

УДК 531.3

**ТЕОРИЯ НОВЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ СЕМЕЙСТВА
“ОБОБЩЕННЫЙ” МАЯТНИК ФУКО, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ
НА ДВУХ РАБОЧИХ МОДАХ**© 2021 г. С. Е. Переляев^{1,*}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: pers2030@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.

После доработки 14.02.2021 г.

Принята к публикации 10.03.2021 г.

Изложены основы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный” маятник Фуко, которые реализованы на основе многомодового упругого осесимметричного высокочастотного резонатора – волнового твердотельного гироскопа. На кромке полусферического кварцевого резонатора такого инерциального датчика одновременно могут возбуждаться и существовать несколько рабочих форм (мод) механических стоячих волн упругих колебаний. Следует отметить, что при возбуждении сразу нескольких мод (форм) колебаний осесимметричного резонатора одновременно возникает несколько независимых каналов дублирующей инерциальной информации ориентации гироскопа в пространстве. Описан физический эффект, лежащий в основе функционирования таких приборов, входящих в рассматриваемый класс свободных гироскопов. Представлены прикладные аспекты реализации фундаментальной теории нового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко в высокоточных инерциальных датчиках ориентации, функционирующих одновременно на двух рабочих модах упругих колебаний. Показано, что для реализации нового способа функционирования двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко необходимо в каждой конкретной конструкции нового ВТГ организовать возбуждение и достаточно точный съем первичной информации перемещений узлов и пучностей двух основных рабочих мод (форм) колебаний кромки резонатора гироскопа.

Ключевые слова: маятник Фуко, полусферический кварцевый резонатор, волновой твердотельный гироскоп, математический двухмерный осциллятор, двухмодовые инерциальные датчики ориентации

DOI: 10.31857/S0032823521060096

1. Введение. В основе работы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) лежит явление инертности упругих стоячих волн, впервые открытое и доказанное экспериментально американским физиком Д. Линчем с коллегами в 1982 г. Данный эффект инертности упругих стоячих волн был теоретически строго обоснован в 1985 г. известными российскими учеными-механиками В.Ф. Журавлевым и Д.М. Климовым [1].

Теоретическое доказательство эффекта инертности упругих волн для произвольного закона вращения вибрирующей оболочки в виде тонкого кольца выполнено в 1983 г. В.Ф. Журавлевым [2]. Эффект инертности упругих волн в резонаторе любой формы (сфера, полусфера, цилиндр, кольцо и т.д.) состоит в том, что при приложении к нему внешнего момента сил вокруг оси его симметрии ускоренно вращается не только сам

резонатор, но и возбужденная в резонаторе механическая стоячая волна. В частном случае, когда ускорение равно нулю эффект инертности сводится к прецессии волны, являющейся следствием расщепления кратных частот резонатора при постоянной угловой скорости вращения. Эффект расщепления частот, приводящий к модуляции колебаний, был подтвержден экспериментально и теоретически обоснован английским математиком и механиком Д. Брайаном в 1890 г., который рассмотрел случай равномерного вращения вибрирующей оболочки [3]. В разработанном в 1982 г. Д. Линчем интегрирующем ВТГ [4] в качестве инерциального чувствительного элемента используется тонкостенный полусферический резонатор (ПСР), изготовленный из высококачественного плавленого кварца. Изгибные колебания кромки такого резонатора идентичны колебаниям тонкого кольца и подчиняются тем же закономерностям.

Для определения параметров стоячей волны и поддержания постоянной амплитуды колебаний кромки полусферы используется специальная электронная система возбуждения, съема и управления ВТГ. При повороте основания интегрирующего ВТГ вокруг оси симметрии на угол φ упругая стоячая волна поворачивается относительно самого резонатора на угол $\varphi\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. В рабочем режиме в такой оболочке резонатора возбуждаются упругие колебания на второй моде (форме) стоячей волны с четырьмя пучностями и четырьмя узлами по контуру края полусферы. Если резонатор неподвижен в инерциальном пространстве, то положение узлов и пучностей стоячей волны неизменно по отношению к окружающему резонатор корпусу прибора, оборудованному системами чувствительных и управляющих электродов. Любой поворот резонатора (вокруг оси симметрии) относительно инерциального пространства приводит к повороту узлов и пучностей стоячей волны по отношению к корпусу прибора. Фундаментальные основы теории одномодовых ВТГ были изложены в [1, 2], исследование погрешностей таких гироскопов с одной основной рабочей модой (формой) упругих колебаний высокодобротного кварцевого резонатора выполнено в публикациях [5, 6]. Принципиальные основы теории одномодовых инерциальных датчиков были успешно реализованы в отечественных и зарубежных конструкциях современных ВТГ.

В настоящее время ВТГ является одним из наиболее перспективных приборов, предназначенных для определения угла поворота или угловой скорости вращения объекта по хорошо известному критерию: себестоимость изготовления/точность получаемой инерциальной информации. В данной работе впервые рассмотрены принципиальные вопросы теории функционирования многомодовых ВТГ, в которых одновременно производится возбуждение и поддержание сразу нескольких рабочих мод (форм) упругих колебаний кромки осисимметричного резонатора (например, второй и третьей).

При этом возникает несколько независимых каналов дублирующей инерциальной информации ориентации гироскопа в пространстве. На основе полученных уравнений функционирования двухмодовых ВТГ может быть создана полнофункциональная имитационная модель прибора, кроме того, с помощью этих уравнений в дальнейшем могут быть реализованы новые методы контроля параметров колебаний и обнаружения углового положения стоячей волны.

2. Основные сведения из механики новых гироскопических систем. Опыты, проведенные в 1851 г. французским механиком и астрономом Фуко [7], а также опыты его многочисленных последователей дали только качественные результаты, подтверждающие с достаточной по тем временам точностью факт вращения Земли с угловой скоростью 11 град/ч относительно местной (Пантеон, г. Париж) вертикали (погрешность составляла по тем временам весьма небольшую величину порядка 1 град/ч). Математическое исследование основных источников погрешностей классического неуправляемого маятника Фуко и новое аналитическое доказательство вращения Земли дал в своей

докторской диссертации в 1879 г. нидерландский физик-экспериментатор Каммерлинг-Оннес [8]. Известно, что математический осциллятор с двумя степенями свободы, выполняющий в современных гироскопах роль маятника Фуко, обычно реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно абсолютного (инерциального) пространства. В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве принципиальные вопросы теории нового датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического неуправляемого маятника Фуко.

