

УДК 532.533.2

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
ПЕРЕНОСА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**© 2021 г. М. А. Брутян<sup>1,2,\*</sup>, У. Г. Ибрагимов<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup> *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия*<sup>2</sup> *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*\*e-mail: [murad.brutyanyan@tsagi.ru](mailto:murad.brutyanyan@tsagi.ru)\*\*e-mail: [umar.ibragimov@phystech.edu](mailto:umar.ibragimov@phystech.edu)

Поступила в редакцию 18.05.2021 г.

После доработки 24.08.2021 г.

Принята к публикации 10.09.2021 г.

Рассматривается течение вязкого сжимаемого газа, истекающего из вершины плоского клина. Для случая теплоизолированных стенок установлена возможность построения автомодельных решений при произвольной зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Полученные аналитические решения сравниваются с найденными ранее автомодельными решениями при постоянных коэффициентах переноса. Для течений газа в микродиффузорах проведено сравнение полученных автомодельных решений с результатом эксперимента других авторов.

*Ключевые слова:* точные решения, уравнения Навье–Стокса, течения вязкого газа

**DOI:** 10.31857/S0032823521060047

**1. Введение.** Начиная со второй половины 20 века, во всем мире наблюдается повышенный интерес к исследованиям течений жидкости и газа в “микроустройствах”, которые используются в различных технических изделиях, например в струйных принтерах [1–3], а также в целом ряде медицинских и химических технологических процессах, таких как газовая хроматография [4–6]. К такого рода микроустройствам относятся датчики течения, клапаны регуляризации давления, сепараторы, химические датчики и др. Экспериментально и на основе инженерного подхода изучаются [7, 8] течения в микродиффузорах.

Впервые автомодельные решения уравнений Навье–Стокса для течения вязкого сжимаемого газа от источника массы в плоских и осесимметричных конических диффузорах теоретически изучались в работах [9–12]. Рассматривается [9] осесимметричное течение в конусе с непроницаемыми стенками и условием скольжения для скорости и температуры на стенке. Изучались [10–12] течения в осесимметричных и плоских каналах с массоотводом газа на стенке.

Для несжимаемых течений [13] дано описание широкого класса известных и новых точных решений уравнений Навье–Стокса, в частности известного решения Джеффри–Гамеля для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре.

Рассмотрено [14, 15] течение в клине при условии адиабатической стенки и показано, что автомодельные решения, удовлетворяющие условию сплошной среды, реализуются в каналах с малыми углами раствора. Число Рейнольдса на оси клина при этом оказывается небольшим, что соответствует течениям сильно разреженного газа либо

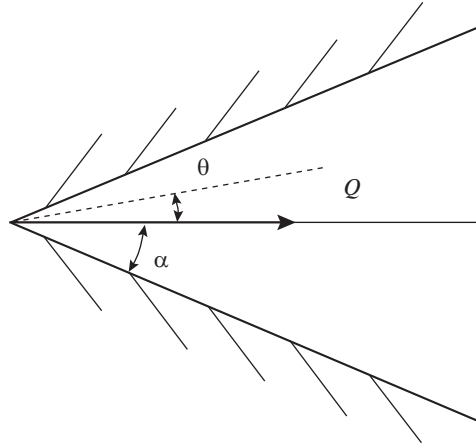


Рис. 1. Схема течения в плоском клине.

течениям газа в микроканалах при нормальных условиях. Найдены [15] аналитические решения для течения в плоском канале с коэффициентами динамической вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\kappa$ , зависящими от температуры по степенному закону Фроста ( $\eta, \kappa \propto T^k$ ). Рассмотрено [16] аналогичное автомодельное течение вязкого сжимаемого газа от струи (источника импульса), истекающей в область между двумя расходящимися стенками.

В настоящей работе получено точное автомодельное решение уравнений движения вязкого теплопроводного газа в плоском клиновидном канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры. Найденные аналитические решения сравниваются с полученными ранее решениями для степенной зависимости коэффициентов переноса от температуры. Для течений газа в микродиффузорах проведено сравнение полученных автомодельных решений с экспериментом других авторов.

