_0$. Радиальный поток в пограничном слое может быть рассчитан с использованием уравнений (2.3), (3.1) и (3.2)

$$Q = 2\pi r^2 \sqrt{v_1 \omega_0} \delta^3 \int_0^1 f(Z) dZ \quad (4.1)$$

На рис. 6 показаны результаты расчета безразмерной величины $q = Q/r^2 \sqrt{\omega_0 v_1}$ в зависимости от отношения температур во внешнем потоке и на диске $n = T_1/T_0$ при различных значениях параметра m . Как следует из приведенных зависимостей, уже при $n_{cr} \approx 1.2-1.4$ должно наблюдаться практически полное торможение циркуляционного потока. Причем с возрастанием параметра m критическая величина n возрастает. Это обусловлено тем обстоятельством, что при больших m для преодоления направленной к оси силы, связанной с радиальным градиентом давления, необходимо увеличивать центробежную силу в пограничном слое за счет уплотнения газа.

Оценим справедливость пренебрежения вязким нагревом в уравнении энергии (2.4). Согласно [16], оценим параметр $D = \omega^2 r^2 / c_p T$, в котором ω , T и r – характерные величины угловой скорости и температуры среды, а также радиуса. Полагая $\omega = 5 \times 10^3$ 1/с, $T = 300$ К, $r = 0.06$ м, получим $D \approx 0.3$.

Заключение. В работе впервые в аналитической форме с учетом нелинейных инерционных членов в уравнениях движения газа рассмотрено взаимное влияние тепловых и газодинамических процессов в пограничном слое вблизи вращающегося в неподвижной газовой среде диска при наличии внешнего вращающегося потока. Исследованы случаи различных значений параметра $m = \omega_1/\omega_0$, характеризующего отношение угловых скоростей среды и диска. На основе использования преобразования Дородницына в рамках модели конечной толщины пограничного слоя показано, что даже при величине параметра $m > 1$ варьированием теплового режима можно добиться существенного замедления направленного к оси радиального потока. Этот результат имеет практическое значение, связанное с уменьшением влияния торцевых поверхно-

стей на вращение среды в ограниченных объемах. Предложенная методика расчета может быть также использована при оценках влияния температурных градиентов на интенсивность циркуляции в центрифуге с механическим возбуждением осевого противоточного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grimble T.A., Agarwal A., Juniper M.P.* Local linear stability analysis of cyclone separators // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 816. P. 507–538.
2. *Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.* Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана // *Компьют. исслед. модел.* 2016. Т. 8. № 6. С. 927–940.
3. *Бирях Р.В., Пухначев В.В.* Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // *Докл. РАН.* 2011. Т. 436. № 3. С.323–327.
4. *Villani S. (Ed.) Uranium Enrichment.* Berlin: Springer, 1979. 315 p.
5. *Борисевич В.Д., Борман В.Д., Сулаберидзе Г.А., Тихомиров А.В., Токманцев В.И.* Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге. М.: Изд. дом МЭИ, 2011. 275 с.
6. *Vogovalov S.V., Borman V.D., Borisevich V.D., Tronin V.N.* Dependence of the separative power of an optimized Iguassu gas centrifuge on the velocity of rotor // *Numer. Meths. for Heat&Fluid Flow.* V. 27. Iss. 7. P. 1387–1394.
7. *Горшунев Н.М., Потанин Е.П.* Использование высокочастотных полей для центробежного разделения отработавшего ядерного топлива // *Атомная энергия.* 2018. Т. 124. Вып. 3. С. 164–168.
8. *Fetterman A.J., Fisch N.J.* Wave-driven countercurrent plasma centrifuge // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2009. V. 18. P. 045003.
9. *Миронова М.В., Кортиков Н.Н.* Сопряженный теплообмен на неизотермическом вращающемся диске // *Теплофиз. аэромех.* 2011. Т. 18. № 4. С. 597–603.
10. *Петров А.Г.* О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // *ПММ.* 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 741–758.
11. *Голубкин В.Н., Марков В.В., Сизых Г.Б.* Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 808–816.
12. *Потанин Е.П., Соснин Л.Ю., Чельцов А.Н.* Определение интенсивности циркуляции в роторе центрифуги при обогащении изотопных смесей тяжелых газов // *Атомная энергия.* 2019. Т. 127. Вып. 3. С. 140–144.
13. *Дорфман Л.А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
14. *Дородницын А.А.* Пограничный слой в сжимаемом газе // *ПММ.* 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449–486.
15. *Потанин Е.П.* Трехмерное движение газа во вращающемся цилиндре с тормозящей крышкой // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 1. С. 78–87.
16. *Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J.* Circulation control in MHD rotating flows // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 829. P. 328–244.
17. *Borisevich V.D., Potanin E.P.* Mechanically driven circulation in a rotating cylinder/disk device // *Europ. J. Mech. / В Fluids.* 2020. V. 82. P. 161–167.
18. *Ram P. Kumar V.* Heat transfer in FHD boundary layer flow with temperature dependent viscosity over a rotating disk // *Fluid Dyn.&Mater. Process.* 2014. V. 10. № 2. P. 179–196.
19. *Von Kármán T.* Uber laminare und turbulente Reibung // *Z. Angew. Math. Mech.* 1921. V. 1. P. 233–252.
20. *Бирях Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *ПМТФ.* 1966. Т. 7. № 3. С. 69–72.
21. *Шидловский В.П.* Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе // *ПММ.* 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 161–164.
22. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. Ленинград: ГИФМЛ, 1951. 420 с.
23. *Тимофеев А.В.* Об устойчивости мод Сайдема неоднородно вращающейся плазмы // *Физика плазмы.* 2010. Т. 36. Вып. 8. С. 779–785.

