ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 1, с. 3–17

УДК 521.135

О МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. **Н. И. Амелькин**[1,*]

[1] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*

**e-mail: namelkin@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.
После доработки 20.04.2021 г.
Принята к публикации 20.05.2021 г.

В рамках задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, для которых смещения перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. Из этого семейства выделяется одна модель, в которой гравитационное взаимодействие является строго центральным, а при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек точно описывается законом тяготения Ньютона.

Ключевые слова: закон всемирного тяготения Ньютона, общая теория относительности, модели гравитационного взаимодействия

DOI: 10.31857/S0032823521060023

1. Введение. Обосновывая свою модель гравитационного взаимодействия И. Ньютон “не измышлял гипотез” о природе тяготения, а решал “прямую” задачу динамики, в которой сила, действующая на материальную точку, определяется по наблюдаемому движению этой точки. В модели Ньютона сила тяготения выражается формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2}\frac{\mathbf{R}}{R}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, соединяющий взаимодействующие точки с массами M и m, γ – гравитационная постоянная. Это решение Ньютон получил, основываясь на установленных из наблюдений законах Кеплера.

В рамках модели (1.1) для задачи двух тел уравнение для наблюдаемой переменной $\mathbf{R}$ принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2}\frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(m + M) \tag{1.2}$$

Это уравнение можно трактовать как закон движения точки единичной массы в поле неподвижной точки массы $m + M$.

Как известно, аномалия в движении Меркурия, указывающая на неточность закона тяготения Ньютона (1.1), была обнаружена Урбеном Леверье еще в середине 19 века. По расчетам Леверье [1, 2] аномальное (необъяснимое моделью Ньютона) смещение перигелия Меркурия составляет около 38 угловых секунд за столетие. По современным оценкам оно составляет 43″ за столетие. В поведении других элементов орбиты Меркурия видимых аномалий не обнаружено.

Следует отметить, что в полном смещении перигелия Меркурия указанное выше аномальное смещение составляет около 7%. Остальная часть смещения объясняется в рамках модели Ньютона (1.1) возмущающим влиянием других планет. При этом в смещении перигелия Меркурия, обусловленном влиянием других планет, помимо вековой имеется колебательная компонента, амплитуда которой равна около 18″ [3]. Существенную долю в эту колебательную компоненту вносит возмущение от Юпитера с периодом около 12 лет. Поэтому достоверно определить величину аномального смещения перигелия Меркурия возможно только по результатам наблюдений в течение промежутка времени в десятки лет.

Чтобы выявить по наблюдениям аномальное смещение перигелия для других планет Солнечной системы требуются более длительные промежутки времени, чем для Меркурия, поскольку для них величина этого смещения меньше, а отношение колебательной компоненты, обусловленной влиянием других планет, к среднему смещению существенно больше. Например, для Венеры амплитуда колебательной компоненты в поведении перигелия составляет около 1350″, что почти в сто раз больше, чем среднее наблюдаемое смещение за столетие [3].

Для объяснения аномалий в движении Меркурия было предложено в свое время много разных модификаций закона тяготения Ньютона. Подробный обзор работ на эту тему можно найти в книге Роузвера [4]. Большинство таких модификаций были признаны несостоятельными ввиду того, что они неадекватно объясняли либо наблюдаемое смещение перигелия Меркурия, либо отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца.

Адекватное объяснение наблюдаемых аномалий в движении планет и отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца дает общая теория относительности (ОТО) А. Эйнштейна. С историей развития и современным состоянием этой теории можно ознакомиться в работах [4–7].

В настоящей работе приводятся другие, отличные от ОТО, модификации закона тяготения Ньютона, в рамках которых адекватно объясняются аномальные смещения перигелиев орбит планет (раздел 2) и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца (раздел 3).

Ниже при рассмотрении различных моделей тяготения под центральностью взаимодействия будет подразумеваться тот случай, когда в задаче двух тел для наблюдаемой переменной $\mathbf{R}$, соединяющей взаимодействующие точки, ускорение $\ddot{\mathbf{R}}$ имеет только радиальную компоненту, т.е. $\ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} = 0$.

2. Модификации закона Ньютона с центральным взаимодействием. Автором первых модификаций закона тяготения Ньютона был, видимо, Клод Клеро, который искал объяснение кажущихся тогда аномалий в движении Луны. Клеро предложил следующие две модели закона тяготения [8]:

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{R}\right)\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m M}{R^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{R^2}\right)\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{2.2}$$

Мы здесь подробно рассмотрим только модель (2.1), как наиболее заслуживающую внимания. В рамках этой модели для задачи двух тел уравнение для наблюдаемой переменной $\mathbf{R}$ принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{R}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(m + M) \tag{2.3}$$

В этой модели возмущающее ускорение (добавка к ускорению (1.2) для модели Ньютона) имеет только радиальную компоненту $S = -\mu\,\varepsilon_1 / R^3$. Из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах следует, что такое возмущение влияет только на поведение долготы перигелия $\varpi = \omega + \Omega$ и эксцентриситета e орбиты. Уравнения для этих элементов записываются в виде [9]

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{SR^2}{\mu}\sin\varphi \tag{2.4}$$

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = -\frac{SR^2}{\mu e}\cos\varphi \tag{2.5}$$

Здесь φ – истинная аномалия. В первом приближении теории возмущений, подставляя в уравнения (2.4) и (2.5) уравнение невозмущенной Кеплеровой орбиты

$$R = \frac{P}{1 + e\cos\varphi} \tag{2.6}$$

и вычисляя среднее смещение, получим

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = \frac{\varepsilon_1}{Pe}(1 + e\cos\varphi)\cos\varphi, \quad \Delta\varpi = \frac{\pi\varepsilon_1}{P} \tag{2.7}$$

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{\varepsilon_1}{P}(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi, \quad \Delta e = 0 \tag{2.8}$$

Здесь и всюду далее $\Delta\varpi$ – среднее смещение долготы перигелия за один оборот планеты вокруг Солнца, P – параметр невозмущенной орбиты планеты.

