ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 6, с. 742–747

УДК 533.6.011

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЗА ОТОШЕДШИМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

© 2021 г. Г. Б. Сизых[1],*

[1] *Московский авиационный институт, Москва, Россия*

**e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.
После доработки 15.07.2021 г.
Принята к публикации 25.08.2021 г.

Рассматривается стационарное течение идеального совершенного газа, сформированное в сверхзвуковом однородном набегающем потоке за отошедшим скачком уплотнения перед выпуклым телом в общем пространственном случае. Анализ проводится на основе уравнений Эйлера. Предполагается, что в области между скачком и выпуклой головной частью обтекаемого тела скорость равна нулю только в передней точке торможения. Исследуются векторные линии вектора **a**, представляющего собой векторное произведение скорости и градиента энтропийной функции. Исследование опирается на известное свойство этих линий, состоящее в том, что они либо начинаются и заканчиваются на скачке, либо замкнуты. В результате проведенного исследования устанавливается, что криволинейный интеграл от произведения котангенса угла φ на температуру, деленного на величину скорости газа, по любой замкнутой векторной линии **a** равен нулю.

Ключевые слова: критерий Гельмгольца–Зоравского, интегральный инвариант, изоэнтальпийные течения, завихренность, отошедший скачок уплотнения

DOI: 10.31857/S0032823521060102

При обтекании однородным сверхзвуковым потоком отошедший головной скачок уплотнения образуется около тела с затупленной головной частью или с большим углом наклона в передней угловой точке, превышающим предельный угол, до которого возможен присоединенный скачок. Поверхность этого скачка искривленная и выпуклая в сторону набегающего потока, поэтому течение за ним вихревое. Для общего пространственного случая показано [1, 2], что в течении за отошедшим скачком уплотнения вихревые линии и часть векторных линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$, где $\mathbf{V}$ – скорость, σ – энтропийная функция, замкнуты и один раз охватывают линию тока, которая пересекает скачок по нормали. Следуя [1], эту линию тока будем называть лидирующей линией тока. Показано [1], что завихренность на лидирующей линии тока равна нулю. Согласно теореме Крокко [3], для течений с постоянной удельной полной энтальпией (какими являются течения за скачком при однородном сверхзвуковом набегающем потоке) вихревые линии лежат на изоэнтропийных поверхностях. Очевидно, что на таких же поверхностях лежат и векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$. Известен интегральный инвариант [4], связанный с замкнутыми вихревыми линиями в течениях за отошедшим скачком и обобщающий инвариант Крокко [5] для незакрученных осесимметричных течений (сохранение вдоль линий тока отношения величины завихренности $\Omega = |\mathbf{\Omega}|$, где $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{V}$, к произведению давления p и расстояния до оси симметрии).

Этот интегральный инвариант есть величина $\oint_{\gamma_\Omega}(p/\Omega)dl$, одинаковая для всех (замкнутых) вихревых линий γ_Ω, лежащих на одной и той же изоэнтропийной поверхности (l — переменная длина дуги на линии γ_Ω).

В настоящей работе получен интегральный инвариант, связанный с семейством замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\nabla\sigma$. Для незакрученных осесимметричных течений эти линии совпадают с вихревыми линиями, но в общем пространственном случае они могут не совпадать с вихревыми линиями. Как и в ряде других исследований [1, 4, 6], наряду с течением газа, ниже рассматривается течение вспомогательной воображаемой среды, частицы которой, составляя в какой-то момент времени векторную линию заданного векторного поля (в данном случае речь пойдет о поле $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\nabla\sigma$), продолжают составлять векторную линию этого векторного поля во все время своего движения. Для краткости, про такие частицы будем говорить, что они переносят векторные линии этого поля. Скорость воображаемых частиц определяется с помощью критерия Гельмгольца—Зоравского [7], обобщающего известные теоремы Гельмгольца о вихрях.

1. Уравнения движения и следствие критерия Гельмгольца—Зоравского. Давление p и плотность газа ρ связаны соотношением $p = \sigma\rho^k$, где k — показатель адиабаты, σ — энтропийная функция, которая постоянна вдоль линий тока и для рассматриваемых течений может принимать (за скачком) разные значения на различных линиях тока. Поскольку набегающий сверхзвуковой поток считается однородным, то удельная полная энтальпия $k(k-1)^{-1}p\rho^{-1} + V^2/2$, где $V = |\mathbf{V}|$, всюду одинакова (изоэнтальпийное течение). Стационарное движение газа подчиняется уравнению неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ и уравнению Эйлера, которое для настоящего исследования запишем в форме Крокко [3]

$$\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} = (k-1)^{-1}p\rho^{-1}\sigma^{-1}\nabla\sigma \tag{1.1}$$

Функции $\mathbf{V}$, ρ и p предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственным координатам. Также предполагается, что в области между скачком и головной частью обтекаемого тела скорость $\mathbf{V}$ всюду, кроме передней точки торможения, отлична от нуля.

