ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 6, с. 772–778

УДК 532.5 + 539.3

К 70-летию со дня рождения
Евгения Николаевича Чумаченко (1951–2015)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ТРЕХОСНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ОБЖАТИЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2021 г. Д. В. Георгиевский[1,2,3,*]

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.
После доработки 26.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

Рассматривается обратная задача механики сплошной среды, в которой по заданной кинематике течения однородного несжимаемого материала во всем трехмерном пространстве требуется определить силовые режимы, обеспечивающие согласно уравнениям движения и выбранным определяющим соотношениям такую кинематику. Принятый закон движения частиц состоит из трех временны́х этапов, на каждом из которых соответствует сжатию в одном направлении и растеканию среды в двух других. При этом плоскости, которые были параллельны декартовым координатным плоскостям до деформации, остаются параллельны им в любой момент процесса. Это дает возможность поставить задачу о последовательном трехосном обжатии параллелепипеда и его переводе из начального положения в заданное конечное. Находятся возможные кинематические и силовые режимы для реализации данного перевода.

Ключевые слова: течение, растяжение, сжатие, трехосное динамическое обжатие, параллелепипед, закон движения, траектории частиц

DOI: 10.31857/S0032823521060060

В конце 80-х годов прошлого столетия в связи с интенсивным развитием теории определяющих соотношений в сверхпластичности и образованием в Уфе Института проблем сверхпластичности металлов А.А. Ильюшин обратил внимание на ряд важных технологических задач обработки материалов с деформациями от нескольких сот до тысячи процентов, в которых моделирование могло бы проводиться на основе деформационного подхода в рамках лагранжева описания. За последующие десятилетия в разных научных группах и школах были достигнуты большие успехи на пути такого моделирования [1–5]. К числу упомянутых задач относилось последовательное многократное обжатие параллелепипеда в разных ортогональных направлениях с целью придания ему наперед заданной формы.

Ниже такая задача исследуется в динамической постановке как обратная задача механики. По заданной кинематике, соответствующей на каждом временно́м этапе сжатию в одном направлении и растеканию в двух других, в рамках широкого класса определяющих соотношений (тензорно линейные среды) находятся силы, которые необходимо приложить к граням параллелепипеда для реализации процесса.

1. Кинематика, соответствующая последовательному трехосному растяжению–сжатию пространства. Рассмотрим течение несжимаемой однородной плотности ρ среды во всем трехмерном пространстве с декартовой системой координат $(Ox_1x_2x_3)$ на отрезке времени $0 \le t \le T$, состоящем из трех частей:

$$\Delta_1 = \{0 \le t \le t_1\}, \quad \Delta_2 = \{t_1 \le t \le t_1 + t_2\}, \quad \Delta_3 = \{t_1 + t_2 \le t \le t_1 + t_2 + t_3 = T\} \tag{1.1}$$

Пусть в рамках эйлерова описания движения декартовы компоненты вектора скорости являются следующими функциями координат и времени:

$$v(x,t) = \begin{cases} (-c_1x_1, c_1x_2/2, c_1x_3/2), & t \in \Delta_1 \\ (c_2x_1/2, -c_2x_2, c_2x_3/2), & t \in \Delta_2 \\ (c_3x_1/2, c_3x_2/2, -c_3x_3), & t \in \Delta_3 \end{cases}, \tag{1.2}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ – некоторые положительные непрерывно-дифференцируемые функции времени, определенные каждая на своем отрезке. Как видно, несжимаемость в соотношениях (1.2) соблюдена. Трехстрочную запись (1.2) можно представить одной строкой:

$$v_\alpha = -c_\alpha x_\alpha, \quad v_\beta = \frac{c_\beta x_\beta}{2}, \quad v_\gamma = \frac{c_\gamma x_\gamma}{2}; \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{1.3}$$