Смещению перигелия Меркурия, равному 43″ за столетие, соответствует значение $\varepsilon_1 = 8.85$ км. При таком значении ε_1 смещения перигелиев остальных внутренних планет, вычисленные по формуле (2.7), составляют

$$\text{Венера: } 8.64'', \quad \text{Земля: } 3.83'', \quad \text{Марс: } 1.35'' \tag{2.9}$$

Эти значения хорошо согласуются с разницей между наблюдениями и результатами расчетов по модели Ньютона (1.1).

Таким образом, модель Клеро (2.1) вполне адекватно описывает наблюдаемое поведение всех планет Солнечной системы. Но, несмотря на это, она была в свое время отвергнута. Основной аргумент против нее состоял в том [4], что эта модель, адекватно описывая силу взаимодействия планет с Солнцем, дает совершенно неадекватное значение силы взаимодействия свинцовых шаров в опытах Кавендиша. Но этот аргумент справедлив лишь в том предположении, что ε_1 – универсальная постоянная, не зависящая от масс взаимодействующих точек.

Покажем, что можно определить такую зависимость ε_1 от масс взаимодействующих точек, при которой модель (2.1) будет адекватно описывать наблюдаемое поведение всех планет и Луны, а ее применение к опытам Кавендиша не будет вызывать никаких противоречий.

Определим параметр ε_1 в модели Клеро (2.1) формулой $\varepsilon_1 = 6\mu / c^2$, где c – скорость света. Тогда закон тяготения запишется в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\frac{\gamma m M}{R^2}\left(1 + \frac{6\mu}{c^2 R}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(M + m), \tag{2.10}$$

а для наблюдаемой переменной **R** в задаче двух тел получим уравнение

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + \frac{6\mu}{c^2R}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}$$

Для такой модели тяготения возмущающее ускорение будет иметь только радиальную компоненту $S = -6\mu^2/(c^2R^3)$, а из уравнения (2.5) получим

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = \frac{6\mu}{c^2Re}\cos\varphi = \frac{6\mu}{c^2eP}\cos\varphi(1 + e\cos\varphi) \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что среднее смещение долготы перигелия за один оборот планеты вокруг Солнца определяется формулой

$$\Delta\varpi = \frac{6\pi\mu}{c^2P} \tag{2.12}$$

Отметим, что точно такой же формулой определяется смещение перигелиев орбит планет в рамках ОТО [10]. После подстановки значений μ и P в формулу (2.12), используя данные о периодах обращения, получим следующие смещения перигелиев внутренних планет за столетие:

$$\text{Меркурий: } 43'', \quad \text{Венера: } 8.64'', \quad \text{Земля: } 3.83'', \quad \text{Марс: } 1.35'' \tag{2.13}$$

Для внешних планет аномальные смещения перигелиев, вычисленные по формуле (2.12), составляют десятые и сотые доли угловых секунд за столетие. Определить эти смещения по наблюдениям практически невозможно, поскольку они очень малы. Кроме того, для внешних планет возмущения от соседних планет вносят в смещения перигелиев колебательные компоненты большой амплитуды, имеющие долгопериодические составляющие с периодами от 12 до 560 лет [3].

В задаче о движении Луны m – масса Луны, а M – масса Земли. Вычисленное по формуле (2.12) аномальное смещение перигея Луны составляет 0.05 угловой секунды за столетие, т.е. пренебрежимо малую величину. Как оказалось, все “аномалии” в движении Луны с высокой точностью объясняется в рамках модели Ньютона и вызваны в основном возмущающим влиянием Солнца.

В опытах Кавендиша, если положить массы шаров равными $M = 100$ кг и $m = 10$ кг, а расстояние между центрами шаров $R = 0.2$ м, сила по модели (2.10) будет совпадать с ньютоновской силой (1.1) с относительной точностью 10^{-23}.

Таким образом, модель Клеро, записанная в форме (2.10), вполне адекватно описывает наблюдаемые движения планет и Луны, а в опытах Кавендиша практически неразличима с моделью Ньютона (1.1).

Ниже приводятся другие модели тяготения, в рамках которых смещение перигелиев орбит планет определяется формулой (2.12). Во всех этих моделях траектории движения являются плоскими кривыми, поэтому ограничимся использованием полярных координат R, φ. При этом $\dot{R}$ и $R\dot{\varphi}$ будут представлять собой радиальную и трансверсальную компоненты скорости, соответственно.