24. *Balbus S.A., Terquem C.* Linear analysis of the Hall effect in protostellar disks // *Astrophys. J.* 2001. V. 552. P. 235–247.
25. *Khalzov I.V., Smolyakov A.I., Ilgisonis V.I.* Equilibrium magnetohydrodynamic flows of liquid metals in magnetorotational instability experiments // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 644. P. 257–280.
26. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Philos. Trans. Royal Soc. London.* 1923. Ser. A. 223. P. 289–343.

Application of the Dorodnitsyn Transformation for Analysis of Heat and Mass Transfer in Rotating Flows

V.D. Borisevich^{a,#} and E.P. Potanin^{b,c,##}

^a National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia

^b National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia

^c All Russian Institute for Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#] e-mail: VDBorisevich@mephi.ru

^{##} e-mail: potanin45@yandex.ru

It is proposed the method based on the use of the Dorodnitsyn transformation for calculation of the non-isothermal laminar boundary layers on a disk rotating in a gaseous medium. An approximate account of the nonlinear inertial terms is performed by Slezkin–Targ method. It is demonstrated that upon cooling the surface of the disk-end rotating slower than the external flow, it is possible not only to weaken the radial flow of a viscous heat-conducting gas, but also to change the direction of the flow velocity in the boundary layer to the opposite one. The possibility of application of the results obtained to reduce the masking effect of the end elements in the experimental study of the stability of rotational flows as well as to control the circulation flows in closed systems are discussed.

Keywords: laminar boundary layer, rotating flow, Dorodnitsyn transformation, temperature gradient, viscosity, circulation, stability