Здесь и далее принимаются следующие соглашения в обозначениях: а) по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится; б) разные греческие индексы соответствуют разным числовым значениям; в) тройки индексов (α, β, γ) в одной группе соотношений, как в (1.3), – три четные подстановки набора (1, 2, 3); г) запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Из эйлерова поля скорости (1.2), начальных условий $x_i(0) = \xi_i$ и требования непрерывности траекторий частиц при $0 \le t \le T$ можно вывести закон движения лагранжевых частиц во всем пространстве:

$$\begin{gathered} x_1 = \xi_1 e^{-C_1(t)}, \quad x_2 = \xi_2 e^{C_1(t)/2}, \quad x_3 = \xi_3 e^{C_1(t)/2}; \quad t \in \Delta_1 \\ x_1 = \xi'_1 e^{C_2(t)/2}, \quad x_2 = \xi'_2 e^{-C_2(t)}, \quad x_3 = \xi'_3 e^{C_2(t)/2}; \quad t \in \Delta_2 \\ x_1 = \xi''_1 e^{C_3(t)/2}, \quad x_2 = \xi''_2 e^{C_3(t)/2}, \quad x_3 = \xi''_3 e^{-C_3(t)}; \quad t \in \Delta_3, \end{gathered}$$

где $\xi'_i = x_i(t_1)$, $\xi''_i = x_i(t_1 + t_2)$,

$$C_1(t) = \int_0^t c_1(\tau)d\tau, \quad C_2(t) = \int_{t_1}^t c_2(\tau)d\tau, \quad C_3(t) = \int_{t_1+t_2}^t c_3(\tau)d\tau \tag{1.5}$$

Отметим, что поле скорости (1.2) разрывно в моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$, при этом фазами торможений и перестроек с одной строки (1.2) на следующую пренебрегается. Соответственно траектории частиц (1.4) непрерывны, но имеют изломы в два указанных момента времени.

Согласно закону движения (1.4) состоящие из лагранжевых частиц плоскости, которые были параллельны координатным плоскостям в начальный момент времени, движутся параллельно самим себе и, следовательно, остаются параллельны координатным плоскостям неподвижной системы координат $(Ox_1x_2x_3)$. Это, в частности, означает, что частицы, принадлежавшие при $t = 0$ параллелепипеду Ω_0 со сторонами $2l_{10} \times 2l_{20} \times 2l_{30}$ (линейные размеры l_{10}, l_{20} и l_{30} произвольны):

$$\Omega_0 = \{|\xi_1| < l_{10}, |\xi_2| < l_{20}, |\xi_3| < l_{30}\} \tag{1.6}$$

остаются в процессе деформирования внутри параллелепипеда Ω_t со сторонами $2l_1(t)\times 2l_2(t)\times 2l_3(t)$:

$$\Omega_t = \{|x_1| < l_1(t), |x_2| < l_2(t), |x_3| < l_3(t)\} \tag{1.7}$$

вплоть до $t = T$, когда

$$\Omega_T = \{|x_1| < l_{1T} = \kappa_1 l_{10}, |x_2| < l_{2T} = \kappa_2 l_{20}, |x_3| < l_{3T} = \kappa_3 l_{30}\} \tag{1.8}$$

В силу непрерывности траекторий функции $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ непрерывны по t и $l_i(0) = l_{i0}$, $l_i(T) = l_{iT}$, $i = 1, 2, 3$. Постоянство объема Ω_t, следующее из несжимаемости среды, приводит к равенствам

$$l_1 l_2 l_3 \equiv l_{10} l_{20} l_{30} = l_{1T} l_{2T} l_{3T}, \quad \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = 1 \tag{1.9}$$

Можно ли так подобрать функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ и моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$ из интервала $(0, T)$, чтобы в результате последовательных обжатий в трех направлениях параллелепипед Ω_0 (1.6) деформировался в Ω_T (1.8) к моменту T? Используя закон движения (1.4), можно утверждать, что для этого необходимо и достаточно выполнение системы неоднородных линейных уравнений относительно $C_1(t_1)$, $C_2(t_1 + t_2)$, $C_3(T)$:

$$\begin{aligned}
-C_1(t_1) + \frac{1}{2}C_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}C_3(T) &= \ln\kappa_1 \\
\frac{1}{2}C_1(t_1) - C_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}C_3(T) &= \ln\kappa_2 \\
\frac{1}{2}C_1(t_1) + \frac{1}{2}C_2(t_1 + t_2) - C_3(T) &= \ln\kappa_3
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Данная система вырождена, но совместна благодаря условиям (1.9). Ее общее решение выглядит следующим образом:

$$C_1(t_1) = C_2(t_1 + t_2) - \frac{2}{3}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = C_3(T) - \frac{2}{3}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \tag{1.11}$$