Рассмотрим семейство моделей, в которых сила гравитационного взаимодействия задается в явном виде следующей формулой:

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma mM}{R^2}\left(1 + x\frac{\mu}{c^2R} + y\frac{\dot{R}^2}{c^2} + z\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}; \quad \mu = \gamma(M + m) \tag{2.14}$$

Здесь x, y, z – некоторые безразмерные параметры. В задаче двух тел уравнение для наблюдаемой переменной запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + x\frac{\mu}{c^2R} + y\frac{\dot{R}^2}{c^2} + z\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right)\frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (2.15)$$

Учитывая, что для движения в центральном поле имеет место интеграл площадей $R^2\dot{\varphi} = K = \mathrm{const}$, и что для невозмущенной орбиты

$$R = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}; \quad K^2 = \mu P, \quad \dot{R}^2 = \frac{\mu}{P}e^2\sin^2\varphi \qquad (2.16)$$

получим для возмущающего ускорения следующее выражение:

$$S = -\frac{\mu^2}{R^2c^2P}\left(x(1 + e\cos\varphi) + ye^2\sin^2\varphi + z(1 + e\cos\varphi)^2\right) \qquad (2.17)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2.5) среднее смещение перигелия орбиты за один оборот планеты вокруг Солнца определится формулой

$$\Delta\varpi = (x + 2z)\frac{\pi\mu}{c^2P} \qquad (2.18)$$

Исходя из того, что смещение перигелия определяется значением (2.12), получим

$$x + 2z = 6 \qquad (2.19)$$

При учете этого соотношения из формулы (2.15) определяется следующее двухпараметрическое семейство моделей тяготения:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\frac{\gamma mM}{R^2}\left(1 + (6 - 2z)\frac{\mu}{c^2R} + y\frac{\dot{R}^2}{c^2} + z\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right)\frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (2.20)$$

При $y = z = 0$ из (2.20) следует модель Клеро (2.10), в которой сила взаимодействия зависит только от расстояния. Для других моделей из семейства (2.20) сила зависит не только от расстояния, но и от компонент относительной скорости.

Отметим, что для всех моделей семейства (2.14) среднее смещение эксцентриситета орбиты, вычисленное на основании уравнения (2.4), равно нулю.

Все модели из семейства (2.20), за исключением модели Клеро (2.10), обладают тем недостатком, что для них отсутствует интеграл энергии. Такого недостатка нет в модели Гербера, которая по словам Роузвера [4] была в свое время “конкурентом” ОТО Эйнштейна. В модели Гербера гравитационное взаимодействие, как и в предыдущих моделях, является центральным и задается обобщенным потенциалом

$$U = -\frac{\gamma mM}{R}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)^{-2} \qquad (2.21)$$

В задаче двух тел лагранжиан для такой модели определяется выражением

$$L = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\mu}{R}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)^{-2}; \quad \mu = \gamma(M + m) \qquad (2.22)$$

Первыми интегралами для рассматриваемой модели являются интеграл площадей $R^2\dot{\varphi} = K = \mathrm{const}$ и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu}{R}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)^{-3}\left(1 - \frac{3\dot{R}}{c}\right) = h = \mathrm{const} \qquad (2.23)$$

Радиальное ускорение в полярных координатах выражается формулой

$$W_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \qquad (2.24)$$

Из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \tag{2.25}$$

с точностью до членов второго порядка малости относительно величин

$$\frac{\mu}{Rc^2} \ll 1, \quad \frac{V^2}{c^2} \ll 1 \tag{2.26}$$

получим (промежуточные выкладки опущены)

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 - \frac{6\mu}{c^2 R} - \frac{3\dot{R}^2}{c^2} + \frac{6R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right) \tag{2.27}$$

Нетрудно видеть, что определяемое формулой (2.27) первое приближение для модели Гербера соответствует одной из моделей семейства (2.20), поскольку оно получается из формулы (2.20) при $z = 6$, $y = -3$. Таким образом, в рамках модели Гербера смещение перигелия орбиты планеты также, как и для всех моделей (2.20), определяется формулой (2.12).

Покажем, что помимо модели Гербера имеется семейство других моделей центрального взаимодействия, для которых имеет место интеграл энергии, а смещение перицентра орбиты определяется формулой (2.12).

Рассмотрим гравитационное поле, задаваемое обобщенным потенциалом

$$U = -\frac{\gamma m M}{R}\Phi^{1/2}; \quad \Phi = 1 - x\frac{\mu}{c^2 R} - y\frac{\dot{R}^2}{c^2}, \tag{2.28}$$

где x, y — некоторые безразмерные параметры. Лагранжиан системы в задаче двух тел имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\mu}{R}\Phi^{1/2}$$

Первыми интегралами системы являются интеграл площадей $R^2\dot{\varphi} = K = \text{const}$ и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu}{R}\Phi^{-1/2}\left(1 - x\frac{\mu}{c^2 R}\right) = h = \text{const} \tag{2.29}$$

Из уравнения Лагранжа (2.25) с точностью до членов второго порядка малости относительно величин (2.26) получим для радиального ускорения следующее выражение (промежуточные выкладки опущены):

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + (y - x)\frac{\mu}{Rc^2} + \frac{y}{2}\frac{\dot{R}^2}{c^2} - y\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right) \tag{2.30}$$