Сформулируем следствие из критерия Гельмгольца—Зоравского [7] для частного случая стационарного и соленоидального векторного поля $\mathbf{c}$.

Утверждение 1. Если в области G выполнено равенство

$$\mathbf{c}\times\operatorname{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{q}) = 0, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{div}\mathbf{c} = 0$ и $\partial\mathbf{c}/\partial t = 0$, то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени сегмент векторной линии $\mathbf{c}$, лежащий в области G, двигаясь со скоростью $\mathbf{q}$, будут составлять сегмент одной из векторных линий $\mathbf{c}$ в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G). Такие воображаемые частицы будем называть q-частицами. Ниже в качестве вектора $\mathbf{c}$ будет рассмотрен вектор $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\nabla\sigma$, который в стационарных течениях за скачком не зависит от времени. Поэтому требование $\partial\mathbf{c}/\partial t = 0$ далее упоминаться не будет.

2. Интегральный инвариант. Как сказано во введении, некоторые векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\nabla\sigma$ (расположенные ближе к скачку) могут начинаться и заканчиваться на скачке, а другие линии (расположенные ближе к головной части) — замкнуты и не имеют общих точек со скачком [2]. При этом, как следует из результата [8], в течении за отошедшим скачком модули $|\mathbf{a}|$ и $|\nabla\sigma|$ отличны от нуля всюду, кроме лидирующей линии тока (где завихренность равна нулю) и точки торможения (где скорость равна нулю). Пусть $\gamma_{\mathbf{a}}$ — одна из замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\nabla\sigma$, не имеющая общих

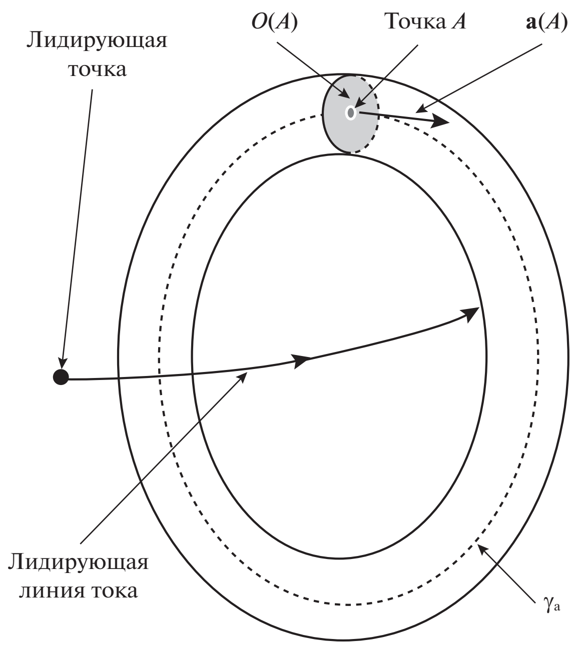

Рис. 1. Точка A лежит на замкнутой векторной линии $\gamma_{\mathbf{a}}$. Область G состоит из векторных линий a, проходящих через плоскую окрестность $O(A)$.

точек со скачком. Пусть, далее, A – произвольно выбранная точка на линии $\gamma_{\mathbf{a}}$, α – плоскость, проходящая через точку A и пересекающая линию $\gamma_{\mathbf{a}}$ по нормали (т.е. $\mathbf{a}(A)$ – нормаль к α). Линия $\gamma_{\mathbf{a}}$ не имеет общих точек со скачком и, следовательно, отдалена от него на ненулевое расстояние. Поэтому на плоскости α существует такая (плоская) окрестность $O(A)$ точки A, что все векторные линии $\mathbf{a}$ пересекают эту окрестность под острым углом к нормали и замкнуты. Гомеоморфную тору область, представляющую собой объединение всех векторных линий $\mathbf{a}$, проходящих через $O(A)$, обозначим G (рис. 1). Удалим из области G точки окрестности $O(A)$, получим разрезанную область $G' = G \backslash O(A)$.