или с учетом (1.5) в терминах функций $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$:

$$\int_0^{t_1} c_1(t)dt = \int_{t_1}^{t_1+t_2} c_2(t)dt - \frac{2}{3}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \int_{t_1+t_2}^{T} c_3(t)dt - \frac{2}{3}\ln\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \tag{1.12}$$

Тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{v} = (\operatorname{Grad}\mathbf{v} + (\operatorname{Grad}\mathbf{v})^{\mathrm{T}}))/2$, построенный по полю вектора $\mathbf{v}$ (1.2), на всем временно́м отрезке $[0;T]$ диагонален, явно зависит от t и не зависит от x, что говорит о существенной нестационарности и однородности по пространству деформационной картины:

$$v_{\alpha\alpha} = -c_\alpha(t), \quad v_{\beta\beta} = v_{\gamma\gamma} = \frac{c_\alpha(t)}{2}; \quad t\in\Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{1.13}$$

Интенсивность скоростей деформаций

$$v_u = \sqrt{v_{ij}v_{ij}} = \sqrt{v_{\alpha\alpha}^2 + v_{\beta\beta}^2 + v_{\gamma\gamma}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}c_\alpha(t); \quad t\in\Delta_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{1.14}$$

с точностью до коэффициента на каждом отрезке времени Δ_α совпадает с функциями $c_\alpha(t)$, входящими в эйлеров закон движения (1.2). Это указывает на их физический смысл. Условия (1.12) означают, что проинтегрированные интенсивности скоростей деформаций на трех рассматриваемых временны́х промежутках должны отличаться друг от друга на известные величины, определяемые лишь размерами параллелепипедов Ω_0 и Ω_T.

2. Уравнения движения и напряженное состояние. Будем считать, что равенства (1.12) выполнены, т.е. остановимся на имеющей важное значение в технологии обработки материалов задаче о последовательном обжатии тела в разных направлениях. При этом вместо всего пространства ограничимся областью Ω_t (1.7) с неизвестными границами $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ (известны их начальные и конечные значения, т.е. области Ω_0 (1.6) и Ω_T (1.8)). Как это принято в механике, окружающую параллелепипед Ω_t среду заменим силами (также пока неизвестными), действующими на его шести гранях со стороны среды.

Остановимся на силовых режимах, обеспечивающих описанную в разд. 1 кинематику деформирования параллелепипеда Ω_t, и в первую очередь на сопровождающем такую кинематику напряженном состоянии. Представим компоненты $\sigma_{ij}(x,t)$ тензора напряжений Коши в виде суммы девиаторной и шаровой частей:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij}, \tag{2.1}$$

где $p(x,t)$ – давление в несжимаемой среде, а $s_{ij}(x,t)$ – компоненты девиатора, выражающиеся с помощью выбранных тем или иным способом определяющих соотношений через компоненты тензора $\underset{\sim}{v}(x,t)$. Сохраняя общность в выборе этих соотношений и не конкретизируя тем самым среду, заметим, что поскольку $\underset{\sim}{v}$ не зависит от координат, то $\underset{\sim}{s}$ также от них не зависит, т.е. $\underset{\sim}{s} \equiv 0$. Уравнения движения, таким образом, значительно упрощаются:

$$-p_{,\alpha} = \rho\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_{\alpha,\alpha}v_\alpha\right); \quad \alpha = 1,2,3 \tag{2.2}$$

Подстановка в (2.2) скоростей (1.3) приводит к системе уравнений для давления $p(x,t)$, имеющей общее решение:

$$p = p_0(t) + \frac{\rho}{2}\left(\dot{c}_\alpha - c_\alpha^2\right)x_\alpha^2 - \frac{\rho}{8}\left(2\dot{c}_\alpha + c_\alpha^2\right)\left(x_\beta^2 + x_\gamma^2\right); \quad t \in \Delta_\alpha \tag{2.3}$$

Оно включает произвольную функцию времени $p_0(t)$, по смыслу представляющую собой давление в центре деформируемого параллелепипеда.