**2. Автомодельные течения.** Рассмотрим течение вязкого газа, истекающего из вершины плоского клина, рис. 1.

Уравнения движения в полярных координатах  $(r, \theta)$  имеют вид [17]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \tag{2.2}$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right] \tag{2.3}$$

$$\frac{\rho u}{(\gamma - 1) M_0^2} \frac{\partial T}{\partial r} = u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{(\gamma - 1) M_0^2 \text{Pr} \text{Re}_0} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \frac{\ln}{2} (\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2) + \epsilon_{r\theta}^2 \eta - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right] \tag{2.4}$$

Течение предполагается радиальным,  $\mathbf{V} = (u, 0)$ . В уравнениях (2.1)–(2.4) безразмерные переменные связаны с размерными газодинамическими параметрами, помеченными звездочкой, следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 u_0^2}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{\eta_0},$$

где  $\rho_0, u_0, T_0$  – соответственно плотность, скорость и температура в некоторой точке  $(r_0, 0)$  на оси клина. Газ считается совершенным, так что  $\gamma M_0^2 p = \rho T$ . Стенки канала предполагаются теплоизолированными.

Компоненты тензора вязких напряжений  $\sigma$  и тензора скоростей деформации  $\varepsilon$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \eta \varepsilon_{rr} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V}, & \sigma_{\theta\theta} &= \eta \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V}, & \sigma_{r\theta} &= \eta \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rr} &= 2 \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{2u}{r} \end{aligned}$$

В уравнения (2.1)–(2.4) входят параметры подобия: число Маха  $M_0$ , число Рейнольдса  $Re_0$  и число Прандтля  $Pr$ , которые вычисляются следующим образом:

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 r_0}{\eta_0}, \quad M_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}, \quad Pr = \frac{c_p \eta_0}{\kappa_0}$$

Автомодельное решение уравнений (2.1)–(2.4) ищем в виде:

$$\rho = \frac{\rho(\theta)}{r}, \quad p = \frac{p(\theta)}{r}, \quad u = u(\theta), \quad T = T(\theta), \quad \eta = \eta(\theta), \quad \kappa = \kappa(\theta) \quad (2.5)$$

Тогда уравнение неразрывности (2.1) выполняется автоматически, а определяющие уравнения (2.2)–(2.4) можно переписать в следующем виде:

$$Re_0 p - \frac{4}{3} u \eta + \frac{d}{d\theta} \left( \eta \frac{du}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$Re_0 \frac{dp}{d\theta} = \eta \frac{du}{d\theta} + \frac{4}{3} \frac{d}{d\theta} (\eta u) \quad (2.7)$$

$$Re_0 u p = \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2 Pr} \frac{d}{d\theta} \left( \eta \frac{dT}{d\theta} \right) + \eta \left[ \frac{4}{3} u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

с граничными условиями прилипания на теплоизолированной стенке:

$$u(\pm\alpha) = 0, \quad \left. \frac{dT}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

Течение будем предполагать симметричным относительно оси клина:

$$\left. \frac{du}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{dT}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad (2.10)$$

Из условия нормировки для параметров течения на оси клина при  $\theta = 0$  имеем:

$$u(0) = 1, \quad T(0) = 1, \quad p(0) = \frac{1}{\gamma M_0^2} \quad (2.11)$$

Продифференцируем уравнение (2.6) по  $\theta$  и вычтем полученное выражение из уравнения (2.7). В результате приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \eta \frac{du}{d\theta} \right) + \eta \frac{du}{d\theta} = 0,$$

решение которого, с учетом условий симметрии (2.10) имеет вид:

$$\eta \frac{du}{d\theta} = \tau_0 \sin \theta, \quad (2.12)$$

где  $\tau_0$  – некоторая константа. Из уравнений (2.6) и (2.12) находим выражение для давления:

$$\text{Re}_0 p = \frac{4}{3} \eta u - \tau_0 \cos \theta \quad (2.13)$$

откуда, используя условия (2.11), находим неизвестную константу  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) в уравнение энергии (2.8), имеем:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{d}{d\theta} \left( \eta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{du}{d\theta} \tau_0 \sin \theta + \tau_0 u \cos \theta$$