В современной практике мировой гироскопии появился целый класс новых приборов, в которых фактически реализована идея “обобщенного” маятника Фуко: струнный гироскоп [9], кольцевой гироскоп [10], полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп) [5, 6, 11, 13–15], ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором [16–18], “квапазон” [20], сферический кварцевый резонатор [21].

Все указанные выше новые инерциальные датчики ориентации весьма успешно конкурируют с классическими гироскопами, однако их теория существенно отличается от фундаментальной теории известных симметричных и несимметричных механических гироскопов [22]. Например, кинетический момент, который в механических гироскопах всегда стремились сделать как можно большим, в перечисленных выше новых датчиках должен быть равен нулю [5]. Математический маятник (осциллятор) с двумя степенями свободы, играющий в этих новых приборах роль “обобщенного” маятника Фуко, как правило, реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии инерциального датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно неподвижного пространства. Исключение составляет струнный гироскоп, однако отношение угловой скорости (прецессии) формы колебаний относительно упругого тела к угловой скорости тела относительно пространства является строго постоянной величиной, зависящей от номера формы (моды) рабочих колебаний и почти независящей от свойств самого упругого материала. Эта известная постоянная получила название масштабного коэффициента прецессии инерциального датчика, или коэффициента Брайана, по имени первого исследователя колебаний упругой оболочки [3]. Основой ВТГ является прецессия механической стоячей волны на кромке полусферической кварцевой оболочки, скорость которой оказалась пропорциональной скорости вращения основания прибора. При этом эти скорости оказались связаны постоянным коэффициентом Брайана, не зависящим от измеряемой угловой скорости. В публикации [23] рассмотрен подробный вывод основных уравнений новых гироскопических датчиков на примере тонкого упругого кольца. Представлены дифференциальные уравнения колебаний такого кольца в своей плоскости и показано, что эти уравнения допускают точное аналитическое решение в виде гармонической волны. При произвольных начальных условиях эти общие аналитические решения определяют в горизонтальной плоскости (x, y) эллипс. В случае, когда эллипс вырождается в отрезок прямой, общее аналитическое решение определяет в тонком вибрирующем кольце механическую стоячую волну. В случае противоположного вырождения, когда эллипс превращается в окружность, общее решение определяет в тонком упругом кольце бегущую волну, которая не обладает необходимыми инерциальными свойствами. Если угловая скорость основания кольца $\omega \neq 0$, то прямолинейных колебаний в плоскости (x, y) идеальный двумерный осциллятор в общем случае не имеет. Иными словами, во вращающемся упругом кольце стоячие механические волны невозможны. Однако в этом случае в кольце существуют такие колебания, которые в некоторой вра-

щающейся системе координат имеют вид стоячих волн. Такие волны принято называть “прецессирующими” волнами. В публикации [1] подробно изложены принципиальные теоретические основы эксперимента Линча-Скотта и представлен вывод важной для целей современной прикладной гироскопии формулы:

$$\varphi = -\frac{2}{k^2 + 1} \int \omega(t) dt, \quad (2.1)$$

здесь k – номер моды (формы) колебаний, $k = 2, 3, 4 \dots$; $\omega(t)$ – угловая скорость вращения основания (произвольная функция). Следует отметить, что в современных датчиках ВТГ возбуждается одна из рабочих мод (форм) колебаний резонатора, например, вторая ($k = 2$).

Формула (2.1) представляет обобщение результата Брайана для тонкого упругого кольцевого резонатора для произвольной угловой скорости $\omega(t)$. Этот результат является точным [1] и получен для уравнения с переменными коэффициентами, так как $\omega(t)$ считается произвольной функцией. Эффект Брайана [3], как эффект прецессии стоячей волны при вращении резонатора с постоянной угловой скоростью, является эффектом расщепления двукратных частот, поэтому этот эффект имеет малое отношение к тому, что экспериментально было открыто Линчем-Скоттом [19] в 1982 году и использовано ими в известном патенте Линча [12]. Хотя авторы патента ошибочно и сослались на формулу Брайана [3], на самом деле, в подтверждение своей идеи они привели результат эксперимента, в котором поворот первоначально неподвижного вибрирующего резонатора ВТГ на угол $\varphi = 90^\circ$, вызывал поворот стоячей волны на угол $\varphi_w = 30^\circ$, относительно кромки самого резонатора без каких-либо изменений самой формы стоячей волны. Тем самым была установлена следующая экспериментальная формула [14, 19]:

$$\varphi_w = -\frac{1}{3} \varphi \quad (2.2)$$

Полученная в эксперименте Линча формула (2.2) связывает уже не постоянные скорости поворота резонатора, а сами углы поворота при явно непостоянных угловых скоростях.

Изложенное выше можно суммировать в виде: *Теоремы*. Какой бы ни была зависимость угловой скорости тонкого упругого кольца от времени (в классе дифференцируемых на бесконечном полуинтервале функций), существует и единственная вращающаяся относительно кольца система координат, в которой при определенных начальных условиях колебания кольца представляют собой механические стоячие волны [23].

Скорость такой системы координат выражается формулой (2.1). Частным случаем из нее вытекает известный результат Брайана [3], установленный им только для *постоянной (равномерной) угловой скорости* ($\dot{\omega} = 0$) основания осесимметричного резонатора:

$$\omega_w = -\frac{2}{1 + k^2} \omega \quad (2.3)$$

Заметим, что выражение, верное для стационарного случая, как правило, не бывает верным для нестационарного. Формула (2.1) описывает новый физический эффект, не замеченный Брайаном, и впервые установленный экспериментально, авторами известного патента “Vibratory rotational sensor” [12]. Следует заметить, что формулу (2.1) ввиду ее точного характера можно сколько угодно раз аналитически дифференцировать.

