

---

---

УДК 539.3:534.26

**ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ  
С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ, РАСПОЛОЖЕННОМ  
ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

© 2021 г. Л. А. Толоконников<sup>1,\*</sup>, Д. Ю. Ефимов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Тульский государственный университет, Тула, Россия*

*\*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

*\*\*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.

После доработки 16.07.2021 г.

Принята к публикации 25.08.2021 г.

Получено аналитическое решение задачи дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. Представлены результаты расчетов акустического поля в дальней зоне.

*Ключевые слова:* дифракция звука, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, упругое полупространство

**DOI:** 10.31857/S0032823521060114

**1. Введение.** Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. В настоящее время предложены различные виды покрытий для тел разной геометрической формы. Например, рассмотрены [1] прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Обсуждается [2, 3] задача о нерассеивающем покрытии с протяженной реакцией, делающем цилиндрическое тело акустически невидимым. Выявлены [4] условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Предложено [5] изменять характеристики рассеяния тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий при соответствующем подборе законов неоднородности для механических параметров покрытия. Такие непрерывно-неоднородные покрытия можно реализовать с помощью многослойной системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями плотности и упругих постоянных. С математической точки зрения такое представление эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного покрытия, кусочно-постоянными функциями.

Возможность изменения звукоотражающих свойств цилиндрических тел с помощью неоднородных упругих покрытий обсуждалась в ряде работ. Исследовано [5, 6] рассеяние плоских и цилиндрических звуковых волн абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием. Решены [7, 8] задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным и дискретно-неоднородным упругими покрытиями. Исследована [9] дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Осуществлено [10] моделирование неоднородного по-

крытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами. Найдены функциональные зависимости для плотности и модулей упругости материала покрытия, обеспечивающие наименьшее отражение звука в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. В указанных выше работах полагалось, что тела находятся в безграничном пространстве.

Исследование дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными упругими покрытиями, расположенными вблизи границ раздела сред, имеет важное теоретическое и практическое значение. Результаты таких исследований представляют интерес для гидроакустики при создании покрытий тел с требуемыми звукоотражающими свойствами, при разработке функционально-градиентных и композитных материалов для борьбы с шумом.

Изучена дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием, находящемся вблизи идеальной плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой), при нормальном падении плоской волны на цилиндр [11] и при произвольном падении [12]. Решена задача [13] о рассеянии звуковых волн жестким цилиндром с неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, у которого одна граница является абсолютно жесткой, а другая – акустически мягкой. В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием, расположенным вблизи упругого полупространства.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечный однородный и изотропный упругий цилиндр радиуса  $r_0$ , материал которого характеризуется плотностью  $\rho_0$  и упругими постоянными  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен  $r_1$ . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью  $\rho_*$  и скоростью звука  $c$ , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью  $\rho_1$  и упругими постоянными  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии  $d$ .

Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y, z$  так, чтобы координатная ось  $z$  совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ .

Полагаем, что плотность материала покрытия  $\rho$  является непрерывной функцией радиальной координаты  $r$ , а модули упругости материала покрытия  $\lambda$  и  $\mu$  – дифференцируемыми функциями координаты  $r$ . В системе координат  $x, y, z$  граница упругого полупространства определяется уравнением  $y = -d$  (рис. 1).

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится линейный источник, параллельный оси  $z$ , который генерирует монохроматическую цилиндрическую звуковую волну с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . Положение источника определяется точкой  $M_0$ , имеющей цилиндрические координаты  $(r_i, \varphi_i)$ . Точка наблюдения  $M$  имеет координаты  $(r, \varphi)$ .

Определим акустическое поле в жидком полупространстве.