Интегрируя полученное выражение по  $\theta$  с учетом симметрии находим:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + u \tau_0 \sin \theta$$

Подставляя вместо выражения  $\tau_0 \sin \theta$  соответствующее выражение из формулы (2.12), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно скорости и температуры:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + \eta \frac{du}{d\theta} u,$$

которое с учетом граничных условий (2.9) легко интегрируется:

$$T = 1 + \frac{1 - u^2}{2} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1) \quad (2.15)$$

Формула (2.15) дает зависимость температуры от скорости,  $T = T(u)$ . Тогда уравнение (2.12) с учетом (2.14) может быть решено в квадратурах. Окончательно получаем:

$$\int_0^u \eta(U) dU = \left( \frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \right) (\cos \alpha - \cos \theta) \quad (2.16)$$

Заметим, что в силу условий нормировки (2.11) должно выполняться условие:

$$\int_0^1 \eta(U) dU = \left( \frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \right) (\cos \alpha - 1), \quad (2.17)$$

из которого находится связь между безразмерными параметрами  $\text{Re}_0$  и  $M_0$ :

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_0^1 \eta(U) dU \right) \quad (2.18)$$

В случае  $\eta = \text{const}$ , формула (2.18) приобретает вид конечного соотношения:

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \right), \quad (2.19)$$

а в случае произвольной степенной зависимости  $\eta = T^k$  она принимает следующую форму:

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} \int_0^1 \left( 1 + \frac{1-U^2}{2} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1) \right)^k dU \right) \quad (2.20)$$

Заметим, что формулы (2.19) и (2.20) совпадают с соответствующими формулами, полученными ранее в работе [15], в которой изначально предполагалась степенная зависимость коэффициентов переноса от температуры [18, 19]. Отметим также, что число Кнудсена  $\text{Kn} = M_0/\text{Re}_0$ , как следует из формулы (2.18), имеет порядок  $\text{Kn} \propto 1/\gamma M_0 f(\alpha)$ , где  $f(\alpha)$  меняется от некоторого конечного значения  $4/3 + \int_0^1 \eta(U) dU$  при  $\alpha = \pi/2$  до бесконечности при  $\alpha \rightarrow 0$ . Откуда можно сделать вывод, что для течений в микродиффузорах при умеренных числах  $M_0$  условие сплошной среды,  $\text{Kn} \ll 1$ , выполняется.

**3. Результаты расчетов параметров течения газа в плоском канале для различных зависимостей коэффициентов переноса от температуры.** Рассмотрим течение воздуха, для которого число Прандтля  $\text{Pr}$  при нормальных условиях приблизительно равно 0.71. Сравним полученные нами автомодельные решения для двух различных моделей газа:

1. модель газа с постоянными коэффициентами переноса:  $\eta, \kappa = \text{const}$ ;
2. модель газа с коэффициентами переноса, зависящими от температуры по более близкому к реальности закону Сазерленда [20].

Точное решение уравнений Навье–Стокса для течений Куэтта и Пуазейля горячего газа с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры по закону Сазерленда, получено в недавних работах [21, 22].

Как отмечалось выше, в первом случае задача допускает аналитическое решение, полученное ранее в работе [15]. Ниже исследуется автомодельное решение для принятого на практике закона Сазерленда, который в безразмерной форме при  $\eta_0 = 18.27 \times 10^{-6}$  Па с и  $T_0 = 291.15$  К записывается в следующем виде:

$$\eta(T) = \frac{1 + 120/291.15}{T + 120/291.15} T^{3/2} \quad (3.1)$$

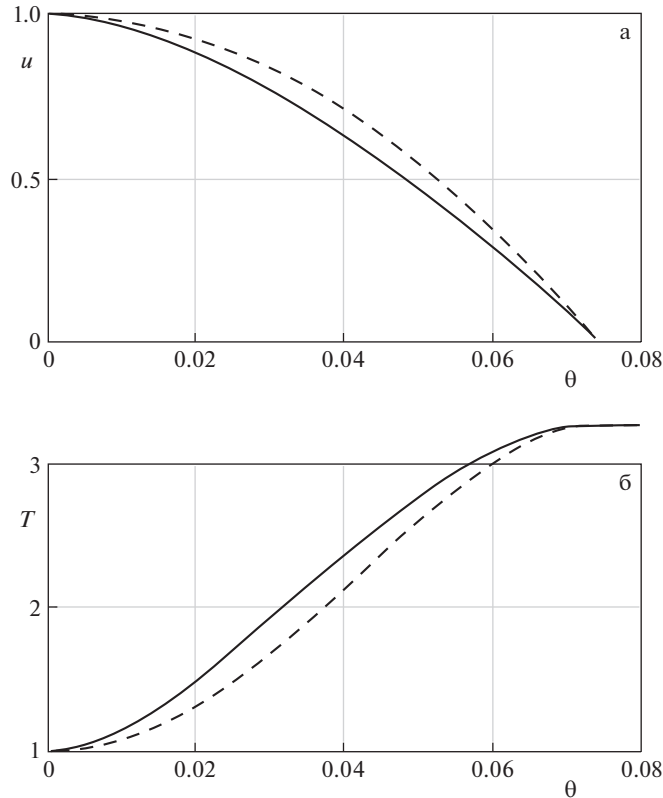
Проведенные по формулам (2.16), (2.17) расчеты течений воздуха в микродиффузорах показали, что при малых и умеренных числах  $M_0$  автомодельные решения для различных зависимостей  $\eta = \eta(T)$  практически совпадают. Заметные отличия появляются при числах  $M_0 > 2$ . На рис. 2а и 2б, представлены сравнения профилей скорости  $u = u(\theta)$  и температуры  $T = T(\theta)$  при  $M_0 = 4$  для различных зависимостей  $\eta = \eta(T)$ .

Значение полуугла раствора клина  $\alpha = 0.074$  рад выбрано таким же, как в работе [23], где экспериментально изучалось течение воздуха в микроканале.

На рис. 3 приведена зависимость числа  $\text{Re}_0$  от числа  $M_0$  на оси симметрии клина для различных законов  $\eta = \eta(T)$ .

Из представленных на рис. 3 зависимостей видно, что для клина с полууглом раствора  $\alpha = 0.074$  рад, автомодельные режимы течения при  $M_0 \propto 1$  реализуются при  $\text{Re}_0 \propto 500$  как для газа с постоянными коэффициентами переноса, так и для газа “Сазерленда”. Из определения числа Рейнольдса  $\text{Re}_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$  следует, что при нормальных условиях ( $T \propto 300$  К,  $p \propto 100$  кПа) автомодельное течение реализуется в клине длиной  $r_0 \propto 10^{-4}$ , которая характерна для микроканалов [23].

Ранее [7, 8, 23] рассматривались течения в плоских и осесимметричных микроканалах. В частности [23], экспериментально и численно исследуется течение в плоском микродиффузоре при различных значениях давления в выходном сечении канала.



**Рис. 2.** Профили скорости а) и температуры б); сплошная линия – формула Сазерленда, пунктирная линия –  $\eta = 1$ .

Схема канала показана на рис. 4, размеры даны в мкм. Стенки канала выполнены из полимерного материала с низкой теплопроводностью, поэтому в численном расчете, основанном на решении уравнений Навье–Стокса, на границах канала ставилось условие прилипания и условие теплоизолированной стенки.

Согласно расчетным и экспериментальным данным [23], в наиболее узкой части канала (см. рис. 4) давление и температура имели значения:  $p \approx 40$  кПа и  $T \approx 245$  К.