В частности, можно отметить, что ускорение механической стоячей волны пропорционально угловому ускорению самого упругого вибрирующего кольца:

$$\left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) = -\frac{2}{k^2 + 1} \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \quad (2.4)$$

Поскольку ускорение тонкого упругого кольца пропорционально приложенному к нему моменту внешних сил M ($I\ddot{\omega} = M$), то можно объективно утверждать, что этот момент вызывает не только ускорение кольца, но и ускорение прецессирующей стоячей волны.

Все сказанное выше позволяет определить обсуждаемый здесь физический эффект в неравномерно вращающемся кольце как новый эффект *инертности упругих волн* в нем. Эффект (2.1), который установлен [1] для общего вида уравнения колебаний без каких-либо приближений, с различной степенью точности верен и для произвольных упругих тел, обладающих осевой симметрией. Различие будет состоять только в величине масштабного коэффициента, равного для кольца $2/(k^2 + 1)$. Можно показать, что для кварцевой полусферы имеем следующую известную формулу прецессии угла волны [1]

$$\varphi_w = -0.312 \int_0^t \omega(t) dt, \quad (2.5)$$

что соответствует повороту осей колебаний механической стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 28.1° или относительно инерциального пространства на угол 61.9° при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90° .

В соответствующем выбранной форме колебаний к собственному подпространству, все принципиальные вопросы теории подобного высокоточного датчика инерциальной информации, могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот класс приборов может быть назван “*обобщенным*” маятником Фуко [23]. Многие исследователи предполагают, что Земля не вовлекает плоскость колебаний маятника во вращение вокруг местной вертикали. Между тем благодаря нелинейным эффектам неуправляемый маятник Фуко обладает собственной скоростью прецессии вокруг местной вертикали, поэтому необходимо контролировать его собственную прецессию, без чего невозможно осуществлять достоверные и высокоточные измерения угловой скорости вращения Земли.

3. Теория функционирования двухмодового интегрирующего свободного гироскопа типа “обобщенный” маятник Фуко. Общая математическая модель осциллирующей системы, которая показывает пространственное движение, обнаруженное Фуко, излагается в соответствии с фундаментальной теорией [24]. Теория касается большинства современных вибрирующих (осциллирующих) гироскопических механических систем (в частности ВТГ), которые функционируют, как правило, на одной основной (второй) иногда третьей рабочей моде колебаний. Предлагается рассмотреть основы теории принципиально новых комбинированных инерциальных датчиков ориентации, которые функционируют одновременно на двух ($n = 2, 3$) или даже трех рабочих модах колебаний кромки полусферы резонатора ВТГ.

Применительно к идеальной осесимметричной полусфере волнового твердотельного гироскопа рассмотрим по аналогии с [23, 24] дифференциальные уравнения пространственных движений в горизонтальной плоскости кромки резонатора, описывающие динамику двух идеальных двумерных неуправляемых осцилляторов на двух ($n = 2, 3$) основных рабочих модах (формах) колебаний механических стоячих волн:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n + \Omega_n^2 x_n - 2c\omega \dot{y}_n &= 0 \quad (n = 2, 3) \\ \ddot{y}_n + \Omega_n^2 y_n + 2c\omega \dot{x}_n &= 0 \quad (n = 2, 3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь переменные x_n и y_n представляют собой текущие координаты двух осциллирующих точек в заданных декартовых системах координат (см. рис. 1 и 2), которые яв-

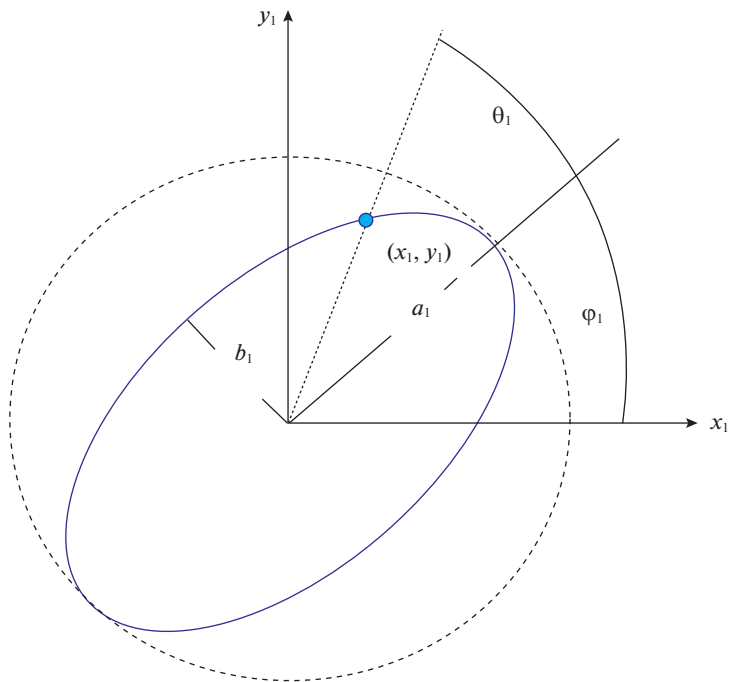


Рис. 1. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_1, y_1) второй моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора.