**3. Аналитическое решение задачи.** Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой осесимметричным цилиндрическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = AG_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \exp(-i\omega t), \quad (3.1)$$

где  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)$  – функция Грина для свободного пространства,  $H_0(x)$  – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка,  $k = \omega/c$  – волно-

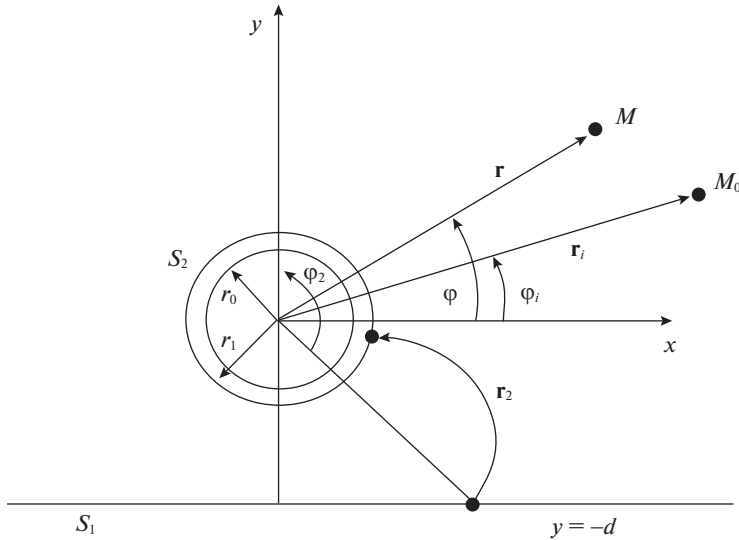


Рис. 1.

вое число жидкости,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_i$  – радиус-векторы точек  $M$  и  $M_0$ ,  $t$  – время. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  далее опускается.

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (3.2)$$

где  $\Psi_{s1}$  – потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства,  $\Psi_{s2}$  – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Скорость частиц  $\mathbf{v}$  и акустическое давление  $p$  в содержащей жидкости определяют формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega\Psi$$

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца [14]

$$\Psi(\mathbf{r}) = AG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \int_S \left[ \Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS \quad (3.3)$$

Здесь  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  – двумерная функция Грина для уравнения Гельмгольца,  $S = S_1 + S_2$ ,  $S_1$  – поверхность упругого полупространства,  $S_2$  – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности  $S_1$  точка  $\mathbf{r}_2$  находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности  $S_1$ , а в интеграле по поверхности  $S_2$  точка  $\mathbf{r}_2$  находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности  $S_2$ .

Для того, чтобы в (3.3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности  $S_1$  воспользуемся функцией Грина [14]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \quad (3.4)$$

где [15]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta|y - y_2|] \frac{d\xi}{\eta} \quad (3.5)$$

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1'(\xi) \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta(y + y_2)] \frac{d\xi}{\eta} \quad (3.6)$$

Здесь  $A_1'(\xi) = \exp(i2k d \eta) A_1(\xi)$ ,  $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $A_1(\xi)$  – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент  $A_1(\xi)$  находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной  $k\xi$  и вертикальной  $-k\eta$  компонентами волнового вектора  $\mathbf{k}$ , в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства.

Функция Грина (3.4) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругого полупространства тем же граничным условиям, что и потенциал скорости акустического поля

$$\text{при } y = -d : -i\omega u_{1y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \sigma_{1yy} = -i\omega \rho_* G, \quad \sigma_{1xy} = 0,$$

где  $u_{1y}$  и  $\sigma_{1yy}$ ,  $\sigma_{1xy}$  – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве. При таком выборе функции Грина интеграл по поверхности полупространства  $S_1$  в (3.3) обращается в ноль, и остается только интеграл по поверхности цилиндра  $S_2$ .