Представим число Рейнольдса  $Re_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$  в следующей форме:

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 r_0}{\eta_0} = \frac{\rho_0 a_0^2 r_0}{\eta_0} M_0 \approx 1500 M_0 \tag{3.2}$$

Тогда с учетом формулы (2.18) данное выражение принимает вид:

$$1500 M_0 = \gamma M_0^2 \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} \int \eta(U) dU \right)$$

Решая полученное уравнение с учетом зависимости  $\eta = \eta(T)$ , рассчитываемой по формуле Сазерленда (3.1), из соотношения (3.2) находим значение числа  $Re_0 \approx 3300$ . Оценим теперь расход газа  $Q$  по формуле:

$$Q = r_0 D \rho_0 u_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\theta) u(\theta) d\theta = D \mu_0 Re_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\theta) u(\theta) d\theta, \tag{3.3}$$

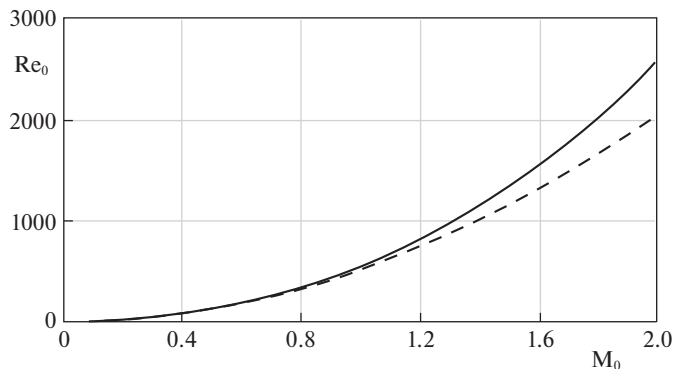


Рис. 3. Зависимость числа  $Re_0$  от числа  $M_0$  на оси симметрии; сплошная линия – формула Сазерленда, пунктирная линия –  $\eta = 1$ .

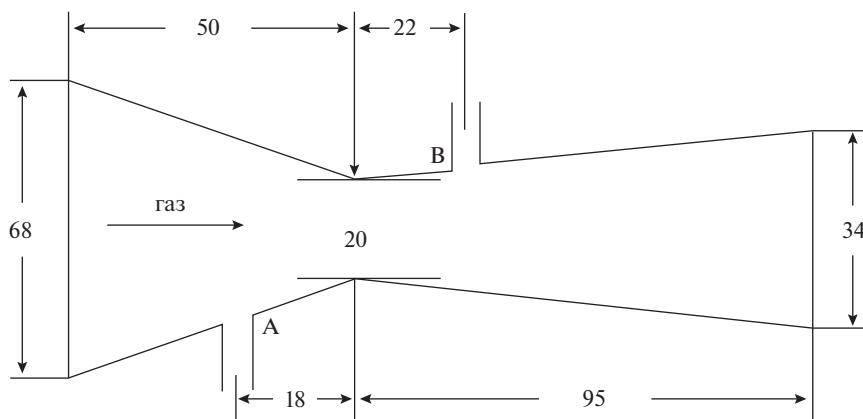


Рис. 4. Схема течения внутри микроканала.

где  $D$  – ширина поперечного сечения канала. При значениях  $Re_0 \approx 3300$  и  $D = 120$  мкм, получаем:  $Q \approx 2.5 \times 10^{-4}$  г/с, что по порядку величины согласуется с экспериментальным значением [23]:  $Q \approx 3.8 \times 10^{-4}$  г/с. Некоторое отличие расхода, рассчитанного с помощью полученного в настоящей работе автомодельного решения от экспериментального значения можно объяснить тем, что в работе [23] газ в диффузор конечной длины попадает из входного сечения конечного размера, в то время как в автомодельном решении газ истекает из точечного источника в канал бесконечной длины.

**Заключение.** Установлена возможность построения автомодельных решений для течения вязкого сжимаемого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры. При  $\eta = \text{const}$  и  $\eta = T^k$  найденные аналитические решения согласуются с полученными ранее [15].

Для течения воздуха в микроканале проведено сравнение автомодельных решений для двух различных зависимостей коэффициента вязкости от температуры:  $\eta = \text{const}$

и  $\eta$ , рассчитанной по формуле Сазерленда. Оказалось, что существенные различия начинают проявляться при значениях числа Маха на оси клина  $M_0 > 2$ .