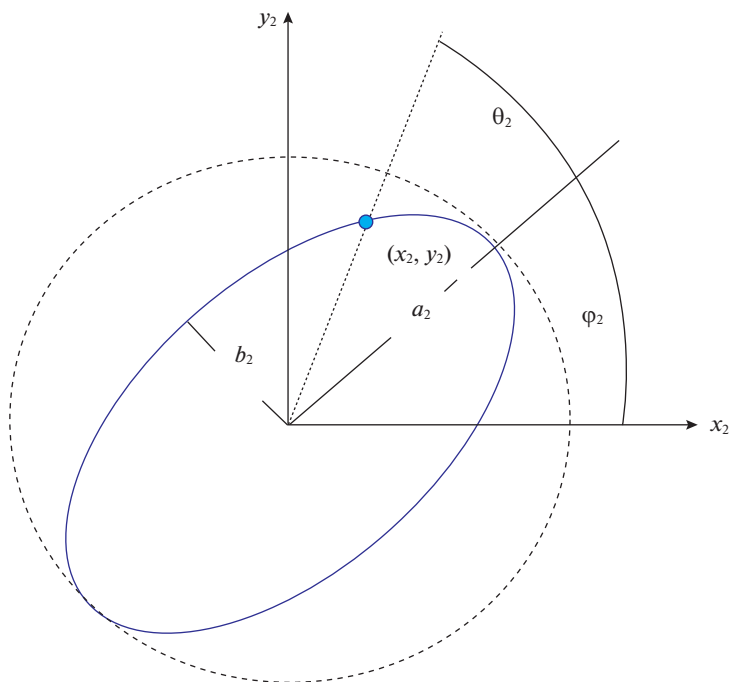


Рис. 2. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_2, y_2) третьей моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора.

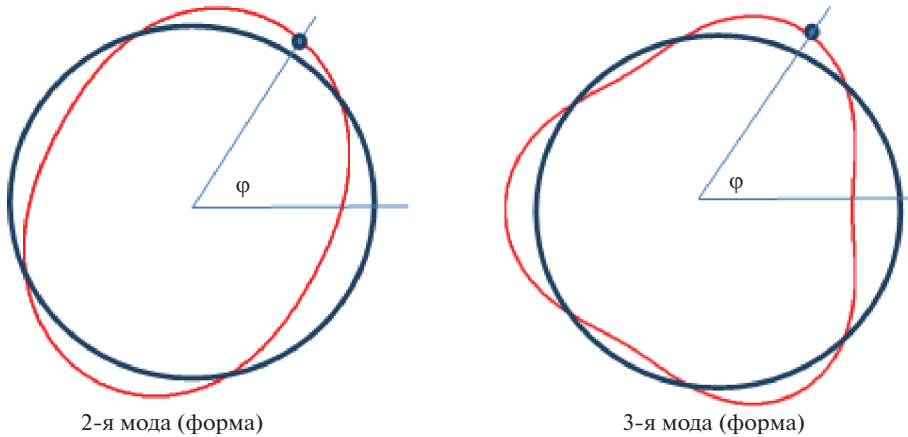


Рис. 3. Рабочие формы (моды) колебаний механической стоячей волны кромки осесимметричного упругого резонатора ВТГ.

ляются наглядными геометрическими интерпретациями двух орбит эллиптических вибраций.

Рабочие моды (формы) колебаний этих двух осцилляторов условно обозначены $n = 2, 3$. Они соответствуют двум основным ($n = 2, 3$) рабочим модам или формам механических стоячих волн колебаний кромки полусферического кварцевого резонатора, как это показано на рис. 3. На каждом рассматриваемом эллипсе имеем соответственно две точки $a_{(n)}$, которые имеют определенные амплитуды колебаний и расположены на продольных осях двух вибрирующих элементов одного комбинированного свободного двухмодового гироскопа; θ_1, θ_2 – углы, которые характеризуют направления (фазы) вибраций в системе координат осесимметричного резонатора; φ_1, φ_2 – углы наклона больших полуосей эллипсов к осям x_1 и x_2 (эти углы определяют текущие местоположения двух рассматриваемых форм (мод) механических стоячих волн колебаний на кромке осциллирующего полусферического резонатора, в которых наблюдаются его радиальные отклонения от окружности); Ω_n частоты колебаний (вибраций) двух идеальных осцилляторов; c – постоянный коэффициент, который зависит от заданной моды и соответствующего данной моде колебаний коэффициента Брайана комбинированного свободного гироскопа; ω – произвольная угловая скорость основания двухмодового гироскопа, которая измеряется в плоскости нормальной горизонтальной системе координат OXY .

Существенная особенность дифференциальных уравнений (3.1) наличие известных гироскопических членов, представляющих собой составляющие $2c\omega x_n, 2c\omega y_n$ ускорения Кориолиса на горизонтальные оси OXY указанных выше идеальных двухмерных осцилляторов. Заметим, что эти составляющие полностью соответствуют гироскопическим членам классического неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. Можно привести пример целого класса гироскопов, идеальное пространственное движение которых достаточно точно характеризуется системой дифференциальных уравнений вида (3.1). Все такие инерциальные датчики ориентации обладают гироскопическим эффектом, обнаруженным экспериментально Фуко. Ниже представим обобщающий анализ одного нового типа комбинированных инерциальных датчиков – волновых твердотельных гироскопов (ВТГ), которые функционируют не на одной ра-

бочей моде, а как минимум на двух модах (формах) (рис. 3) резонансных колебаний полусферы одновременно. Имея на входе такого идеального свободного ВТГ нулевую угловую скорость ($\omega = 0$) движения основания прибора в пространстве, перемещения двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такого комбинированного осциллятора, можно наглядно представить двумя эллипсами, которые могут быть определены на основании аналитических решений дифференциальных уравнений вида (3.1). Это легко проверить, подставив в них следующие обобщающие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} x_{(n)} &= a_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) \\ y_{(n)} &= a_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражения (3.2) определяют мгновенное положение двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на орбитальных траекториях двух вибрирующих эллипсов, при этом скорости перемещения каждой из двух точек по указанным траекториям будут равны

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(n)} &= \Omega_n(-a_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)})) \\ \dot{y}_{(n)} &= \Omega_n(-a_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)})) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь параметры $a_{(n)}$, $b_{(n)}$ – переменные, называемые амплитудами и квадратурами рабочих колебаний двух гармонических осцилляторов, которые определяют основные динамические характеристики свободного движения неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. При этом $a_{(n)}$, $b_{(n)}$ – непосредственно определяют формы эллипсов колебаний, а углы $\varphi_{(n)}$ – их ориентацию на горизонтальной плоскости OXY ; углы $\theta_{(n)(0)}$ – начальные значения (основные фазы) двух орбитальных углов $\theta_{(n)}$, которые определяют положения двух материальных точек на двух вибрирующих эллипсах.