При замене переменной  $\xi = \sin \theta$  переходим от  $A_1(\xi)$  к коэффициенту отражения плоской волны, падающей под углом  $\theta$  на границу упругого полупространства,  $A_1(\theta)$ . Задача об отражении плоской звуковой волны от упругого полупространства решена в [16]. Коэффициент отражения имеет вид

$$A_1(\theta) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (3.7)$$

где

$$d_1 = k_y \left[ \lambda_1 k_{1\tau}^2 (k_{1\tau}^2 - 2k_x^2) + 2\mu_1 k_{1y} (2k_x^2 k_{1\tau y} + k_{1y}^2 k_{1\tau}^2 - 2k_x^2 k_{1ly}) \right]$$

$$d_2 = k_{1y} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*$$

Здесь  $k_x = k \sin \theta$ ,  $k_y = k \cos \theta$ ,  $k_{1l} = \omega/c_{1l}$  и  $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$  – волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве,  $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$  и  $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$  – скорости продольных и поперечных волн,  $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2}$ ,  $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2}$ .

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  в виде разложения [17]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_2)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_2), & r < r_2 \\ J_n(kr_2) H_n(kr), & r > r_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $J_n(x)$  и  $H_n(x)$  – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка  $n$  соответственно.

В (3.6) сделаем замену переменных  $\xi = \sin \theta$ ,  $\eta = \cos \theta$  и перейдем к цилиндрической системе координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$ . Тогда  $G_1$  примет вид

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi\Gamma} \int A'_1(\theta) \exp[ikr \sin(\varphi + \theta)] \exp[-ikr_2 \sin(-\varphi_2 + \theta)] d\theta, \quad (3.9)$$

где  $\Gamma$  – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости  $\theta$  (пределы интегрирования от  $-\pi/2 + i\infty$  до  $\pi/2 - i\infty$ ).

Используя разложение [17]

$$\exp(\pm ikr \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m J_m(kr) \exp(im\varphi),$$

из (3.9) получаем

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}, \quad (3.10)$$

где

$$g_l = \frac{1}{\pi\Gamma} \int A_1(\theta) \exp[i(2kd \cos \theta + l\theta)] d\theta \quad (3.11)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра  $S_2$ . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности  $S_2$  в виде разложений в ряды Фурье

$$\Psi|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q \exp(iq\varphi) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q \exp(iq\varphi), \quad (3.13)$$

где  $p_q$  и  $v_q$  – коэффициенты, подлежащие определению.

В уравнении (3.3) устремим точку наблюдения на поверхность  $S_2$  и учтем, что при выборе функции Грина в виде (3.4) достаточно ограничиться интегрированием по поверхности  $S_2$ . Подставим в левую часть (3.3) разложение (3.12), а в первое слагаемое правой части (3.3) – функцию Грина в виде суммы (3.4), составленной из выражений (3.8) и (3.10), в которых заменим  $r_2$ ,  $\varphi_2$  на  $r_1$ ,  $\varphi_1$ . Далее подставим разложения (3.12), (3.13) и функцию Грина (сумма (3.8) и (3.10)) в подынтегральное выражение уравнения (3.3). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной  $r_2$ . При выполнении дифференцирования выражения (3.8) следует выбрать нижнюю строчку в формуле (3.8). После проведения указанных операций следует положить  $r = r_2 = r_1$ .

Осуществив интегрирование по поверхности цилиндра ( $dS_2 = r_1 d\varphi_2$ ,  $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ ) с учетом ортогональности экспоненциальных множителей и используя выражение для вронскиана [17]

$$J_n(kr_1) H'_n(kr_1) - J'_n(kr_1) H_n(kr_1) = 2i/(\pi kr_1),$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $p_q$ ,  $v_q$

$$p_q + \alpha_q v_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta_{qn}^{(1)} p_n + \beta_{qn}^{(2)} v_n) = X_q, \quad q = -\infty, \dots, \infty, \quad (3.14)$$

где

$$\alpha_q = -\frac{H_q(kr_1)}{kH'_q(kr_1)}, \quad \beta_{qn}^{(1)} = (-1)^q \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \quad \beta_{qn}^{(2)} = (-1)^{q+1} \frac{J_n(kr_1)}{kH'_q(kr_1)} g_{n+q}$$

$$X_q = -\frac{A}{2\pi kr_1 H'_q(kr_1)} \left[ H_q(kr_1) \exp(-iq\varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_1) \exp(-im\varphi_i) g_{m+q} \right]$$

Отметим, что коэффициенты  $p_q$  и  $v_q$  связаны между собой. Эту связь через значения составляющих вектора смещения частиц покрытия на его внешней поверхности установим ниже.