Кинематика (1.3) такова, что на каждом из трех этапов в одном из направлений происходит сжатие параллелепипеда, а в двух других растекание. Из технологических соображений, вызванных стремлением к равнонапряженности состояния по отношению к пространственным координатам, исследуем подробно режим, при котором в каждый момент времени давление на двух противоположных сжимаемых гранях постоянно на всей поверхности этих граней. Из (2.3) следует, что тогда функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$2\dot{c}_1 + c_1^2 = 0, \quad 2\dot{c}_2 + c_2^2 = 0, \quad 2\dot{c}_3 + c_3^3 = 0 \tag{2.4}$$

с решениями

$$c_\alpha = \frac{2}{t + \tau_\alpha}; \quad \alpha = 1,2,3, \quad \tau_1 > 0, \quad \tau_2 > -t_1, \quad \tau_3 > -(t_1 + t_2), \tag{2.5}$$

которые содержат произвольные постоянные τ_1, τ_2 и τ_3, удовлетворяющие выписанным неравенствам. Согласно (1.5)

$$C_1 = 2\ln\frac{t + \tau_1}{\tau_1}, \quad C_2 = 2\ln\frac{t + \tau_2}{t_1 + \tau_2}, \quad C_3 = 2\ln\frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3} \tag{2.6}$$

Из условия (1.11) находится связь τ_1, τ_2 и τ_3:

$$1+\frac{t_1}{\tau_1} = 3\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\left(1+\frac{t_2}{t_1+\tau_2}\right) = 3\frac{\kappa_3}{\kappa_1}\left(1+\frac{t_3}{t_1+t_2+\tau_2}\right) \tag{2.7}$$

Подставляя (2.5) в выражение (2.3) для давления, получим

$$p = p_0(t) - \frac{3\rho x_\alpha^2}{(t+\tau_\alpha)^2}; \quad t\in\Delta_\alpha \tag{2.8}$$

Действительно, на каждом из этапов обжатия давление на обеих сжимаемых гранях параллелепипеда не зависит от координат точек на этих гранях. Функция $p_0(t)$, единая для всех точек среды, остается произвольной. Ее выбор может обуславливаться особенностями технологического процесса обжатия.

Выпишем также конкретизированный с учетом (2.6) закон движения (1.4):

$$\begin{gathered}
x_1 = \xi_1\left(\frac{\tau_1}{t+\tau_1}\right)^2, \quad x_2 = \xi_2\frac{t+\tau_1}{\tau_1}, \quad x_3 = \xi_3\frac{t+\tau_1}{\tau_1}; \quad t\in\Delta_1 \\
x_1 = \xi_1'\frac{t+\tau_2}{t_1+\tau_2}, \quad x_2 = \xi_2'\left(\frac{t_1+\tau_2}{t+\tau_2}\right)^2, \quad x_3 = \xi_3'\frac{t+\tau_2}{t_1+\tau_2}; \quad t\in\Delta_2 \\
x_1 = \xi_1''\frac{t+\tau_3}{t_1+t_2+\tau_3}, \quad x_2 = \xi_2''\frac{t+\tau_3}{t_1+t_2+\tau_3}, \quad x_3 = \xi_3''\left(\frac{t_1+t_2+\tau_3}{t+\tau_3}\right)^2; \quad t\in\Delta_3,
\end{gathered} \tag{2.9}$$

где, как и ранее, $\xi_i' = x_i(t_1)$, $\xi_i'' = x_i(t_1+t_2)$. Из (2.9) можно убедиться, что

$$x_\alpha(T) = \kappa_\alpha\xi_\alpha; \quad \alpha = 1,2,3 \tag{2.10}$$

Это и необходимо было достичь в результате последовательного обжатия в трех ортогональных направлениях тела Ω_0 (1.6).

3. Суммарные силы, приложенные к граням. Обозначим шесть движущихся граней параллелепипеда Ω_t (1.7) следующим образом:

$$\Sigma_{\alpha t}^{\pm} = \{x_\alpha = \pm l_\alpha(t), |x_\beta| < l_\beta(t), |x_\gamma| < l_\gamma(t)\} \tag{3.1}$$

причем функции $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ известны из закона движения (2.9) при подстановке в него $\xi_1 = l_{10}$, $\xi_2 = l_{20}$ и $\xi_3 = l_{30}$. Начальное $\Sigma_{\alpha 0}^{\pm}$ и конечное $\Sigma_{\alpha T}^{\pm}$ положения граней известны.