Все эти рассматриваемые параметры представлены на рис. 1 и 2, на которых наглядно отображены основные орбитальные элементы комбинированного (двухмодового) свободного (неуправляемого) волнового твердотельного гироскопа. В приведенных выше обобщающих аналитических решениях (3.2) и (3.3) нижний индекс $(n) = 2, 3$ задает соответственно вторую ($n = 2$) и третью ($n = 3$) рабочую моду колебаний стоячих волн двух идеальных двухмерных осцилляторов. В формулах (3.3) орбитальные углы $\theta_{(n)}$ определяются выражением:

$$\theta_{(n)} = \Omega_n t + \theta_{(n)(0)}$$

В частности, два орбитальных угла $\theta_{(n)}$ измеряются на соответствующих окружностях радиуса $a_{(n)}$ каждой заданной рабочей моды стоячих волн колебаний. Основные параметры этих двух орбит $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ тесно связаны с нормированными энергиями колебаний $E_{(n)}$ и соответствующими кинетическими моментами $H_{(n)}$ [24] двух рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{(n)} &= \left[E_{(n)} + \sqrt{\left(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2 \right)} \right]^{1/2} / \Omega_n & (n) = 2, 3 \\ b_{(n)} &= \left[E_{(n)} - \sqrt{\left(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2 \right)} \right]^{1/2} / \Omega_n & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом постоянные энергии $E_{(n)}$ этих двух комбинированных осцилляторов и их кинетические моменты $H_{(n)}$ могут быть выражены простыми аналитическим выражениями:

$$\begin{aligned} E_{(n)} &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) + (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2) \right] / 2 & (n) = 2, 3 \\ H_n &= (x_{(n)}\dot{y}_{(n)} - y_{(n)}\dot{x}_{(n)}) & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Параметры $E_{(n)}$ и $H_{(n)}$, для идеальных двухмерных осцилляторов колебаний вида (3.1), являются постоянными величинами и поэтому их можно довольно просто выразить через введенные выше параметры – амплитуд $a_{(n)}$ и квадратур $b_{(n)}$ второй и третьей рабочих мод колебаний комбинированного гироскопа:

$$\begin{aligned} E_{(n)} &= \Omega_n^2 (a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2) / 2 & (n) = 2, 3 \\ H_n &= \Omega_n (a_{(n)}b_{(n)}) & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

На основании выражений (3.6) можно сделать следующий важный вывод о том, что движения двух материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по траекториям двух вибрирующих эллипсов переходят в движения, которые описываются двумя прямыми линиями, тогда и только тогда, когда для заданных выше двух рабочих мод колебаний идеальных парциальных осцилляторов выполняются два безусловных требования: $b_{(2)} = 0$ и $b_{(3)} = 0$. Последнее означает, что при выполнении этих двух основных требований кинетические моменты H_n этих двух идеальных осцилляторов также будут строго равны нулю ($H_n \equiv 0$).

Искомые углы $2\varphi_{(n)}$ и $3\varphi_{(n)}$ наклона продольных осей двух указанных выше вибрирующих эллипсов определяются следующими аналитическими выражениями:

$$\begin{aligned} \sin(n\varphi_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 x_{(n)} y_{(n)} + \dot{x}_{(n)} \dot{y}_{(n)} \right] / \left[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right] & (n) = 2, 3 \\ \cos(n\varphi_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 - y_{(n)}^2) + \dot{x}_{(n)}^2 - \dot{y}_{(n)}^2 \right] / 2 \left[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right] & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Можно показать, что соответствующие углы $n\varphi_{(n)}$ наклона двух рассматриваемых эллипсов колебаний на второй ($n = 2$) и третьей ($n = 3$) рабочих модах функционирования идеальных двухмерных парциальных осцилляторов являются постоянными для движений, которые заданы дифференциальными уравнениями (3.1) только для одного частного случая, когда угловая скорость основания двухмодового гироскопа равна нулю.

Наконец орбитальные углы $\theta_{(n)}$ двух эллиптических траекторий соответствующих двум рабочим модам ($n = 2, 3$) механических стоячих волн колебаний могут быть представлены следующими аналитическими выражениями:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) - (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2) \right] / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \\ \sin(n\theta_{(n)}) &= -\Omega_n (x_{(n)}\dot{x}_{(n)} + y_{(n)}\dot{y}_{(n)}) / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} & (n) = 2, 3 \\ \cos(n\theta_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) - (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2) \right] / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следует заметить, что эти два орбитальных угла не являются строго постоянными, однако можно отметить, что их значения увеличиваются со временем строго по линейному закону.

Здесь следует рассмотреть важные для практических реализаций конкретных комбинированных двухмодовых свободных гироскопов следующие прикладные аспекты.

Случай 1: Входная угловая скорость не равна нулю ($\omega \neq 0$). В данном случае решения уравнений (3.1) не являются периодическими с частотами Ω_n и орбиты двух рассматриваемых материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) больше не являются эллипсами.

Случай 2: Входная угловая скорость основания ω относительно абсолютно точных величин рабочих частот Ω_n ($(n) = 2, 3$) идеальных двухмерных осцилляторов является относительно малой величиной. В данном случае внешний вид двух таких орбит почти точно соответствует двум эллипсам, которые медленно прецессируют, а колебания самих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на этих орбитах будут почти периодическими.

В данном случае целесообразно определить основные параметры $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\theta_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$, как осциллирующие на двух основных рабочих модах орбитальные элементы, по аналогии с орбитальными элементами, используемыми в классической небесной механике. Важно отметить, что применительно к гармоническим двухмерным осцилляторам, предлагается определять не мгновенные положения материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на соответствующих эллипсах, движение по орбитам которых происходит с частотами на много превышающими частоту измеряемой каждым таким осциллятором входной угловой скорости основания прибора, а непосредственно сами орбитальные элементы. Соответственно, вместо непосредственного решения исходных дифференциальных уравнений второго порядка (3.1), при действии на вход двух парциальных осцилляторов переменной угловой скорости $\omega \neq 0$, предлагается воспользоваться решением орбитальных уравнений первого порядка относительно переменных $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\Phi_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$.