Рассмотрим вычисление коэффициентов  $g_l$ , определяемых выражением (3.11). Интеграл (3.11) разобьем на три интеграла по участкам  $(-\pi/2 + i\infty, -\pi/2)$ ,  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $(\pi/2, \pi/2 - i\infty)$ . Выполним замену переменных  $\theta = -\pi/2 + i\gamma_1$  в первом и  $\theta = \pi/2 - i\gamma_2$  в третьем интегралах.

В результате получаем

$$g_l = (I_{1l} + I_{2l} + I_{3l})/\pi, \quad (3.15)$$

где

$$I_{1l} = (-i)^{l+1} \int_0^{\infty} A_1(\gamma_1) \exp(-2kd \cdot \text{sh } \gamma_1) \exp(-l\gamma_1) d\gamma_1$$

$$I_{2l} = 2 \int_0^{\pi/2} A_1(\theta) \exp(i2kd \cos \theta) \cos l\theta d\theta$$

$$I_{3l} = i^{l-1} \int_0^{\infty} A_1(\gamma_2) \exp(-2kd \text{sh } \gamma_2) \exp(l\gamma_2) d\gamma_2$$

Здесь  $A_1(\gamma_j)$  определяется по формуле (3.7), в которой следует положить

$$k_x = (-1)^j k \text{ch } \gamma_j, \quad k_y = ik \text{sh } \gamma_j \quad j = (1, 2)$$

Теперь воспользуемся результатами [9], где радиальная  $u_r$  и угловая  $u_\varphi$  компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)]$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)], \quad (3.16)$$

где функции  $U_{1q}(r)$ ,  $U_{2q}(r)$  для каждого  $q$  являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \hat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r), U_{2q}(r))^T$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_q$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_q$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_q$  – матрицы второго порядка с элементами [9].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на

ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения

$$\text{при } r = r_1: \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.18)$$

где  $u_r$  и  $v_r$  — нормальные компоненты векторов смещения и скорости,  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\varphi}$  — компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [18] с учетом (3.16), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ (\lambda + 2\mu) U'_{1q}(r) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r) + iq U_{2q}(r)) \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] \\ \sigma_{r\varphi} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[ \frac{iq}{r} U_{1q}(r) + U'_{2q}(r) - \frac{U_{2q}(r)}{r} \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя (3.12), (3.13), (3.16) и (3.19) в первые два граничных условия (3.18), получаем

$$\begin{aligned} v_q &= -i\omega U_{1q}(r_1) \exp(-iq\varphi_i) \\ p_q &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[ (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1q}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1q}(r_1) + iq U_{2q}(r_1)) \right] \exp(-iq\varphi_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя выражения (3.20) в систему (3.14), получаем краевое условие при  $r = r_1$  для нахождения частного решения системы (3.17)

$$\begin{aligned} &F_{1q} U'_{1q}(r_1) + F_{2q}^{(1)} U_{1q}(r_1) + F_{3q} U_{2q}(r_1) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ F_{1n} U'_{1n}(r_1) + F_{2n}^{(2)} U_{1n}(r_1) + F_{3n} U_{2n}(r_1) \right] F_{4qn} = X_q, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1q} &= \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i) \\ F_{2q}^{(j)} &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[ \frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(kr_1)}{kZ_q^{(j)}(kr_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1\rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i) \\ F_{4qn} &= (-1)^q \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \quad Z_q^{(1)}(kr_1) = H_q(kr_1), \quad Z_q^{(2)}(kr_1) = J_q(kr_1) \end{aligned}$$

Второе краевое условие, которому должна удовлетворять система (3.17) при  $r = r_1$ , находим из третьего граничного условия (3.18) с учетом (3.19)

$$U'_{2q}(r_1) + \frac{iq}{r_1} U_{1q}(r_1) - \frac{1}{r_1} U_{2q}(r_1) = 0 \quad (3.22)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

$$\text{при } r = r_0: \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad (3.23)$$