В рассматриваемом случае на основании формул (2.16) для возмущающего ускорения получим выражение

$$S = -\frac{\mu^2}{R^2c^2P}\left((y - x)(1 + e\cos\varphi) + \frac{ye^2\sin^2\varphi}{2} - y(1 + e\cos\varphi)^2\right)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2.5) среднее смещение перигелия орбиты за один оборот планеты вокруг Солнца определится формулой

$$\Delta\varpi = -(x + y)\frac{\pi\mu}{c^2 P} \tag{2.31}$$

Учитывая это равенство, получим из (2.28), что смещение перицентра определяется формулой (2.12) для следующего однопараметрического семейства моделей тяготения, задаваемого обобщенным потенциалом:

$$U = -\frac{\gamma m M}{R}\left(1 + (6 + y)\frac{\mu}{c^2 R} - y\frac{\dot{R}^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{2.32}$$

Ускорение материальной точки в этом случае выражается формулой

$$\ddot{\mathbf{R}} \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + 2(y + 3)\frac{\mu}{Rc^2} + \frac{y}{2}\frac{\dot{R}^2}{c^2} - y\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right)\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{2.33}$$

При $y = -6$ формула (2.33) повторяет первое приближение модели Гербера (2.27), а при $y = 0$ – модель Клеро (2.10).

Таким образом, имеется бесконечно много моделей тяготения, для которых, как и в ОТО, смещение перицентров орбит в задаче двух тел определяется формулой (2.12).

3. Модели тяготения, получаемые из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени. В рамках общей теории относительности (ОТО) гравитационное взаимодействие между материальными точками зависит не только от расстояния, но и от скоростей точек. Смещение перигелия орбиты планеты по ОТО за один оборот планеты вокруг Солнца определяется формулой [10]

$$\Delta\varpi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1 - e^2)c^2} = \frac{6\pi\mu}{Pc^2} \tag{3.1}$$

Здесь a – большая полуось невозмущенной эллиптической орбиты, T – период обращения, P – параметр, e – эксцентриситет, c – скорость света.

Формула (3.1) в точности повторяет формулу (2.12) для рассмотренных выше семейств моделей центрального взаимодействия (2.20) и (2.32). Но ОТО объясняет не только аномальное движение Меркурия и других планет, но и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца, а также гравитационное красное смещение.

В рамках ОТО формула (3.1) может быть получена из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. В этой метрике интервал задается выражением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - R^2 d\theta^2; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2} \tag{3.2}$$

Здесь R, φ, θ – сферические координаты точки.

Модель тяготения, определяемую метрикой Шварцшильда (3.2), будем далее называть моделью Шварцшильда. Эта модель приводится в большинстве научных и учебных публикаций, имеющих отношение к ОТО, и используется, в частности, для вывода следствий ОТО о смещении перигелиев орбит планет и отклонении лучей света в гравитационном поле Солнца. Но в этой модели, как будет показано ниже, гравитационное взаимодействие не является центральным, а при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек не описывается точно законом тяготения Ньютона (1.1).

Поставим задачу найти такую модель тяготения, в которой:

1. Гравитационное взаимодействие является центральным.

2. При нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек тяготение точно описывается законом Ньютона (1.1).

3. Смещения перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО.

Для решения поставленной задачи рассмотрим метрику общего вида

$$ds^2 = fc^2dt^2 - g^{-1}dR^2 - h^{-1}\left(R^2\sin^2\theta d\varphi^2 + R^2d\theta^2\right) \tag{3.3}$$

Здесь функции f, g, h задаются формулами

$$f = 1 - \frac{\alpha}{R} - x\frac{\alpha^2}{R^2}, \quad g = 1 - y\frac{\alpha}{R}, \quad h = 1 - z\frac{\alpha}{R}; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2}, \tag{3.4}$$

где x, y, z — некоторые безразмерные параметры.

Движение материальной точки в таком пространстве-времени описывается уравнениями Лагранжа, а лагранжиан определяется формулой [11]

$$L = -\Phi^{1/2}; \quad \Phi = fc^2 - g^{-1}\dot{R}^2 - h^{-1}\left(\sin^2\theta R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right)$$

Из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1/2}h^{-1}R^2\dot{\theta}\right) - \Phi^{-1/2}h^{-1}R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

следует, что при начальных условиях $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$ угол θ будет оставаться неизменным, равным $\pi/2$, т.е. траекторией движения точки будет плоская кривая. Поэтому для описания движения в рассматриваемой задаче можно ограничиться полярными координатами R, φ. Тогда метрика (3.3) запишется в виде

$$ds^2 = fc^2dt^2 - g^{-1}dR^2 - h^{-1}R^2d\varphi^2, \tag{3.5}$$

а для лагранжиана получим выражение

$$L = -\Phi^{1/2}; \quad \Phi = fc^2 - g^{-1}\dot{R}^2 - h^{-1}R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.6}$$

Рассматриваемая система имеет циклический первый интеграл (аналог интеграла площадей)

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \Phi^{-1/2}h^{-1}R^2\dot{\varphi} = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

и интеграл обобщенной энергии

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{R}}\dot{R} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \Phi^{-1/2}fc^2 = \mathrm{const} \tag{3.8}$$

Легко видеть, что при учете интеграла энергии (3.8) вместо (3.7) в качестве независимого первого интеграла можно использовать следующую функцию:

$$f^{-1}h^{-1}R^2\dot{\varphi} = K = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

Для рассматриваемых моделей гравитационное взаимодействие в общем случае не является центральным, т.е. помимо радиального ускорения W_R материальная точка испытывает и трансверсальное ускорение W_φ. Последнее определяется из интеграла (3.9) следующим выражением:

$$W_\varphi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\varphi}\right) = \frac{K}{R}\left(f\frac{\partial h}{\partial R} + h\frac{\partial f}{\partial R}\right)\dot{R} \tag{3.10}$$

Отметим, что взаимодействие будет строго центральным только в случае $h = f^{-1}$.