Используя указанные орбитальные параметры, которые заданы выражениями (3.4), (3.7) и (3.8) можно показать, что новые дифференциальные уравнения для медленных переменных $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\theta_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$ имеют следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{(n)} &= -2\omega_{(n)}b_{(n)}\sin(n\theta_{(n)})/n & (n) &= 2, 3 \\ \dot{b}_{(n)} &= 2\omega_{(n)}a_{(n)}\sin(n\theta_{(n)})/n & (n) &= 2, 3 \\ \dot{\Phi}_{(n)} &= 2\omega_{(n)}(b_{(n)}^2\cos^2(\theta_{(n)}) - a_{(n)}^2\sin^2(\theta_{(n)}))/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) & (n) &= 2, 3 \\ \dot{\theta}_{(n)} &= -2\omega_{(n)}a_{(n)}b_{(n)}\cos(n\theta_{(n)})/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) + \Omega_{(n)} & (n) &= 2, 3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь во всех уравнениях (3.9) входная угловая скорость ω соответствует выражению

$$\omega_{(n)} = nk_b\omega,$$

где k_b – коэффициент Брайана, n – номер (2,3) рассматриваемой моды (формы) колебаний.

Дифференциальные уравнения (3.9) являются точными и явно зависят от входной угловой скорости ω основания комбинированного двухмодового инерциального датчика.

Следует отметить, что здесь величина входной угловой скорости ω не имеет каких-либо абсолютных ограничений. Обычно (во многих реальных практических ситуациях) входная угловая скорость ω намного меньше, чем рабочие частоты $\Omega_{(n)}$ рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов. Более того, как выше отмечалось в таких инерциальных датчиках величины квадратур второй ($b_{(2)}$) и третьей ($b_{(3)}$) рабочих мод колебаний этих двухмерных осцилляторов абсолютно точно поддерживаются ну-

левыми ($b_{(n)} = 0$). Поэтому на основании точного уравнения (3.9) имеем следующие выражения:

$$\dot{\theta}_{(n)} \approx \Omega_n, \quad \theta_{(n)} \approx \Omega_n t + \theta_{(n)(0)}$$

Можно также отметить, что правые части всех четырех дифференциальных уравнений (3.9) являются практически периодическими с периодами пропорциональными двум рабочим модам колебаний рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов.

Более того, за полные периоды T_2 и T_3 колебаний на второй Ω_2 ($T_2 = 2\pi/\Omega_2$) и третьей Ω_3 ($T_3 = 2\pi/\Omega_3$) резонансных частотах (соответствующих двум рабочим модам) все орбитальные параметры, за исключением двух орбитальных углов $\theta_{(2)}$ и $\theta_{(3)}$, остаются практически постоянными величинами. Поэтому приближенные решения уравнений (3.9) в течение указанных полных периодов определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_{(n)}(t+T) &\approx a_n(t) - \omega_{(n)} b_{(n)}(t) / \int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt \\ b_{(n)}(t+T) &\approx b_n(t) + \omega_{(n)} a_{(n)}(t) / \int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt \\ \varphi_{(n)}(t+T) &\approx \varphi_n(t) + \frac{2\omega_{(n)}}{(a_{(n)}^2(t) - b_{(n)}^2(t))} \int_t^{t+T} (b_{(n)}^2 \cos^2(\theta_{(n)}) - (b_{(n)}^2 \sin^2(\theta_{(n)})) dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Одновременно имеем

$$\int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt = 0; \quad \int_t^{t+T} \sin^2 \theta_{(n)} dt = \int_t^{t+T} \cos^2 \theta_{(n)} dt = \frac{1}{2}$$

Поэтому очевидно, что уравнения (3.10) становятся равными следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{(n)}(t+T) &\approx a_n(t); \quad \dot{b}_{(n)}(t+T) \approx b_n(t) \\ \dot{\varphi}_{(n)}(t+T) &\approx \varphi_n(t) + \frac{\omega_{(n)}(b_{(n)}^2(t) - a_{(n)}^2(t))}{(a_{(n)}^2(t) - b_{(n)}^2(t))} \end{aligned}$$

Аналогичные результаты могут быть получены при решении следующих более простых дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{a}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{b}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}_{(n)}(t) = -\omega_{(n)}, \quad \dot{\theta}_{(n)} = \Omega_n \quad (3.11)$$

Таким образом, что касается долговременного функционирования рассматриваемого двухмодового ($n = 2, 3$) гироскопа – идеального осциллятора класса неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко, т.е. исследуя изменения основных орбитальных параметров $\dot{a}_{(n)}$, $\dot{b}_{(n)}$, $\dot{\varphi}_{(n)}$ и $\dot{\theta}_{(n)}$ на достаточно большом общем числе периодов наблюдения T_n , то можно заметить, что все указанные выше переменные достаточно точно соответствуют дифференциальным уравнениям вида (3.11). Данные уравнения описывают два вибрирующих эллипса, которые имеют постоянные формы ($\dot{a}_{(n)} = \dot{b}_{(n)} = \text{const}$) и прецессируют с постоянной угловой скоростью. Поскольку системы координат, в которых прецессируют указанные эллипсы, обычно фиксируются относительно измерительных (приборных) осей комбинированного гироскопа, то в инерциальном пространстве (неподвижных звезд) оба представленных эллипса прецессируют с нуле-

вой угловой скоростью и остаются неподвижными. Тем самым подтверждается наличие известных гироскопических членов Кориолиса в исходных дифференциальных уравнениях вида (3.1), описывающих поведение “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко.

4. Способ определения углов поворота двухмодового гироскопа. Для реализации нового способа функционирования двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко необходимо в каждой конкретной конструкции нового волнового твердотельного гироскопа организовать достаточно точный съем первичной информации перемещений двух материальных точек, которые показаны на рис. 1 и 2.