где  $u_{0r}$ ,  $u_{0\varphi}$  и  $\sigma_{0rr}$ ,  $\sigma_{0r\varphi}$  — компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных [9], из (3.23) получаем еще два условия, которым должна удовлетворять система (3.17) при  $r = r_0$

$$\begin{aligned} a_{q11}U'_{1q}(r_0) + f_{q11}U_{1q}(r_0) + f_{q12}U_{2q}(r_0) &= 0 \\ a_{q22}U'_{2q}(r_0) + f_{q21}U_{1q}(r_0) + f_{q22}U_{2q}(r_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выражения для коэффициентов в уравнениях (3.24) приведены в [5].

Найдем решение краевой задачи (3.17), (3.21), (3.22), (3.24) методом сплайн-коллокации [19] для  $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N$ , выбрав в качестве порядка усечения величину  $N = 2[kr_1] + 1$ , где  $[ ]$  – целая часть числа.

После нахождения  $U_{1q}(r)$  и  $U_{2q}(r)$  определяем по формулам (3.20) коэффициенты  $p_q, v_q$ . В результате получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра в виде (3.12) и (3.13).

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения  $M$ . Обратимся к интегральному уравнению (3.3), используя представление потенциала  $\Psi$  в виде (3.2). Запишем выражения для  $\Psi_0, \Psi_{s1}, \Psi_{s2}$ . Будем иметь

$$\Psi_0 = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_i), & r < r_i \\ J_n(kr_i) H_n(kr), & r > r_i \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Psi_{s1} = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m} \quad (3.26)$$

$$\Psi_{s2} = \int_{S_2} \left[ \Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS_2 \quad (3.27)$$

Подставим в (3.27) разложения (3.12), (3.13), а также функцию Грина в виде суммы (3.4), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (3.8), а второе слагаемое – формулой (3.10). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{s2} &= \frac{i\pi r_1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ p_q k J'_q(kr_1) - v_q J_q(kr_1) \right] \times \\ &\times \left[ H_q(kr) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) g_{n+q} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

где коэффициенты  $p_q$  и  $v_q$  определяются согласно (3.20).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_{s1} + \Psi_{s2} \quad (3.29)$$

**4. Численные исследования.** На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля  $|\Psi_s/A|$  в дальней зоне ( $r = 100$  м).

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ( $\rho_0 = 2.7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_0 = 5.3 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_0 = 2.6 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) радиуса  $r_0 = 0.8$  м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ( $\rho_* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние  $d = 1 + r_1$ . Упругое полупространство характеризуется параметрами:  $\rho_1 = 7.85 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_1 = 1.2 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,



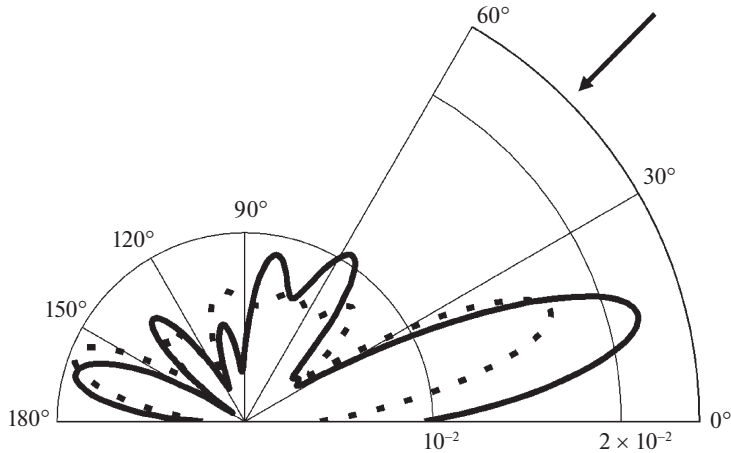


Рис. 2.