Радиальное ускорение определяется по формуле

$$W_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \tag{3.11}$$

Его можно найти из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0,$$

которое принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1/2} g^{-1}\dot{R}\right) + \frac{1}{2}\Phi^{-1/2}\left(\frac{\partial f}{\partial R}c^2 + g^{-2}\frac{\partial g}{\partial R}\dot{R}^2 + h^{-2}\frac{\partial h}{\partial R}R^2\dot{\varphi}^2 - 2h^{-1}R\dot{\varphi}^2\right) = 0 \tag{3.12}$$

Учитывая вытекающее из интеграла энергии (3.8) соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1/2}\right) = -\Phi^{-1/2} f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R}\dot{R} \tag{3.13}$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1/2} g^{-1}\dot{R}\right) = \Phi^{-1/2} g^{-1}\left[\ddot{R} - \left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2\right] \tag{3.14}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (3.12) будем иметь

$$\ddot{R} = \left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{\partial f}{\partial R}c^2 + h^{-2}\frac{\partial h}{\partial R}R^2\dot{\varphi}^2 - 2h^{-1}R\dot{\varphi}^2\right)$$

Отсюда на основании формулы (3.11) найдем радиальное ускорение точки

$$W_R = -\frac{c^2}{2}g\frac{\partial f}{\partial R} + \left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{gh^{-1} - 1}{R} - \frac{1}{2}gh^{-2}\frac{\partial h}{\partial R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.15}$$

Производные от функций (3.4) определяются формулами

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\alpha}{R^2}\left(1 + 2x\frac{\alpha}{R}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial R} = y\frac{\alpha}{R^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial R} = z\frac{\alpha}{R^2} \tag{3.16}$$

а выражение gh^{-1} с точностью до малых второго порядка относительно α/R записывается в виде

$$gh^{-1} = 1 + (z - y)\frac{\alpha}{R} \tag{3.17}$$

После подстановки этих выражений в формулу (3.15) получим

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + (4x - 2y)\frac{\mu}{Rc^2} - (2 + y)\frac{\dot{R}^2}{c^2} - (z - 2y)\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right) \tag{3.18}$$

Здесь приближенное равенство означает, что выражение в скобках записано с точностью до малых второго порядка относительно α/R.

Аналогичным образом из формулы (3.10) получается приближенное выражение для трансверсального ускорения

$$W_\varphi \approx \frac{\mu}{R^2}2(z+1)\frac{K}{Rc^2}\dot{R} \approx \frac{\mu}{R^2c^2}2(z+1)\dot{R}R\dot{\varphi} \tag{3.19}$$

В рассматриваемой задаче возмущающее ускорение точки имеет и радиальную компоненту S и трансверсальную компоненту T, причем

$$S \approx -\frac{\mu}{R^2c^2}\left((4x - 2y)\frac{\mu}{R} - (2 + y)\dot{R}^2 - (z - 2y)\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$T \approx \frac{\mu}{R^2}2(z+1)\frac{K}{Rc^2}\dot{R}$$

В этом случае долгота перицентра описывается уравнением [9]

$$\frac{d\varpi}{d\varphi} = \frac{R^2}{\mu e}\left[-S\cos\varphi + \left(1 + \frac{R}{P}\right)T\sin\varphi\right] \tag{3.20}$$

Из этого уравнения, учитывая приведенные выше формулы (2.16) для невозмущенной орбиты, получим для смещения перицентра за один оборот спутника вокруг притягивающего центра следующее выражение:

$$\Delta\varpi = (4x + 2y + 2z + 4)\frac{\mu\pi}{Pc^2} \tag{3.21}$$

Для изучения движения фотона в гравитационном поле следует положить в уравнении (3.5) интервал равным нулю: $ds = 0$. Тогда получим уравнение

$$c^2 = f^{-1}\left(g^{-1}\dot{R}^2 + h^{-1}R^2\dot{\varphi}^2\right) = V_0^2(R, \dot{R}, \dot{\varphi}) \tag{3.22}$$

Это уравнение выражает квадрат скорости фотона в пустоте при отсутствии каких-либо полей через радиальную $\dot{R}$ и трансверсальную $R\dot{\varphi}$ компоненты скорости фотона в гравитационном поле. Из постоянства квадрата скорости, записанной в криволинейных координатах, следует равенство нулю проекций ускорения на оси локального базиса этих координат, т.е. уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{R}}\right) - \frac{\partial V_0^2}{\partial R} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial V_0^2}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.23}$$

Второе из уравнений (3.23) дает первый интеграл

$$f^{-1}h^{-1}R^2\dot{\varphi} = K = \text{const}, \tag{3.24}$$

совпадающий с первым интегралом (3.9) для материальной точки. Из него определяется выражение для трансверсального ускорение фотона

$$\tilde{W}_\varphi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\varphi}\right) = \frac{K}{R}\left(f\frac{\partial h}{\partial R} + h\frac{\partial f}{\partial R}\right)\dot{R} \approx \frac{\alpha}{R^2}\frac{K}{R}(z+1)\dot{R}, \tag{3.25}$$

совпадающее с выражением (3.10) для материальной точки.