Из разд. 2 следует, что при $t\in\Delta_\alpha$ на движущихся навстречу друг другу двух параллельных прямоугольных гранях $\Sigma_{\alpha t}^{+}$ и $\Sigma_{\alpha t}^{-}$ компонента $\sigma_{\alpha\alpha}$ тензора напряжений не зависит от x_β и x_γ. Поэтому суммарные силы $R_{\alpha t}^{\pm}$, приложенные к каждой из этих граней, равны $\pm\sigma_{\alpha\alpha}\left|\Sigma_{\alpha t}^{\pm}\right|$. Так как площади $\left|\Sigma_{\alpha t}^{\pm}\right|$ равны $4l_\beta(t)l_\gamma(t)$, то

$$\begin{gathered}
R_{1t}^{\pm} = \pm 4l_2l_3(-p+s_{11}) = \\
= \pm 4l_{20}l_{30}\left(-p_0(t) + 3\rho l_{10}^2\frac{\tau_1^4}{(t+\tau_1)^6} + s_{11}\right)\left(\frac{t+\tau_1}{\tau_1}\right)^2; \quad t\in\Delta_1 \\
R_{2t}^{\pm} = \pm 4l_1l_3(-p+s_{22}) = \\
= \pm 4l_1'l_3'\left(-p_0(t) + 3\rho l_2'^2\frac{(t_1+\tau_2)^4}{(t+\tau_2)^6} + s_{22}\right)\left(\frac{t+\tau_2}{t_1+\tau_2}\right)^2; \quad t\in\Delta_2
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$R_{3t}^{\pm} = \pm 4 l_1 l_2 (-p + s_{33}) =$$
$$= \pm 4 l_1'' l_2'' \left(-p_0(t) + 3\rho l_3''^2 \frac{(t_1 + t_2 + \tau_3)^4}{(t + \tau_3)^6} + s_{33} \right) \left(\frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3} \right)^2; \quad t \in \Delta_3$$

где $l_i' = l_i(t_1)$, $l_i'' = l_i(t_1 + t_2)$, $i = 1, 2, 3$.

В выражениях (3.2) для сил входят диагональные компоненты девиатора $s_{\alpha\alpha}(t)$, $t \in \Delta_\alpha$, которые посредством выбранных определяющих соотношений выражаются через скорости деформаций (1.13), а следовательно, через функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$, которые имеют вид (2.5). Выпишем эти связи для довольно обширного класса сред, представляющего собой изотропные тензорно линейные среды [6]. В их определяющих соотношениях тензоры $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ пропорциональны:

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u}{v_u} v_{ij}, \quad \sqrt{\operatorname{tr}(\underset{\sim}{s})} \equiv \sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u) \tag{3.3}$$

где $\sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u)$ – универсальная кривая материала, расположенная в первом квадранте плоскости интенсивностей (v_u, σ_u); $\sigma_s \geq 0$ – предел текучести; $\Phi(v_u)$ – неубывающая неотрицательная функция, такая что $\lim\limits_{v_u \to 0^+} \Phi(v_u) = 0$. Деформационное упрочнение и упругая податливость материала не учитываются.

Для диагональных компонент (3.3), входящих в (3.2), с учетом (1.14) имеем

$$s_{\alpha\alpha} = -\sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_s + \Phi(v_u)) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_s + \Phi\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} c_\alpha \right) \right); \quad t \in \Delta_\alpha \tag{3.4}$$

После конкретизации зависимости $\Phi(v_u)$ компонента (3.4) становится известной функцией времени, которую можно подставить в (3.2).

К классу сред с определяющими соотношениями (3.3) принадлежат, например: а) неньютоновские вязкие среды ($\sigma_s = 0$); б) вязкопластические среды Бингама ($\Phi(v_u) = 2\mu v_u$, где μ – динамическая вязкость); в) ньютоновские жидкости ($\sigma_s = 0$ и $\Phi(v_u) = 2\mu v_u$); г) идеальножесткопластические материалы ($\Phi(v_u) \equiv 0$).