$\mu_1 = 7.9 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью  $\rho^0 = 1.07 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и характерными модулями упругости  $\lambda^0 = 3.9 \times 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu^0 = 9.8 \times 10^8$  Н/м<sup>2</sup> (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (r - r_0) / (r_1 - r_0) + 0.5, \quad r_0 \leq r \leq r_1$$

Предполагалось, что линейный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами  $r_i = 4$  и  $\varphi_i = \pi/4$ .

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды рассеяния  $|\Psi_s/A|$  от полярного угла  $\varphi$  при волновом размере тела  $kr_1 = 5$ . На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла  $\varphi$ . Стрелкой показано направление распространения падающей волны.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды рассеяния  $|\Psi_s/A|$  в направлении на источник ( $\varphi = \pi/4$ ) от волнового размера цилиндра  $kr_1$  в интервале  $4.5 \leq kr_1 \leq 7$ .

Сплошные линии на рис. 2 и 3 соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные — однородному покрытию.

Как видно из диаграмм направленности и частотных характеристик, свойства покрытия значительно влияют на характер рассеяния звука упругим цилиндром.

На рис. 4 приведены диаграммы направленности, рассчитанные при  $kr_1 = 5$  для случая цилиндра с неоднородным покрытием, расположенного вблизи границы упругого полупространства (сплошная линия), и для такого же цилиндра, расположенного в свободном пространстве (пунктирная линия).

Как показывают расчеты, присутствие подстилающей поверхности сильно влияет на дифракционную картину.

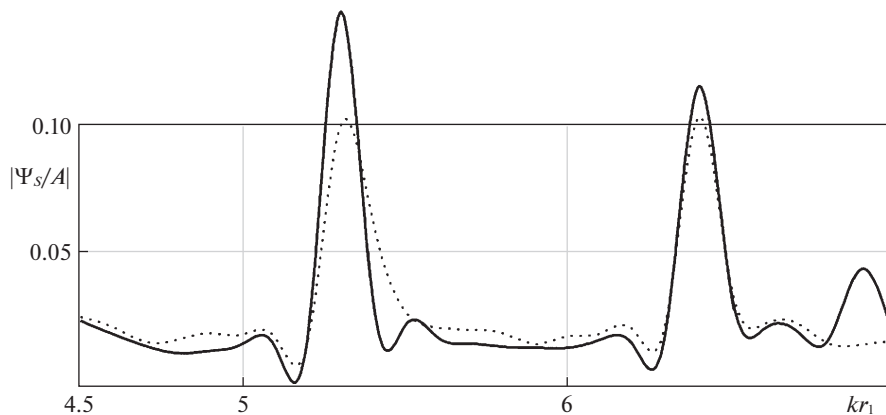


Рис. 3.

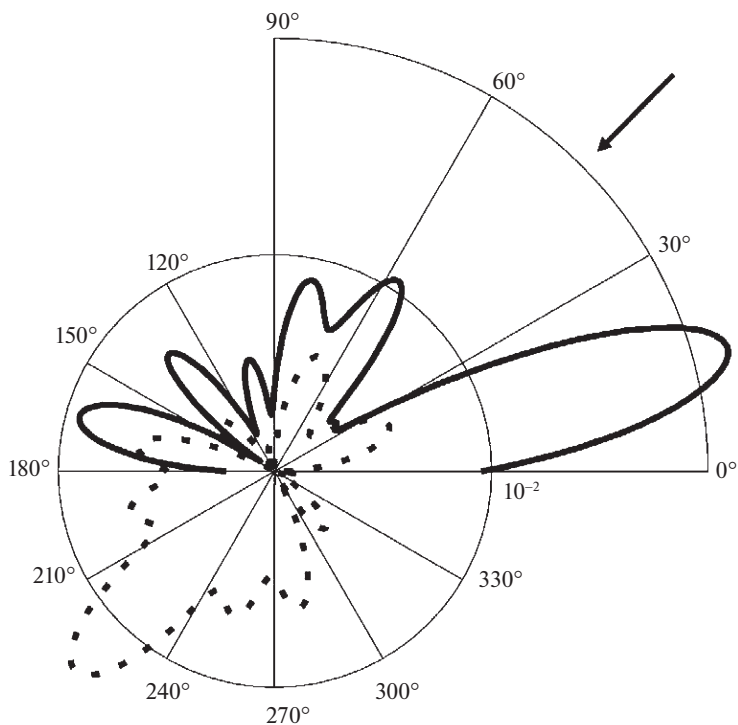


Рис. 4.