В предлагаемом новом способе необходимо вычислять нормированные энергии $E_{(n)}$ ($n = 2, 3$) и/или амплитуды $a_{(n)}$ колебаний двух осцилляторов и их кинетические моменты H_n ($n = 2, 3$) и/или квадратуры $b_{(n)}$ колебаний в соответствии с формулами (3.5). Определив полные энергии колебаний и их кинетические моменты можно достаточно точно контролировать по формулам (3.4) соответствующие амплитуды и квадратуры двух рабочих мод (форм) колебаний механических стоячих волн двухмодового гироскопа. Отметим, что все вычисления по указанным выше формулам основываются только на точных измерениях переменных $x_{(n)}(t)$ и $y_{(n)}(t)$, а также, соответственно, их первых производных $\dot{x}_{(n)}(t)$ и $\dot{y}_{(n)}(t)$, которые задают положение волны на кромке резонатора. Этих первичных данных полностью достаточно для определения двух искомым углов $2\varphi_2$ и $3\varphi_3$ наклона рассматриваемых эллипсов колебаний (см. рис. 1 и 2) в соответствие с исходными формулами (3.7), что и представляет собой конечную цель нового способа реализации “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко как комбинированного (двухмодового) свободного (интегрирующего) ВТГ. При произвольных начальных условиях аналитические выражения (3.2) определяют в горизонтальной плоскости (x, y) два вибрирующих эллипса, которые соответствуют двум основным рабочим модам колебаний. В случае, когда эллипсы вырождаются в отрезки прямых, решения (3.2) определяют в рассматриваемых идеальных двухмерных парциальных осцилляторах механические стоячие волны, которые обладают важными инерционными свойствами.

В случае противоположного вырождения, когда соответствующие эллипсы превращаются в окружности, формулы (3.2) определяют в этих же осцилляторах бегущие волны, которые не обладают необходимыми инерционными свойствами. Исходя из этого, для самых простых прикладных способов реализации двухмодовых свободных ВТГ, достаточно поддерживать заданные амплитуды $a_{(n)} = \text{const}$ и нулевые квадратуры $b_{(n)} = 0$ в узлах двух форм колебаний кромки полусферического резонатора ВТГ.

Можно показать, что для режима свободной волны и применительно к третьей моде (форме стоячей волны) колебаний для высокочастотной кварцевой полусферы, имеем следующую формулу прецессии угла волны:

$$\varphi_w = -0.248 \int_0^t \omega(t) dt,$$

что соответствует повороту осей колебаний стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 22.32° или относительно инерциального пространства на угол 67.68° при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90° .

Следует подчеркнуть, что в данном способе реализации режима измерения углов поворота основания нового двухмодового инерциального датчика относительно исходного (начального) положения необходима приборная реализация двух независимых каналов съема первичной информации и определения положения механической стоячей волны упругих колебаний на кромке кварцевой полусферы и определения

произвольных поворотов основания в соответствии с формулами преобразований (3.7), поэтому точность предлагаемого способа реализации двухмодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза превышает точность классического одномодового ВТГ.

Что касается прикладных аспектов реализации теории интегрирующих гироскопов на базе новых конструкций [25, 26] двухмодовых волновых твердотельных гироскопов, то следует отметить, что в уравнениях (3.1) следует, вместо входной угловой скорости ω , ввести общий параметр $nk_b\omega$, где n – номер рассматриваемой моды (формы) колебаний, k_b – коэффициент Брайана реализации “обобщенного” маятника Фуко.

Заключение. Теория двухмодовых инерциальных датчиков ориентации позволила синтезировать математическую модель функционирования новых гироскопов семейства “обобщенный” неуправляемый маятник Фуко.

Математическая модель двухмодового ВТГ обычно используется для изучения перемещений кромки высокочастотного полусферического резонатора одновременно на второй и третьей рабочих модах упругих колебаний и создания методов точного съема первичной информации о положении механической стоячей волны.

Возбуждение одновременно двух рабочих мод (форм) колебаний осесимметричного резонатора требует реализации двух независимых каналов функциональной (обслуживающей) электроники, которые обеспечивают дублирующей инерциальной информацией ориентации гироскопа в пространстве.

Два одновременно функционирующих канала инерциальной информации повышают точность предлагаемого способа реализации двухмодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза по сравнению с точностью классического одномодового ВТГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–24.
3. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. 1890. V. VII. P. 101–111.
4. Loper E.J., Jr., Lynch D.D. Sonic Vibrating Bell Gyro // U.S. Patent 4.157.04.1, June 5, 1979.
5. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
6. Lynch D.D. Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd Saint-Petersburg Int. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation. St.-Petersburg: 1995. P. 26–34.
7. Foucault L. Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // C.R. Acad. Sci. Paris, 1851. V. 32. P. 135–138.
8. Kamerlingh Onnes H. Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Ph.D. Disertation. Groningen, Netherlands, 1879.
9. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. № 3. P. 523–534.
10. Stiles J.C. Vibrating ring gyro // U.S. Patent. 1975. № 3. 924,475. Dec. 9.
11. Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Gyro Fabrication and Testing // Delco Electronics Division. Rep. R77-64. August 1977.
12. Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Vibration Bell Gyro // Patent. no. 4157041, USA, 1979.
13. Loper E.J., Lynch D.D. The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.
14. Loper E.J., Lynch D.D. Projected system performance based on recent HRG test results // Paper S83–105. IEEE/AIAA 5th Digital Avionics Systems Conf. Oct. 31–Nov. 3. 1983.
15. Loper E.J., Lynch D.D. Vibratory rotational sensor // Patent EU. no. 0141621 A2. 1984.