Для определения радиального ускорения фотона используем первое из уравнений (3.23). Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_0^2}{\partial \dot{R}}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(f^{-1}g^{-1}\dot{R}\right) = 2f^{-1}g^{-1}\left[\ddot{R} - \left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2\right]$$

$$\frac{\partial V_0^2}{\partial R} = -f^{-1}g^{-1}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 -$$
$$- f^{-1}h^{-1}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 + 2f^{-1}h^{-1}R\dot{\varphi}^2$$

после сокращения на $2f^{-1}g^{-1}$ получим уравнение

$$\ddot{R} - \frac{1}{2}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}gh^{-1}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1}\frac{\partial h}{\partial R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 - gh^{-1}R\dot{\varphi}^2 = 0$$

Отсюда на основании формулы (3.11) находим выражение для радиального ускорения фотона

$$\tilde{W}_R = \frac{1}{2}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 + \left[\frac{gh^{-1} - 1}{R} - \frac{1}{2}gh^{-1}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + h^{-1}\frac{\partial h}{\partial R}\right)\right]R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.26}$$

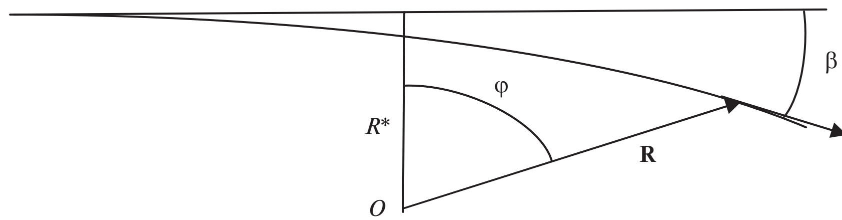

Рис. 1.

После учета формул (3.16), (3.17) получим

$$\tilde{W}_R \approx \frac{\mu}{R^2 c^2}\left[(1+y)\dot{R}^2 + (z-2y-1)R^2\dot{\varphi}^2\right] \tag{3.27}$$

Здесь приближенное равенство означает, что множители при $\dot{R}^2$ и $R^2\dot{\varphi}^2$ вычислены с точностью до малых α/R.

Определим угол отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца. Для фотона, летящего со скоростью $\tilde{V}$ и испытывающего ускорение $\tilde{\mathbf{W}}$, изменение угла β поворота вектора скорости описывается уравнением (см. рис. 1)

$$d\beta = \frac{-\tilde{W}_R\cos(\varphi-\beta) + \tilde{W}_\varphi \sin(\varphi-\beta)}{\tilde{V}}dt$$

Учитывая вытекающее из первого интеграла (3.24) приближенное равенство $Kdt \approx R^2 d\varphi$, малость отклонения скорости $\tilde{V}$ от величины c и формулу $K = R^* c$, где R^* – радиус Солнца, получим

$$d\beta \approx \frac{R^2\left[\tilde{W}_\varphi \sin(\varphi-\beta) - \tilde{W}_R\cos(\varphi-\beta)\right]}{R^* c^2}d\varphi \tag{3.28}$$

Невозмущенное движение фотона представляет собой равномерное движение по прямой линии и описывается уравнениями

$$R = \frac{R^*}{\cos\varphi}, \quad \dot{R} = \frac{R^*\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{K}{R^2} = \frac{K\sin\varphi}{R^*} = c\sin\varphi \tag{3.29}$$

После учета формул (3.29) получим для радиального (3.27) и трансверсального (3.25) ускорений фотона следующие выражения:

$$\tilde{W}_R \approx \frac{\mu}{R^2}\left[(1+y)\sin^2\varphi + (z-2y-1)\cos^2\varphi\right]$$

$$\tilde{W}_\varphi \approx \frac{2\mu}{R^2}(z+1)\sin\varphi\cos\varphi$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.28) и интегрируя на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ при учете малости угла β, получим следующее выражение для угла отклонения световых лучей, проходящих рядом с краем диска Солнца:

$$\Delta\beta = \frac{\mu}{R^* c^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(2z-y+1)\sin^2\varphi\cos\varphi - (z-2y-1)\cos^3\varphi\right]d\varphi = \frac{2\mu}{R^* c^2}(y+1) \tag{3.30}$$

Итак, смещение перигелия орбит планет и отклонение световых лучей, проходящих рядом с краем диска Солнца, описываются формулами

$$\Delta\varpi = (4x + 2y + 2z + 4)\frac{\mu\pi}{Pc^2} \tag{3.31}$$

$$\Delta\beta = 2(1 + y)\frac{\mu}{R^*c^2} \tag{3.32}$$

Модели тяготения, определяемой метрикой Шварцшильда (3.2), соответствуют следующие значения параметров: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. В этом случае имеем

$$\Delta\varpi = \frac{6\mu\pi}{Pc^2}, \quad \Delta\beta = \frac{4\mu}{R^*c^2} \tag{3.33}$$

Вычисленный по формуле (3.33) угол отклонения от прямой линии лучей света, проходящих близко к краю диска Солнца, составляет $\Delta\beta = 1.75''$.