Заключение. При осуществлении трехэтапного процесса обжатия параллелепипеда и перевода его из положения Ω_0 (1.6) в Ω_T (1.8) в результате движения частиц по закону (2.9) остается несколько степеней свободы в выборе параметров $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Эти пять времен должны удовлетворять всего двум условиям (2.7). Для реализации закона движения (2.9) на каждом из этапов обжатия на паре сближающихся параллельных граней необходимо приложить силы (3.2), тогда как на двух других удаляющихся друг от друга парах граней достаточно обеспечить их прямолинейность (во избежание выпучивания), т.е. задать кинематические условия. Технология реализации таких условий достаточно сложна [7], и здесь останавливаться на этом не будем.

Возвращаясь к остающейся свободе выбора времен t_1, t_2, τ_1, τ_2, τ_3, представляет практический интерес в дальнейшем исследовать задачу оптимизации описываемого процесса в смысле силового режима, а именно минимизации суммарной мощности

$$\int_0^{t_1} R_{1t}^{+}(t)dt + \int_{t_1}^{t_1+t_2} R_{2t}^{+}(t)dt + T \int_{t_1+t_2} R_{3t}^{+}(t)dt \to \min \tag{4.1}$$

Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690136-2 при поддержке РФФИ (гранты 18-29-10085мк, 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. New York: Springer, 2001. 363 p.
2. *Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А.* Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. М.: URSS, 2009. 320 с.
3. *Кийко И.А.* О сжатии тонкой полосы из материала в режиме сверхпластичности // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 1002–1008.
4. *Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И., Трусов П.В.* Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // Вестн. Пермского НИПУ. Механика. 2018. № 3. С. 103–127.
5. *Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Чуканов А.Н., Кутепов С.Н., Малий Д.В., Цой Е.В., Калинин А.А.* Из истории состояния сверхпластичности металлических систем // Чебышевский сб. 2019. Т. 20. № 1. С. 352–369.
6. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018. 560 с.
7. *Калмыков В.В., Чумаченко Е.Н., Ананьев И.Н.* Способ задания граничных условий при решении задач обработки давлением // Изв. вузов. Машиностр. 1985. № 12. С. 123–125.

Sequential Triaxial Dynamic Compression of a Parallelepiped

D. V. Georgievskii[a,b,c,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[c] *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The inverse problem of continuum mechanics is considered, in which the given kinematics of the flow of a homogeneous incompressible material in the three-dimensional space requires determining the force modes that provide such kinematics according to the equations of motion and the selected constitutive relations. The accepted law of particle motion consists of three time stages, each of which corresponds to compression in one direction and spreading of the medium in the other two. In this case, the planes that were parallel to the Cartesian coordinate planes before the deformation remain parallel to them at any time of the process. This makes it possible to formulate the problem of sequential triaxial compression of a parallelepiped and its translation from the initial position to the specified final one. The possible kinematic and force modes for implementing this translation are obtained.

Keywords: flow, stretching, triaxial dynamic compressing, parallelepiped, law of motion, trajectories of particles

REFERENCES

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. N.Y.: Springer, 2001. 363 p.
2. *Chumachenko E.N., Smirnov O.M., Tsepin M.A.* Superplastisity: Materials, Theory, Technology. Moscow: URSS, 2009. 320 p. (in Russian)
3. *Kiiko I.A.* The compression of a thin strip of material in a superplasticity state // JAMM, 2009, vol. 73, no. 6, pp. 722–726.
4. *Sharifullina E.R., Shveykin A.I., Trusov P.V.* Review of experimental studies on structural superplasticity: internal structure evolution of material and deformation mechanisms // PNRPU Mech. Bull., 2018, no. 3, pp. 103–127. (in Russian)
5. *Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Chukanov A.N., Kutepov S.N., Maliy D.V., Tsoy E.V., Kalinin A.A.* Excerpts on the history of superplasticity state of metal systems // Chebyshevskii sb., 2019, vol. 20, no. 1, pp. 352–369. (in Russian)
6. *Georgievskii D.V.* The Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: Lenand, 2018. (in Russian)
7. *Kalmykov V.V., Chumachenko E.N., Ananyev I.N.* Method for setting boundary conditions when solving pressure treatment problems // Izv. vuzov. Mashinostr., 1985, no. 12, pp. 123–125. (in Russian)