Найдем скорость воображаемых $q_{\mathbf{a}}$-частиц, переносящих векторные линии $\mathbf{a}$ внутри разрезанной области G'. Из (1.1) следует, что $\Omega \cdot \nabla\sigma = 0$. Поэтому $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \operatorname{div}(\mathbf{V} \times \nabla\sigma) = \Omega \cdot \nabla\sigma - \mathbf{V} \cdot \operatorname{rot}(\nabla\sigma) = 0$. Следовательно, для поиска скорости $\mathbf{q}_{\mathbf{a}}$ можно использовать утверждение 1 (верное для соленоидальных полей). Запишем формулу (1.2), заменив в ней вектор $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$

$$(\mathbf{V} \times \nabla\sigma) \times \operatorname{rot}\left((\mathbf{V} \times \nabla\sigma) \times \mathbf{q}_{\mathbf{a}}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Будем искать скорость $q_{\mathbf{a}}$-частиц в виде

$$\mathbf{q}_{\mathbf{a}} = \lambda V^{-2}\mathbf{V} + \left|\nabla\sigma\right|^{-2} \nabla\sigma, \tag{2.2}$$

где λ – искомое гладкое скалярное поле. Заметим, что на данном этапе исследования еще не известно, существует ли поле λ, дающее решение (2.1).

Непосредственной проверкой с использованием известных формул векторного анализа и с учетом равенств $\mathbf{V} \cdot \nabla\sigma = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla\sigma = 0$ можно убедиться, что уравнение (2.1) после подстановки в него (2.2) сначала приводится к виду $(\mathbf{V}\times\nabla\sigma)\times\operatorname{rot}(\lambda\nabla\sigma-\mathbf{V})=0$, а затем – к векторному равенству $((\mathbf{V}\times\nabla\sigma)\cdot\nabla\lambda)\nabla\sigma+(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})\nabla\sigma=0$, которое равносильно (поскольку $\nabla\sigma\neq 0$) скалярному равенству $(\mathbf{a}\cdot\nabla\lambda)+(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})=0$. Если обозначить единичный касательный вектор к векторной линии $\mathbf{a}$ через $\mathbf{e_a}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, то последнее равенство можно записать следующим образом

$$(\mathbf{e_a}\cdot\nabla\lambda)=-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})/|\mathbf{a}| \tag{2.3}$$

Если скалярное поле λ будет удовлетворять (2.3) в G', то скорость (2.2) будет удовлетворять (2.1) в G'. Такое поле λ существует (и не единственно). Действительно, на одной из сторон разреза области G окрестностью $O(A)$ зададим $\lambda=0$. Назовем эту сторону разреза первой, а другую – второй стороной разреза. Продолжим функцию λ во внутренние точки области G' интегрированием уравнения (2.3) вдоль векторных линий $\mathbf{a}$. В результате функция λ окажется заданной и удовлетворяющей (2.3) во всех точках области G'.

Теперь, когда существование функции λ доказано, воспользуемся методом, предложенным в [9] (в отличие от [9], где рассматривались замкнутые вихревые линии, здесь рассматриваются замкнутые линии $\mathbf{a}$). Перейдем к рассмотрению движения $q_\mathbf{a}$-частиц, лежащих в начальный момент времени на линии $\gamma_\mathbf{a}$ (проходящей через точку A) и движущихся со скоростью (2.2), где функция λ получена описанным выше способом. Предельное значение скорости $\mathbf{q_a}$ на первой стороне разреза равно $|\nabla\sigma|^{-2}\nabla\sigma$, а на второй стороне $\mathbf{q_a}=\lambda_0 V^{-2}\mathbf{V}+|\nabla\sigma|^{-2}\nabla\sigma$, где $\lambda_0=-\oint_{\gamma_\mathbf{a}}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})/|\mathbf{a}|\,dl$ (l – переменная длина дуги на линии $\gamma_\mathbf{a}$). Но линия $\gamma_\mathbf{a}$ непрерывна и при переносе $q_\mathbf{a}$-частицами переходит в непрерывные векторные линии $\mathbf{a}$. Поэтому предельные значения $\mathbf{q_a}$ должны иметь одинаковые нормальные к $\gamma_\mathbf{a}$ составляющие. Отсюда получается, что $\lambda_0=0$ или

$$\oint_{\gamma_\mathbf{a}}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Omega})/|\mathbf{a}|\,dl=0 \tag{2.4}$$

Поскольку векторная линия $\gamma_\mathbf{a}$ была выбрана произвольно, равенство (2.4) представляет собой интегральный инвариант, верный для всех замкнутых векторных линий $\mathbf{a}=\mathbf{V}\times\nabla\sigma$.