Как известно [4], первый вариант ОТО Эйнштейна основывался на уравнениях поля, соответствующих "промежуточной" пространственно-временной метрике, которая получается из (3.5) при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. В этом случае из формул (3.31), (3.32) следует

$$\Delta\varpi = \frac{4\pi\mu}{c^2P}, \quad \Delta\beta = \frac{2\mu}{c^2R^*},$$

т.е. смещение перицентра эллиптической орбиты составляет две трети от значения, получаемого для модели тяготения, определяемой метрикой Шварцшильда, а отклонение лучей света в два раза меньше. Позже Эйнштейн скорректировал свои уравнения и получил для смещения перицентров эллиптических орбит и отклонений лучей света значения, определяемые формулами (3.33).

Из формул (3.31), (3.32) следует, что каждой фиксированной паре значений $\Delta\varpi$, $\Delta\beta$ соответствует однопараметрическое семейство моделей тяготения. Если исходить из того, что значения отклонений определяются формулами (3.33), то для параметров этого семейства получим следующие соотношения:

$$y = 1, \quad 2x + z = 0 \tag{3.34}$$

В этом случае, выбирая x в качестве независимого параметра, получим на основании формул (3.3), (3.4) однопараметрическое семейство моделей тяготения, определяемых следующей метрикой:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R} - x\frac{\alpha^2}{R^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{-1}dR^2 - \left(1 + 2x\frac{\alpha}{R}\right)^{-1}\left(R^2\sin^2\theta d\varphi^2 + R^2d\theta^2\right) \tag{3.35}$$

Для этих моделей формулы (3.18), (3.19) для компонент ускорения материальной точки принимают следующий вид:

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 + 2(2x - 1)\frac{\mu}{Rc^2} - 3\frac{\dot{R}^2}{c^2} + 2(x + 1)\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right) \tag{3.36}$$

$$W_\varphi \approx \frac{\mu}{R^2c^2}2(1 - 2x)\dot{R}R\dot{\varphi} \tag{3.37}$$

В семействе (3.35) метрике Шварцшильда (3.2) соответствует значение параметра $x = 0$. В этом случае гравитационное взаимодействие не является центральным, а компоненты ускорения материальной точки выражаются формулами

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 - 2\frac{\mu}{Rc^2} - 3\frac{\dot{R}^2}{c^2} + 2\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right), \quad W_\varphi \approx \frac{\mu}{R^2c^2}2\dot{R}R\dot{\varphi} \tag{3.38}$$

Из этих формул следует также, что при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек (при $\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$) нет точного совпадения с законом тяготения Ньютона (1.1).

Рассматривая в семействе (3.35) другие значения параметра x, например, из множества $x = n/2$, где n — целые числа, получим модели тяготения, по сравнению с которыми модель Шварцшильда никаких видимых преимуществ не имеет, т.е. затруднительно привести какие-либо аргументы, на основании которых следует отдать предпочтение этой модели. Более того, из рассматриваемого множества моделей (3.35) заслуживает особого внимания модель, соответствующая значению параметра $x = 1/2$. Для этой модели ускорение материальной точки записывается в виде

$$W_R \approx -\frac{\mu}{R^2}\left(1 - 3\frac{\dot{R}^2}{c^2} + 3\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\right), \quad W_\varphi \approx 0 \tag{3.39}$$

т.е. в первом приближении гравитационное взаимодействие является центральным, а при отсутствии относительной скорости (при $\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$) закон взаимодействия определяется моделью Ньютона (1.1).

Важно отметить, что получаемая из (3.35) при $x = 1/2$ модель тяготения допускает такое уточнение, что для уточненной модели гравитационное взаимодействие будет *строго* центральным, а закон взаимодействия при нулевой относительной скорости будет *точно* описываться моделью Ньютона (1.1). Такое уточнение осуществляется незначительной (не влияющей на первое приближение) корректировкой выражений для функций g и h (3.4), фигурирующих в метрике (3.5), а именно, если эту метрику задать функциями

$$f = 1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2}, \quad g = \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)^{-1}, \quad h = f^{-1}; \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2} \tag{3.40}$$

Тогда эта метрика запишется в виде

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{R}\right)dR^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^2}{2R^2}\right)\left(R^2\sin^2\theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2\right) \tag{3.41}$$

В этом случае из уравнения (3.10) получим строгое равенство $W_\varphi = 0$, т.е. взаимодействие будет строго центральным, а при учете равенства

$$g\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\alpha}{R^2} \tag{3.42}$$

выражение (3.15) для радиального ускорения примет вид

$$W_R = -\frac{\mu}{R^2} + \left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{g^{-1}}{2}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{gf - 1}{R} + \frac{g}{2}\frac{\partial f}{\partial R}\right)R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.43}$$

Отсюда следует, что для рассматриваемой модели при отсутствии относительной скорости взаимодействующих материальных точек закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1).

Для модели тяготения, определяемой метрикой (3.41), взаимодействие фотона с гравитирующей материальной точкой тоже является строго центральным, поскольку в этом случае из формулы (3.25) следует строгое равенство $\tilde{W}_\varphi = 0$. При этом формула (3.26) для ускорения фотона принимает вид

$$\tilde{W}_R = \frac{1}{2}\left(f^{-1}\frac{\partial f}{\partial R} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial R}\right)\dot{R}^2 + \frac{gf - 1}{R}R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.44}$$

Формула (3.44) может быть получена и из формулы (3.43), если учесть равенство (3.22), которое для рассматриваемой модели принимает вид

$$c^2 = f^{-1}g^{-1}\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.45}$$

В заключение покажем, что модель тяготения, определяемая метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2\left[2 - \exp(\alpha/R)\right]dt^2 - \exp(\alpha/R)dR^2 - \\ - \left[2 - \exp(\alpha/R)\right]\left(R^2\sin^2\theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

характеризуется точно такими же свойствами, что и модель (3.41), т.е. в рамках этой модели гравитационное взаимодействие является строго центральным, при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1), а смещение перигелиев орбит планет и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца определяются теми же формулами (3.33), что и в рамках ОТО.