Проведенные численные расчеты автомодельных решений сравниваются с экспериментальными данными [23]. Показано что расход газа  $Q$  в микроканале, рассчитанный по формуле (3.3), удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bassous E., Taub H.H., Kuhn L. Ink jet printing nozzle arrays etched in silicon // Appl. Phys. Lett. 1977. V. 31. P. 135–137.
2. Petersen K.E. Fabrication of an integrated planar silicon ink-jet structure // IEEE Trans. Electron Devices. 1979. V. 26. P. 1918–1920.
3. Petersen K.E. Silicon as a mechanical material // Proc. IEEE. 1983. V. 70. P. 420–457.
4. Terry S.C., Jerman J.H., Angell J.B. A gas chromatographic air analyzer fabricated on a silicon wafer // IEEE Trans. Electron Devices. 1979. V. 26. P. 1880–1886.
5. Tuckerman D.B., Pease R.F.W. High-performance heat sinking for VLSI // IEEE Electron Device Lett. 1981. V. 2. P. 126–129.
6. Zdeblick M.J., Barth P.W., Angell J.A. Microminiature fluidic amplifier // Sensors&Actuators. 1988. V. 15. P. 427–433.
7. Jiang X.N., Zhou Z.Y., Huang X.Y., Li Y., Yang Y., Liu C.Y. Micronozzle/diffuser flow and its application in micro valveless pumps // Sensors&Actuation. 1998. V. 70. P. 81–87.
8. Li Xiu-Han, Yu Xiao-Mei, Zhang Da-Cheng, Cui Hai-Hang, Li Ting, Wang Ying, Wang Yang-Yuan. Characteristics of gas flow within a micro diffuser/nozzle pump // Chin. Phys. Lett. 2006. V. 23. № 5. P. 1230–1233.
9. Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA J. 1967. V. 5. № 12. P. 2128–2134.
10. Быркин А.П. О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Вып. 1. № 6. С. 15–21.
11. Быркин А.П. Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 152–157.
12. Быркин А.П., Межиров И.И. О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. Вып. 1. С. 100–105.
13. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретич. основы химич. технол. 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
14. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автомодельные турбулентные течения вязкого газа в клине // Труды МФТИ. 2020. Вып. 12. № 3. С. 141–149.
15. Брутян М.А. Автомодельные решения типа Джеффери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2017. Вып. XLVIII. № 6. С. 13–22.
16. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // ПММ. 2018. Вып. 82. № 5. С. 644–656.
17. Probst R.F., Kemp N.H. Viscous Aerodynamic Characteristics in Hypersonic Rarefied Gas Flow // J. Aerosp. Sci. 1960. V. 27. № 3. P. 174–192.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
19. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
20. Sutherland W. LII. The viscosity of gases and molecular force // The London, Edinburgh&Dublin Philos. Mag.&J. Sci. 1893. V. 36. № 223. P. 507–531.
21. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О сжимаемом течении Куэтта // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Вып. 49. № 1. С. 27–38.
22. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Вып. 24. № 2 С. 365–378.
23. Hao P.F., Ding Y.T., Yao Z.H., He F., Zhu K.Q. Size effect on gas flow in micro nozzles // J. Micro-mech. Microeng. 2005. V. 15. P. 2069–2073.



## Two-Dimensional Self-Similar Flow in a Channel of Viscous Gas with Transfer Coefficients Arbitrarily Depending on Temperature

M. A. Brutyan<sup>a,b,#</sup> and U. G. Ibragimov<sup>b,##</sup>

<sup>a</sup> Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

<sup>b</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

<sup>#</sup>e-mail: [murad.brutyan@tsagi.ru](mailto:murad.brutyan@tsagi.ru)

<sup>##</sup>e-mail: [umar.ibragimov@phystech.edu](mailto:umar.ibragimov@phystech.edu)

Two-dimensional flow of viscous compressible gas from source in an apex of wedge is considered. In case of adiabatic walls and transfer coefficients arbitrarily depending on temperature possibility of self-similar solutions is established. New analytical solutions are compared with previous solutions for a gas with constant transfer coefficients. Self-similar flow in micro-nozzles is compared with experimental results of other authors.