16. *Burdess J.S.* The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // Proc. Inst. Mech. Engrs. London. 1986. V. 200. № C4. P. 271–280.
17. *Koning M.G.* Vibrating cylinder gyroscope and method // Patent. № 4793195. USA. 1988.
18. *Fox C.H.* Vibrating cylinder rate gyro, theory of operation and error analysis // DGON Symp. Gyro Technology. Stuttgart. 1988.
19. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // Aviation Week&Space Technol. 1982. P. 64–65.
20. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint-Petersburg Int. Conf. On Integrated Navigation Systems. St.-Petersburg, 1996. Pt. 1. P. 143–149.
21. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E.* The generalized Foucault pendulum is a 3d integrating gyroscopes using the three-dimensional precession of standing waves in a rotating spherically symmetric elastic solid // Inertial Sensors&Syst. ISS 2019 – Proc. German Inst. Navigation (DGON). 2019. P06.
22. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
23. *Журавлев В.Ф.* Принципиальные вопросы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный маятник Фуко” // В кн.: Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / Под ред. *Климова Д.М.* М.: Физмалит, 2003. 832 с.
24. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope // IEEE Trans. Autom. Control. 1978. V. AC-23. № 4.
25. *Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Волновой твердотельный гироскоп – инерциальный датчик нового поколения // Мат XXIV С.-Петербургской межд. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2017. С. 287–290.
26. *Журавлев В.Ф., Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Миниатюрный волновой твердотельный гироскоп нового поколения для бескарданных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов. // XXVI С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2019. С. 250–254.

Theory of New Gyroscopic Sensors Family “Generalized” Pendulum Foucault, Operating on Two Working Modes

S. E. Perelyayev^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: pers2030@yandex.ru*

The foundations of the theory of the new gyroscope sensors of “generalized” Foucault pendulum family, which are implemented on the basis of multimodal elastic axisymmetrical high-Q resonator – the hemispherical resonator gyroscope (HRG), are set out. On the edge of the hemispherical quartz resonator of such inertial sensor, multiple operational wave forms (modes) of mechanical standing waves of elastic vibrations can be excited and coexist simultaneously. Note that when multiple modes (forms) of vibrations of axisymmetrical resonator are excited simultaneously, multiple independent channels of duplicated inertial information on gyroscope orientation in space are created. The physical effect, which forms the basis of functioning of such sensors, belonging to the free gyroscope class under consideration, is described. The application aspects of implementing the fundamental theory of the new “generalized” uncontrolled Foucault pendulum in high accuracy inertial orientation sensors, which function with two operational modes of elastic vibrations simultaneously, are presented. To implement the new way of functioning for the two-mode “generalized” uncontrolled Foucault pendulum, in each particular design of the new HRG it is necessary to provide excitation and sufficiently accurate acquisition of primary information on nodes and antinodes of two main operational modes (forms) of vibration of the edge of the gyroscope’s resonator.

Keywords: classical Foucault pendulum, hemispherical resonator gyroscope, wave solid-state gyroscope, two-dimensional oscillator, two-mode “generalized” uncontrolled Foucault pendulum

REFERENCES

1. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Wave Solid-State Gyroscopes. Moscow: Nauka, 1985. 126 p. (in Russian)
2. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Dynamic effects in an elastic rotating ring // *Mech. Solids*, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 15–21.
3. *Bryan G. H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1890, vol. VII, Nov. 24, pp. 101–111.
4. *Loper E.J., Jr.; Lynch D.D.* Sonic vibrating bell gyro // U.S. Patent 4.157.04.1, June 5, 1979.
5. *Zhuravlev V.Ph.* Theoretical foundations of wave solid gyroscope (WSG) // *Mech. Solids*, 1993, vol. 28, no. 3, pp. 3–15.
6. *Lynch D.D.* Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd St.-Petersburg Int. Conf. On Gyroscopic Technology and Navigation. St.-Petersburg, 1995. P. 26–34.
7. *Foucault L.* Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1851, vol. 32, pp. 135–138.
8. *Kamerlingh Onnes H.* Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde // Ph.D. Diss. Groningen, Netherlands, 1879.
9. *Quick W.H.* Theory of vibrating string as an angular motion sensor // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 523–534.
10. *Stiles J.C.* Vibrating ring gyro // U.S. Patent, 1975, no. 3, 924,475-Dec, 9.
11. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic gyro fabrication and testing // Delco Electronics Division, Rep. R77-64, August 1977.
12. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic vibration bell gyro // Patent. no. 4157041, USA, 1979.
13. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.
14. *Loper E.J., Lynch D.D.* Lynch projected system performance based on recent HRG test results // Paper S83–105, IEEE/AIAA 5th Digital Avionics Systems Conference, Oct. 31–Nov. 3, 1983.
15. *Loper E.J., Lynch D.D.* Vibratory rotational sensor // Patent EU, no. 0141621 A2, 1984.
16. *Burdess J.S.* The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, London, 1986, vol. 200, no. C4, pp. 271–280.
17. *Koning M.G.* Vibrating cylinder gyroscope and method // Patent №4793195, USA, 1988.
18. *Fox C.H.* Vibrating cylinder rate gyro, theory of operation and error analysis // DGON Symp. Gyro Technology, Stuttgart, 1988.
19. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // *Aviation Week&Space Technol.*, 1982, October 25, pp. 64–65.
20. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd St.-Petersburg Int. Conf. On Integrated Navigation Systems. St.-Petersburg, 1996, pt. 1, pp. 143–149.
21. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E.* The generalized Foucault pendulum is a 3d integrating gyroscopes using the three-dimensional precession of standing waves in a rotating spherically symmetric elastic solid // *Inertial Sensors&Syst.*, ISS, 2019, Proc, German Inst. of Navigation (DGON), P06, 2019.
22. *Ishlinskiy A.Yu.* Orientation, Gyroscopes and Inertial Navigation. Moscow: Nauka, 1976. 670 p. (in Russian)
23. *Zhuravlev V.Ph.* Fundamental questions of the theory of new gyroscopic sensors of the “generalized Foucault pendulum” family // in: *Problems of Mechanics: Collection of articles. Dedicated to the 90th anniversary of the birth of A.Y. Ishlinsky* / Ed. by *D.M. Klimov*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 832 p. (in Russian)
24. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope // *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. AC-23, no. 4, 1978, pp. 545–556.
25. *Perelyaev S.E., Bodunov B.P., Bodunov S.B.* Solid-state wave gyroscope: A new-generation inertial sensor // Proc. 24th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS, 2017.
26. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E., Bodunov B.P., Bodunov S.B.* New-generation small-size solid-state wave gyroscope for strapdown inertial navigation systems of unmanned aerial vehicle // Proc. 26th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2019, 2019.