Отметим, что на основе предложенного решения можно рассмотреть случаи, когда рассеиватель расположен вблизи идеальных подстилающих поверхностей. Граничное условие при  $y = -d$  для функции Грина (3.4) имеет вид

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

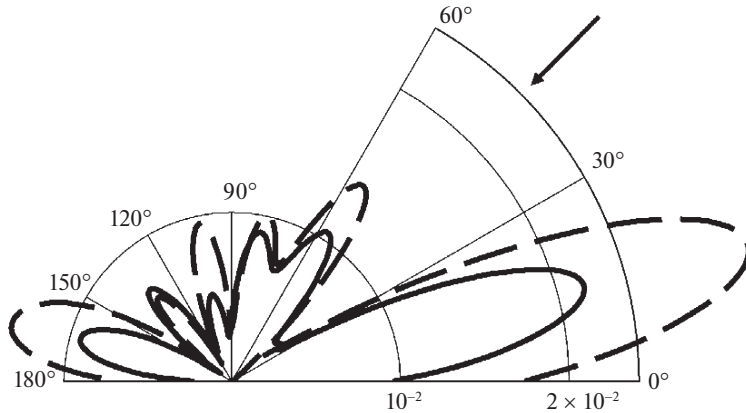


Рис. 5.

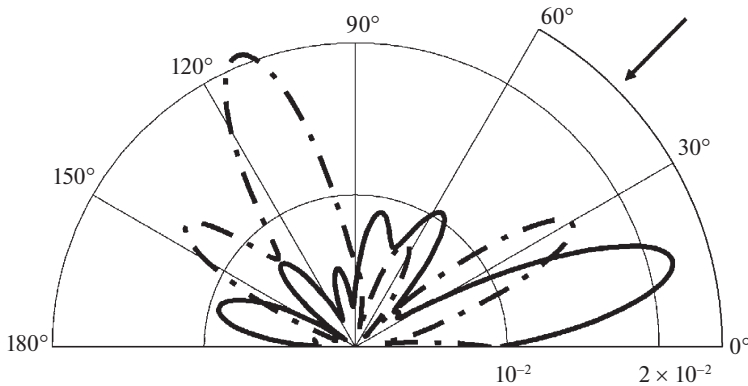


Рис. 6.

если поверхность является абсолютно жесткой, и

$$G = 0, \quad (4.2)$$

если поверхность является акустически мягкой.

Условие (4.1) выполняется при  $A_1 = 1$ , а условие (4.2) – при  $A_1 = -1$  [14].

На рис. 5 и 6 представлены угловые зависимости  $|\Psi_s/A|$  для цилиндра с неоднородным покрытием при значении волнового размера  $kr_1 = 5$ . На рис. 7 приведены частотные зависимости  $|\Psi_s/A|$  для цилиндра с неоднородным покрытием при  $\varphi = \pi/4$  в интервале  $4.5 \leq kr_1 \leq 7$ . На рис. 5–7 сплошные линии соответствуют случаю упругой поверхности, штриховые – абсолютно жесткой поверхности, штрихпунктирные – акустически мягкой поверхности.

Из графиков видно, что угловые и частотные зависимости в случае упругой подстилающей поверхности значительно отличаются от зависимостей, рассчитанных для идеальных поверхностей.