**Keywords:** exact solutions, Navier–Stokes equations, viscous gas flow

### REFERENCES

1. Bassous E., Taub H.H., Kuhn L. Ink jet printing nozzle arrays etched in silicon // *Appl. Phys. Lett.*, 1977, vol. 31, pp. 135–137.
2. Petersen K.E. Fabrication of an integrated planar silicon ink-iet structure // *IEEE Trans. Electron Devices*, 1979, vol. 26, pp. 1918–1920.
3. Petersen K.E. Silicon as a mechanical material // *Proc. IEEE*, 1983, vol. 70, pp. 420–457.
4. Terry S.C., Jerman J.H., Angell J.B. A gas chromatographic air analyzer fabricated on a silicon wafer // *IEEE Trans. Electron Devices*, 1979, vol. 26, pp. 1880–1886.
5. Tuckerman D.B., Pease R.F.W. High-performance heat sinking for VLSI // *IEEE Electron Device Lett.*, 1981, vol. 2, pp. 126–129.
6. Zdeblick M.J., Barth P.W., Angell J.A. Microminiature fluidic amplifier // *Sensors&Actuators*, 1988, vol. 15, pp. 427–433.
7. Jiang X.N., Zhou Z.Y., Huang X.Y., Li Y., Yang Y., Liu C.Y. Micronozzle/diffuser flow and its application in micro valveless pumps // *Sensors&Actuation*, 1998, vol. 70, pp. 81–87.
8. Li Xiu-Han, Yu Xiao-Mei, Zhang Da-Cheng, Cui Hai-Hang, Li Ting, Wang Ying, Wang Yang-Yuan. Characteristics of gas flow within a micro diffuser/nozzle pump // *Chin. Phys. Lett.*, 2006, vol. 23, no. 5, pp. 1230–1233.
9. Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // *AIAA J.*, 1967, vol. 5, no. 12, pp. 2128–2134.
10. Byrkin A.P. Concerning exact solutions of the Navier–Stokes equations for compressible gas flow in channels // *Uch. Zap. TsAGI*, 1970, vol. 1, no. 6, pp. 15–21. (in Russian)
11. Byrkin A.P. Exact solution op the Navier–Stokes equations for a compressible gas // *JAMM*, 1969, vol. 33, iss. 1. pp. 152–157.
12. Byrkin A.P., Mezhirov I.I. Concerning some exact solution of viscous compressible gas flow in a channel // *Fluid Dyn.*, 1969, vol. 1, pp. 100–105. (in Russian)
13. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyinin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. (in Russian)
14. Brutyan M.A., Ibragimov U.G. Self-similar turbulent flow of viscous gas in a wedge // *Proc. MIPT*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 141–149. (in Russian)
15. Brutyan M.A. Self-similar solutions of Jeffrey–Gamel type for compressible viscous gas flow // *Uch. Zap. TsAGI*, 2017, vol. XLVIII, no. 6, pp. 13–22 (in Russian)
16. Brutyan M.A., Krapivsky P.I. Exact solutions of the stationary Navier–Stokes equations of a viscous heat-conducting gas for a flat jet from a linear source // *PMM*, 2018, vol. 82, iss. 5, pp. 644–656. (in Russian)

17. *Probstein R.F., Kemp N.H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J. Aerosp. Sci., 1960, vol. 27, no. 3, pp. 174–192.
18. *Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P.* Physical Kinetics. Moscow: Nauka, 1979. 527 p. (in Russian)
19. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1991. 448 p.
20. *Sutherland W. LII.* The viscosity of gases and molecular force // London, Edinburgh & Dublin Philos. Mag. & J. Sci., 1893, vol. 36, no. 223, pp. 507–531.
21. *Golubkin V.N., Silykh G.B.* Concerning compressible Couette flow // Uch. Zap. TsAGI, 2018, vol. 49, no. 1, pp. 27–38. (in Russian)
22. *Khorin A.N., Konyukhova A.A.* Couette flow of hot viscous gas // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378.
23. *Hao P.F., Ding Y.T., Yao Z.H., He F., Zhu K.Q.* Size effect on gas flow in micro nozzles // J. Micro-mech. Microeng., 2005, vol. 15, pp. 2069–2073.