REFERENCES

1. *Grimble T.A., Agarwal A., Juniper M.P.* Local linear stability analysis of cyclone separators // *J. Fluid Mech.*, 2017, vol. 816, pp. 507–538.
2. *Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y.* Laminated Bernard–Marangoni convection with existence of thermal exchange in accordance with the Newton–Riemann law // *Comput. Res.&Model.*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940. (in Russian)
3. *Brikh P.V., Pukhnachev V.V.* An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient // *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52.
4. *Villani S.* (Ed.) Uranium Enrichment: Springer, 1979. 315 p.
5. *Borisevich V.D., Borman V.D., Sulaberidze G.A., Tikhomirov A.V., Tokmantsev V.I.* Physical backgrounds for isotope separation in a gas centrifuge. Moscow: MEI Publ., 2011. 275 p. (in Russian)
6. *Bogovalov S.V., Borman V.D., Borisevich V.D., Tronin V.N.* Dependence of the separative power of an optimized Iguassu gas centrifuge on the velocity of rotor // *Int. J. Num. Meths. for Heat&Fluid Flow*, 2017, vol. 27, Iss. 7, pp. 1387–1394.
7. *Gorshunov N.M., Potanin E.P.* Use of High-Frequency Fields for Centrifugal Separation of Spent Nuclear Fuel // *Atomic Energy*, 2018, vol. 124, pp. 197–202.
8. *Fetterman A.J., Fisch N.J.* Wave-driven counter-current plasma centrifuge // *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2009, vol. 18, pp. 045003.
9. *Mironova M.V., Kortikov N.N.* Conjugate heat transfer on a non-isothermal rotating disc // *Thermophys.&Aeromech.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 573–578.
10. *Petrov A.G.* Mixing a viscous fluid in a layer between rotating eccentric cylinders // *JAMM*, 2008, vol. 72, iss. 5, pp. 536–549.

11. *Golubkin V.N., Markov V.V., Sizykh G.B.* The integral invariant of the equations of motion of a viscous gas // JAMM, 2015, vol. 79, iss. 6, pp. 566–571.
12. *Potantin E.P., Sosnin L.Yu., Chel'tsov A.N.* Determination of the circulation intensity in a centrifuge rotor in the enrichment of isotopic mixtures of heavy gases // Atomic Energy, 2019, vol. 127, pp. 153–158.
13. *Dorfman L.A.* Hydrodynamic Resistance and Heat Transfer of Rotating Bodies. Moscow: Phizmatgiz, 1960. 260 p. (in Russian)
14. *Dorodnitsyn A.A.* Boundary layer in compressible gas // Appl. Math.&Mech., 1942, vol. 6, iss. 6, pp. 449–486. (in Russian)
15. *Potantin E.P.* Three-dimensional gas flow in a rotating cylinder with a retarding cover // Fluid Dyn., 2013, vol. 48, iss. 1, pp. 68–76.
16. *Borisevich V.D., Potantin E.P., Whichello J.* Circulation control in MHD rotating flows // J. Fluid Mech., 2017, vol. 829, pp. 328–244.
17. *Borisevich V.D., Potantin E.P.* Mechanically driven circulation in a rotating cylinder/disk device // Europ. J. Mech. / B Fluids, 2020, vol. 82, pp. 161–167.
18. *Ram P., Kumar V.* Heat transfer in FHD boundary layer flow with temperature dependent viscosity over a rotating disk // Fluid Dyn.&Mater. Process., 2014, vol. 10, no. 2, pp. 179–196.
19. *Von Kármán T.* Über laminare und turbulente Reibung // Z. Angew. Math. Mech., 1921, vol. 1, pp. 233–252.
20. *Birikh P.V.* Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
21. *Shidlovskiy V.P.* Laminar boundary layer on an infinite disc rotating in a gas // JAMM, 1960, vol. 24, iss. 1, pp. 221–226.
22. *Targ S.M.* The Main Problems in the Theory of Laminar Flows. Leningrad: GIFML, 1951. 420 p.
23. *Timofeev A.V.* On the stability of the Sydem modes of an inhomogeneously rotating plasma // Plasma Phys., 2010, vol. 36, iss. 8, pp. 779–785. (in Russian)
24. *Balbus S.A., Terquem C.* Linear analysis of the Hall effect in protostellar disks // Astrophys. J., 2001, vol. 552, pp. 235–247.
25. *Khalzov I.V., Smolyakov A.I., Ilgisonis V.I.* Equilibrium magnetohydrodynamic flows of liquid metals in magnetorotational instability experiments // J. Fluid Mech., 2010, vol. 644, pp. 257–280.
26. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philos. Trans. Royal Soc. London, 1923, ser. A, vol. 223, pp. 289–343.