Действительно, для модели (3.46) в обозначениях (3.3) будем иметь

$$f = 2 - \exp(\alpha/R), \quad g^{-1} = \exp(\alpha/R), \quad h^{-1} = f$$

В этом случае из формул (3.10) и (3.25) получим строгие равенства: $W_\varphi = 0$, $\tilde{W}_\varphi = 0$. При этом будет выполняться равенство (3.42), а выражения (3.15) и (3.26) для радиального ускорения примут вид (3.43) и (3.44), соответственно. Отсюда следует, что и в рамках модели (3.46), гравитационное взаимодействие является строго центральным, а при $\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$ закон гравитационного взаимодействия точно описывается моделью Ньютона (1.1).

Нетрудно видеть, что модель тяготения (3.41) можно получить из модели (3.46), если в последней оставить только главные члены разложения функции $\exp(\alpha/R)$ по степеням α/R. В задаче о движении планет как и в задаче об отклонении лучей света в гравитационном поле Солнца $\alpha/R \ll 1$. Поэтому в первом приближении модель (3.46) дает те же самые значения (3.33) для $\Delta\varpi$ и $\Delta\beta$, что и модель (3.41).

Заключение. Основные результаты работы сводятся к следующим:

1. Предложена модификация закона Клеро (2.10), в рамках которой сила гравитационного взаимодействия является центральной и зависит только от расстояния, а смещения перицентров орбит в задаче двух тел совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. В опытах Кавендиша эта модель практически неразличима с моделью Ньютона.

2. Найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, задаваемых обобщенным потенциалом (2.32), в рамках которых взаимодействие является центральным, а смещения перицентров орбит в задаче двух тел совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО.

3. Рассмотрены модели тяготения, получаемые из решения задачи о движении по инерции в искривленном пространстве-времени. Найдено однопараметрическое семейство моделей тяготения, определяемое метрикой (3.35), для которых смещения перицентров орбит в задаче двух тел и отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца совпадают со значениями, предсказываемыми ОТО. Из этого семейства выделяется модель (3.41), которая характеризуется строго центральным взаимодействием, а при нулевой относительной скорости взаимодействующих материальных точек точно описывается законом тяготения Ньютона. Показано, что точно такими же свойствами обладает и модель тяготения, определяемая метрикой (3.46).

Автор выражает благодарность академику В.Ф. Журавлеву за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp. 1859. V. 5. P. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1859. V. 49. P. 379–383.
3. *Амелькин Н.И.* Расчеты эволюции орбит планет // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 407–425.
4. *Роузвер Н.Т.* Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985. 244 с.
5. *Визгин В.П.* Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование 1900–1915 гг.). М.: Наука, 1981. 352 с.
6. *Фейнман Р.Ф., Мориного Ф.Б., Вагнер У.Г.* Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К, 2000. 296 с.
7. *Владимиров Ю.С.* Классическая теория гравитации. М.: Либроком, 2009. 264 с.
8. *Clairaut A.C.* Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle // Hist. Mem. Acad. r. Sci. 1745. P. 329–364.
9. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз, 1963. 588 с.
10. *Эйнштейн А.* Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности // Собр. научн. тр. в 4 т. Т. I. С. 439–447.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

On the Gravitational Interaction Models

N. I. Amel'kin[a,#]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[#] *e-mail: namelkin@mail.ru*

As part of the task of movement on inertia in curved space-time, a single-parametric family of gravitational models has been found, for which the displacement of perihelion orbits of planets and the deviation of light rays in the gravitational field of the Sun coincide with the values predicted by GTR. One model stands out from this family, in which gravitational interaction is strictly central, and at zero relative speed of interacting material points is accurately described by Newton's gravity law.

Keywords: Newton's law of gravity, general theory of relativity, gravitational interaction models

REFERENCES

1. *Le Verrier U.* Théorie de mouvement de Mercure // Ann. Observ. Imp., 1859, vol. 5, pp. 1–96.
2. *Le Verrier U.* Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1859. vol. 49, pp. 379–383.
3. *Amel'kin N.I.* Calculations of the evolution of planet orbits // PMM, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 407–425.
4. *Roseveare N.T.* Mercury's perihelion from Le Verrier to Einstein. Oxford: Oxford University Press, 1982. pp. viii + 208.
5. *Vizgin V.P.* Relativistic Theory of Gravity (Origins and Formation of 1900–1915). Moscow: Nauka, 1981. 352 p.
6. *Feynman R.F., Morinigo F.B., Wagner W.G.* Feynman lectures on gravity. CRC Press. Taylor & Francis Group. 2003. 280 p.
7. *Vladimirov Yu.S.* Classical Theory of Gravity. Moscow: Librocom, 2009. 264 p.
8. *Clairaut A.C.* Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle // Hist. Mem. Acad. r. Sci., 1745, pp. 329–364.
9. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 588 p.
10. *Einstein A.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin // Math. Phys., 1915, pp. 778, 799, 831, 844.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Vol. II. Field Theory. Moscow: Nauka, 1988. 512 p. (in Russian)