Исключим градиент энтропии из выражения для модуля вектора $\mathbf{a}$. Учитывая ортогональность скорости и градиента энтропии и используя (1.1), имеем

$$|\mathbf{a}|=(k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}|\cdot|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}|=(k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}|^2|\Omega|\sin\varphi \tag{2.5}$$

где φ – угол между векторами скорости $\mathbf{V}$ и завихренности $\mathbf{\Omega}$. Все векторные линии $\mathbf{a}=\mathbf{V}\times\nabla\sigma$ лежат на изоэнтропийных поверхностях. Поэтому подынтегральная функция в (2.4) может быть умножена на любую функцию энтропии (в том числе и на константу, связывающую отношение p/ρ с температурой T), и после этого интеграл (2.4) останется равным нулю. Вместе с (2.5) это позволяет утверждать, что *для всех замкнутых линий* $\gamma_\mathbf{a}$ *вектора* $\mathbf{a}=\mathbf{V}\times\nabla\sigma$

$$\oint_{\gamma_\mathbf{a}}\frac{T\operatorname{ctg}\varphi}{|\mathbf{V}|}dl=0, \tag{2.6}$$

где T – температура, φ – угол между векторами скорости $\mathbf{V}$ и завихренности $\mathbf{\Omega}$.

3. Сравнение интегральных инвариантов. В отличие от инварианта $\oint_{\gamma_\Omega}(p/\Omega)dl$ [4], новый инвариант (2.6) может использоваться только для анализа несимметричных течений. Действительно, в незакрученных осесимметричных течениях $\operatorname{ctg}\varphi\equiv 0$, и поэтому инвариант (2.6) дает только тривиальную информацию типа 0 = 0. Однако в несимметричных течениях инвариант (2.6) более информативен. Во-первых, в отличие от инварианта [4], значение интеграла (2.6) известно (оно равно нулю). Во-вторых, это нулевое значение интеграл (2.6) принимает на всех замкнутых линиях $\gamma_{\mathbf{a}}$, а неизвестное априори значение $\oint_{\gamma_\Omega}(p/\Omega)dl$ сохраняется только на вихревых линиях γ_Ω, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности.

Заключение. С использованием критерия Гельмгольца–Зоравского получен интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения (формула (2.6)). Этот инвариант может использоваться для качественного анализа несимметричных 3D-течений и для проверки численных, асимптотических и других приближенных расчетов таких течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Adv. in Aerodyn. 2019. V. 1. № 15.
2. *Сизых Г.Б.* Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 3. С. 304–310.
3. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Иностр. лит., 1961. 588 с.
4. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // Изв. вузов. Матем. 2019. № 12. С. 52–56.
5. *Krocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1937. V. 17. № 1. P. 1–7.
6. *Сизых Г.Б.* Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 377–383.
7. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Indiana: Univ. Press, 1954. 232 p.
8. *Сизых Г.Б.* О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13. № 3. С. 144–147.
9. *Сизых Г.Б.* Замкнутые вихревые линии в жидкости и газе // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 3. С. 407–416.

Integral Invariant of Ideal Gas Flows behind a Detached Bow Shock

G. B. Sizykh[a,#]

[a] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

We consider a steady flow of an ideal perfect gas formed in a supersonic homogeneous incoming flow behind a detached shock wave in front of a convex body in the general spatial case. The analysis is carried out on the basis of the Euler equations. It is assumed that in the region between the shock and the convex head part of the streamlined body, the velocity is zero only at the forward stagnation point. Vector lines of vector **a**, which is the vector product of the velocity and the gradient of the entropy function, are investigated. The study is based on the known property of these lines, which is that they either begin and end on the shock, or are closed. As a result of the study, it is established that a curvilinear integral of the product of the cotangent of the angle φ and the temperature, divided by the value of the gas velocity, along any closed vector line **a** is equal to zero.

Keywords: Helmholtz–Zoravsky criterion, integral invariant, isenthalpic flows, vorticity, detached shock wave

REFERENCES

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Adv. in Aerodyn., 2019, vol. 1, no. 15.
2. *Sizykh G.B.* System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave // Fluid Dyn., 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903.
3. *Von Mises R.* Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y.: Acad. Press, 1958. 514 p.
4. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Generalization of the Crocco invariant for 3D gas flows behind detached bow shock wave // Russ. Math., 2019, vol. 63, pp. 45–48.
5. *Krocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1937, vol. 17, no. 1, pp. 1–7.
6. *Sizykh G.B.* Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911.
7. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Indiana: Univ. Press, 1954. 232 p.
8. *Sizykh G.B.* About the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock. Proceedings of MIPT. 2021. vol. 13, no. 3, pp. 144–147 (in Russian)
9. *Sizykh G.B.* Closed vortex lines in fluid and gas // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416.