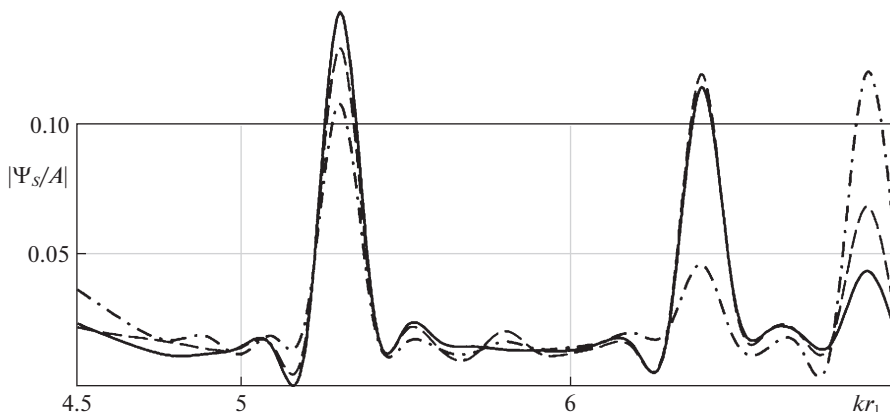


Рис. 7.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустич. ж. 2006. Т. 52. № 6. С. 791–798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустич. ж. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
3. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томила Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустич. ж. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
4. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Пробл. машиностр. и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.
5. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
6. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.
7. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265–274.
8. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
9. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 1. С. 460–472.
10. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 4. С. 189–199.
11. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
12. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сб. 2020. Т. 21. № 4. С. 369–381.
13. Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сб. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.
14. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустич. ж. 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 558 с.
16. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
17. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. Т. 2. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

**Diffraction of Sound Waves on an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating near the Surface of an Elastic Halfspace****L. A. Tolokonnikov<sup>a,#</sup> and D. Yu. Efimov<sup>a,##</sup>**<sup>a</sup> *Tula State University, Tula, Russia*<sup>#</sup> *e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*<sup>##</sup> *e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

An analytical solution is obtained for the diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the surface of an elastic half-space. The calculation results of the acoustic field in the far zone are presented.

*Keywords:* sound diffraction, elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating, elastic halfspace

## REFERENCES

1. *Ivanov V.P.* Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating // *Acoust. Phys.*, 2006, vol. 52, no. 6, pp. 683–690.
2. *Bobrovnikskii Yu.I.* A Nonscattering coating for a cylinder // *Acoust. Phys.*, 2008, vol. 54, no. 6, pp. 758–768.
3. *Bobrovnikskii Yu.I., Morozov K.D., Tomilina T.M.* A periodic surface structure with extreme acoustic properties // *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, no. 2, pp. 127–131.
4. *Kosarev O.I.* Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating // *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, 2012, vol. 46, no. 1, pp. 34–37. (in Russian)
5. *Romanov A.G., Tolokonnikov L.A.* The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
6. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a nonuniform elastic coating // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 3, pp. 202–208. (in Russian)
7. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 2–2, pp. 265–274. (in Russian)
8. *Larin N.V., Tolokonnikov L.A.* The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 164–169.
9. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with a radially inhomogeneous coating // *Chebyshev. sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 460–472. (in Russian)
10. *Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A.* Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 4, pp. 733–742.
11. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, 2018, no. 9, pp. 276–289. (in Russian)
12. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface // *Chebyshev. sb.*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 369–381. (in Russian)
13. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide // *Chebyshev. sb.*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 270–281. (in Russian)
14. *Shenderov E.L.* Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 2, pp. 225–234.
15. *Felsen L.B., Marcuvitz N.* *Radiation and Scattering of Waves.* New Jersey: Englewood Cliffs, 1973.
16. *Brekhovskikh L.M.* *Waves in Layered Media.* Moscow: Nauka, 1973, 344 p. (in Russian)
17. *Ivanov E.A.* *Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies.* Minsk: Nauka i Tekhnika, 1968. 584 p. (in Russian)
18. *Nowacki W.* *Teoria sprzystosci.* Warszawa: PWN, 1973.
19. *Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* *Spline Function Methods.* Moscow: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian)