

УДК 534.112,519.63

## НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРО- И НАНОСТРУНЫ В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

© 2022 г. М. А. Ильгамов<sup>1,2,3,\*</sup>, И. М. Утяшев<sup>1,2,\*\*</sup><sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия<sup>2</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия<sup>3</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия\*e-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)\*\*e-mail: [utyashevim@mail.ru](mailto:utyashevim@mail.ru)

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принята к публикации 25.09.2021 г.

Рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в приповерхностном слое и в основном объеме материала. В зависимости от материала эффективная жесткость на растяжение может быть больше или меньше, чем обычная жесткость. Второй эффект обусловлен наличием разности сил давления среды на выпуклой и вогнутой сторонах круговой поверхности, появляющейся при отклонении от прямой линии. Эти эффекты определяются безразмерными параметрами. Решение определяется в зависимости от заданного закона изменения давления по времени. Повышение давления приводит к уменьшению амплитуды и повышению частоты колебаний. С вакуумированием связаны увеличение амплитуды и уменьшение частоты. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

*Ключевые слова:* микро- и наноструны, газовая среда, изменение давления, поперечные непериодические колебания, обратная задача

DOI: 10.31857/S0032823522010052

**1. Введение.** Нанопроволоки, микро- и наноструны находят применение в электронных, оптоэлектронных и электромеханических устройствах, в литографии, в качестве химических и биологических детекторов и сенсоров и т.д. [1–4]. Изучение их эксплуатационных свойств, в частности, статической и динамической деформации под действием приложенных сил, спектра частот, устойчивости формы представляет большой интерес.

Как показано экспериментально и теоретически в работах [5, 6], а также в последующих исследованиях, при диаметрах струны порядка 10 мкм и меньше начинает влиять на деформацию поверхностный эффект, связанный с различием упругих характеристик в тонком слое около поверхности и в основном объеме тела. Влияние указанного и других эффектов объясняется тем, что с уменьшением диаметра  $d$  струны увеличивается удельная поверхность пропорционально  $d^{-1}$ . Укажем на исследования [7–11] в этом направлении, в которых приводится также обзор литературы. В частности, статический изгиб проволоки, устойчивость ее формы, свободные колебания рассматриваются в [9–13]. Принято, что в теории изгиба проволоки учитывается изгибающий момент, а струны – не учитывается.

Согласно указанным работам, продольная сила  $N$  выражается через деформацию  $\varepsilon$  осевой линии формулой

$$N = EF\varepsilon(1 + \beta), \quad F = \pi d^2/4, \quad \beta = 4E_s/Ed, \quad (1.1)$$

где  $E$  – модуль упругости для основного объема струны, определяемый в классической теории упругости, параметр  $E_s$  относится к поверхностному слою. Размерность модуля  $E$  в МПа, а  $E_s$  – в МПа м. Толщина приповерхностного слоя в этой модели не вводится в рассмотрение. Она неявно входит в  $E_s$ , поэтому размерности  $E_s$  и  $E$  различаются.

Второй поверхностный эффект связан с образующейся разностью площадей выпуклой и вогнутой частей боковой поверхности струны в результате ее отклонения от прямой линии. Эта разность площадей приводит к появлению распределенной поперечной силы [14, 15]

$$q = pF\kappa, \quad (1.2)$$

где  $p$  – равномерное давление на боковую поверхность струны,  $\kappa$  – кривизна осевой линии. Сила  $q$  при  $p > 0$  направлена в сторону вогнутости осевой линии, при  $p < 0$  – в сторону выпуклости. Равновесие тонкостенных упругих тел в предположениях, приводящих к формуле (1.2), было рассмотрено в работах [16, 17].

В [18–24] рассмотрены различные задачи поперечных линейных и нелинейных колебаний струн, тросов, в том числе в динамике космических тросовых систем. Обратная задача по определению граничных условий по собственным частотам приведена в [25, 26]. В [27, 28] изучены разрывные волновые явления в сильно деформируемых нитях. Спектр частот продольных колебаний в нанострунах и нанопленках из интерметаллидов, обладающих сложной зависимостью между напряжением и деформацией, определен в [29].

В настоящей работе одновременно учитываются указанные поверхностные эффекты при рассмотрении линейных поперечных колебаний микро- и нанострун, находящихся под давлением газа. При этом задается закон изменения давления. Непериодические колебания струны возбуждаются в начальный период приложения давления. В случае его установления на определенном уровне с течением времени колебания струны переходят на периодический режим.

При анализе не учитываются другие факторы, оказывающие влияние на колебания (внутреннее трение в материале, излучение в окружающую среду, ее присоединенная масса и т.д.) Эти факторы пропорциональны плотности. Поэтому пренебрежение ими может быть приемлемым в случае легких газов. Кроме того хорошо известно, как учитывать влияние излучения и присоединенной массы на колебания тела.

**2. Постановка задачи.** Струна диаметром  $d$  и длиной  $L$  закреплена неподвижно на опорах с некоторым удлинением  $u_0$ . Относительно продольной и поперечной компонент перемещения  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  граничные и начальные условия имеют вид

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = u_0, \quad w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \partial w(x, 0)/\partial t = 0 \quad (2.2)$$

Эти условия характерны для двухопорных микро- и нанорезанаторов [2, 13]. Предполагается, что опоры исключают передачу силы сжатия от возможного торцевого давления на область  $0 < x < L$ . На рис. 1 приведены примеры таких опор, в которых торцевые площади изолированы от избыточного давления (а) или в случае его действия передача силы сжатия в область  $0 < x < L$  не происходит из-за шарнирного закрепления (б) (то же самое в случае многоопорной струны (в)). Условия (2.2) реализуются, например, в момент наибольшего отклонения струны при ее свободных колебаниях. Этот момент принимается за начало отсчета времени.

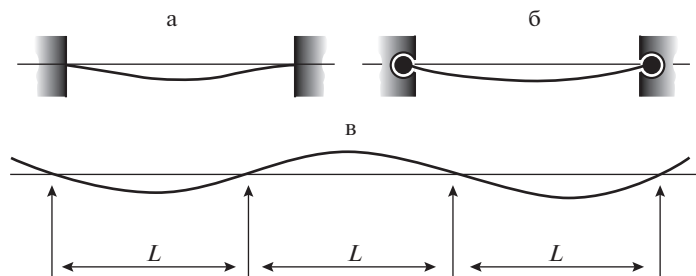


Рис. 1. Схема закрепления струны.

На круговую поверхность струны действует равномерное давление газов  $p_0 + p(t)$ . Под  $p_0$  будем подразумевать постоянное давление, в частности, атмосферное давление. Струна под этим всесторонним давлением является прямой и растянутой в соответствии с первыми двумя условиями (2.1). Поэтому  $p_0$  может быть названо давлением сборки системы струна–концевые опоры.

Малое отклонение от прямой линии струны при действии избыточного динамического давления  $p(t)$  описывается уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{\pi E d^4}{64} \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2.3)$$

где  $\rho$ ,  $E$  – плотность материала и модуль упругости,  $N$  – растягивающая сила (1.1). Таким образом, в уравнении (2.3) коэффициентом  $\beta$  в составе  $N$  учитывается первый поверхностный эффект, а распределенной поперечной силой  $q$  определяется второй поверхностный эффект.

Сила  $N$  образуется в результате указанного выше осевого растяжения, а также поперечного перемещения струны и является постоянной по всей длине  $L$ . Деформация осевой линии связана с компонентами перемещения формулой

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

Подстановка ее в выражение (1.1) и интегрирование по  $x$  от 0 до  $L$  дает

$$\frac{NL}{EF(1 + \beta)} = u(L) - u(0) + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.4)$$

В соответствии с первыми условиями (2.1)  $u(L) - u(0) = u_0$ .

Отношение первого члена ко второму в уравнении (2.3) при функции прогиба  $w = \sin(\pi x/L)$  равно

$$\delta = \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \left( \frac{E}{\sigma} \right) \left( \frac{d}{L} \right)^2,$$

где напряжение растяжения  $\sigma$  образуется за счет предварительного растяжения на величину  $u_0$  и натяжения за счет отклонения от прямой согласно (2.4). Если  $\delta \ll 1$ , то влияние первого члена на изгиб мало по сравнению со вторым. Так как  $\sigma = Eu_0/L$ , то, например, при  $d/L = 10^{-5}$ ,  $u_0/d = 10^{-2}$ , значение  $\delta = 6 \times 10^{-4}$ .

В дальнейшем ограничимся законом изменения избыточного давления в виде

$$p = p_0(t/t_0)^\alpha, \quad (2.5)$$

где  $t_0$  некоторое характерное время,  $\alpha$  – постоянное число ( $\alpha > -1$ ). С учетом (2.4) и выражения (1.2), где необходимо положить  $\kappa \approx \partial^2 w / \partial x^2$ , уравнение (2.3) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \left[ \tau^\alpha + \eta + \gamma \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = L \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}, \quad \eta = \frac{Eu_0(1 + \beta)}{p_0 L}, \quad \gamma = \frac{E(1 + \beta)}{2p_0}$$

В уравнении (2.6) и в условиях (2.1), (2.2) прогиб  $w$  отнесен к длине  $L$ . Первый поверхностный эффект при  $\beta > 0$  увеличивает упругие силы (параметры  $\eta$  и  $\gamma$  возрастают), при  $\beta < 0$  – уменьшает. В качестве примера приведем данные из [9]:  $\beta d = 765$  нм (железо) и  $\beta d = -4.5$  нм (железо на стеклянном субстрате). Эффект начинает проявляться при  $d < 10^6$  нм в первом случае и  $d < 10^2$  нм во втором. При  $E = 10^5$  МПа,  $p_0 = 0.1$  МПа и принятом выше отношении  $u_0/L = 10^{-7}$  параметр  $\eta = 10^{-1}(1 + \beta)$ .

**3. Колебания предварительно слаборастянутой струны.** Рассмотрим сначала решение линейного уравнения (2.6) для случая слаборастянутой струны, под которым будем подразумевать  $\eta \ll \tau^\alpha$  в (2.6). Это условие выполняется за исключением начального момента. В интервале  $0 \leq \tau \leq 0.1$  происходит малое изменение  $w$  ввиду нулевой скорости в начальных условиях (2.2) и инерционности струны. Это имеет место особенно при больших значениях показателя  $\alpha$ , когда давление мало отличается от  $p_0$  до  $\tau = 0.1$ . Это можно показать по решению уравнения  $w_{\tau\tau} - (\eta + 0.1)w_{\xi\xi} = 0$ , следующего из (2.6) при  $\alpha = 1$ . В интервале до  $\tau = 0.1$  оно дает значение прогиба с превышением. Принимая в условиях (2.2)  $w_0(\xi) = W_1 \sin \pi \xi$  и решение уравнения в виде  $w = W(\tau) \sin \pi \xi$ , получаем  $W = W_1 \cos \sqrt{\eta + 0.1} \tau$ . При  $\eta = 0.1$  и  $\tau = 0.1$  находим  $W = W_1 \times 0.999$ . Таким образом, нарушение условия  $\eta \ll \tau^\alpha$  при малых значениях  $\tau$  не приводит к искажению дальнейшего колебательного процесса. Тогда решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условиям (2.1), (2.2), имеет вид [30]

$$w = \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_{-\mu}(kz) \sin(k\pi\xi); \quad z = 2\pi\mu\tau^{\frac{1}{2\mu}} \quad (3.1)$$

$$A_k = 2\Gamma(1 - \mu)(k\pi\mu)^\mu \int_0^1 w_0(\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi; \quad \mu = \frac{1}{2 + \alpha},$$

где  $\Gamma$  – гамма функция,  $J_{-\mu}$  – функция Бесселя.

Как видно из (2.6) и вида параметров  $\eta$  и  $\gamma$ , в данной постановке первый поверхностный эффект не оказывает влияния на решение (второй эффект выражен в члене  $\tau^\alpha \partial^2 w / \partial \xi^2$ ). Целью этой упрощенной постановки задачи является в частности анализ влияния показателя  $\alpha$  в законе изменения давления на решение. Анализ сходимости ряда (3.1) показывает, что при плавных функциях  $w_0(\xi)$  с достаточной точностью можно ограничиться первым членом ( $k = 1$ ) [31]. Решение (3.1) при  $k = 1$ ,  $w_0(\xi) = W_1 \sin \pi \xi$  приводится к виду

$$w = W_1 \pi^\mu \mu^\mu \Gamma(1 - \mu) \tau^{\frac{1}{2}} J_{-\mu}(z) \sin \pi \xi \quad (3.2)$$

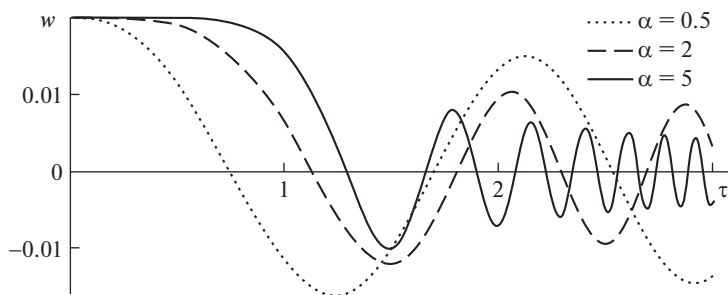


Рис. 2. Колебания струны при возрастающем давлении ( $\alpha > 0$ ).

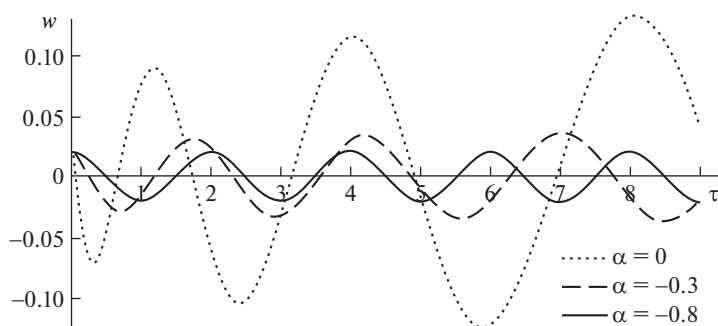


Рис. 3. Колебания струны при уменьшающемся давлении ( $-1 < \alpha \leq 0$ ).

На рис. 2 представлено изменение безразмерного прогиба  $w$  в средней точке ( $W_1 = 0.02$ ,  $\xi = 1/2$  в (3.2)) по безразмерному времени  $\tau$  при различных значениях показателя  $\alpha$  и соответственно параметра  $\mu$ . Чем больше показатель  $\alpha$  (т.е. больше давление  $p$ ), тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний струны с течением времени, а частота возрастает. В начале процесса (до  $\tau \approx 1$ ) наблюдается малое изменение  $w$ , особенно для больших значений  $\alpha$ . Это объясняется тем, что при больших значениях  $\alpha$  давление  $p$  остается малым до  $\tau = 1$ .

Показателю  $\alpha = 0$  ( $p = p_0$ ) соответствуют гармонические колебания с постоянной частотой и амплитудой. Амплитуда определяется первым начальным условием (2.2). При отрицательных значениях  $\alpha$  происходит увеличение амплитуды и уменьшение частоты колебаний, что объясняется снижением давления  $p$  (рис. 3). При такой расклатке колебаний линейное решение перестает быть удовлетворительным. Становится заметной роль нелинейного члена в (2.6). Он является положительным и соответствует растягивающей силе, возникающей при отклонении струны от прямой линии. При положительном значении параметра  $\beta$  первого поверхностного эффекта (в составе  $\gamma$ ) эта сила обеспечивает большее ограничение амплитуды, чем при отрицательном значении  $\beta$ . Однако анализ нелинейных колебаний не входит в задачу данной работы.

Ограничиваемся тремя членами ряда Стирлинга гамма-функции

$$\Gamma(1 - \mu) = \sqrt{2\pi} e^{\mu-1} (1 - \mu)^{\frac{1}{2}-\mu} \left( 1 + \frac{1}{12(1 - \mu)} + \frac{1}{288(1 - \mu)^2} - \dots \right)$$

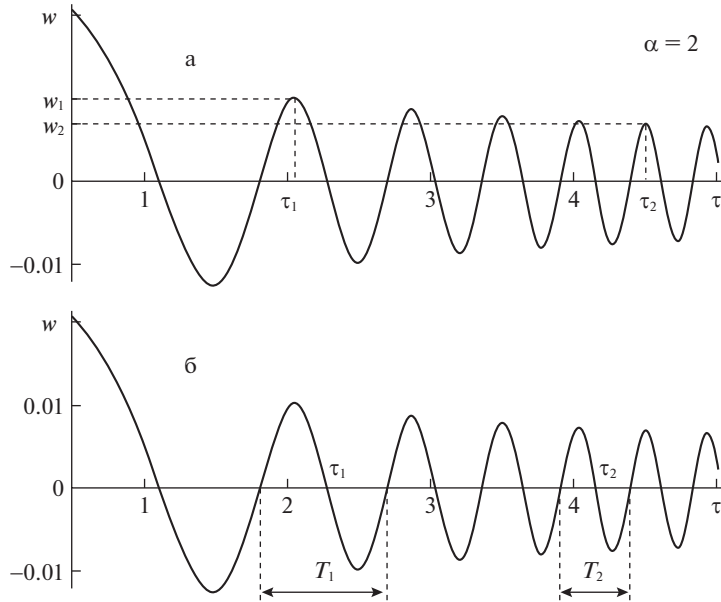


Рис. 4. Периоды (а) и амплитуды (б) функции прогиба в точке  $\xi = 1/2$ .

Известные точные значения  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  получаются из двух членов этого ряда без заметных погрешностей. Аргумент  $1 - \mu = (1 + \alpha)(2 + \alpha)^{-1}$  изменяется от  $1/3$  до  $2/3$  при  $-1/2 < \alpha < 1$ . Воспользуемся также асимптотическими приближениями функции Бесселя для малого и большого аргументов

$$J_{-\mu}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z^{-\mu}}{2^{-\mu} \Gamma(1 - \mu)}, \quad J_{-\mu}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(z + \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.3)$$

**4. Определение скорости изменения давления.** Представляет интерес определение показателя  $\alpha$  по известному значению периода колебаний  $T$ , который в данной задаче зависит от времени. Из равенства  $z = 2\pi\tau/T$  с учетом значения  $z$  из (3.1) получаем  $T = (2 + \alpha)\tau^{-\alpha/2}$ . Считая, что моментам времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответствуют периоды  $T_1$  и  $T_2$ , можно записать (из-за использования асимптотических представлений учет времени на рис. 4 начинается не с нуля)

$$\alpha = 2 \frac{\ln T_1 - \ln T_2}{\ln \tau_2 - \ln \tau_1} \quad (4.1)$$

В качестве моментов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  принимаются значения  $\tau$  при  $w(\tau) = 0$ . Поскольку определение (4.1) значения  $\alpha$  является приближенным (ввиду неперIODичности процесса) целесообразно привлечь также другую процедуру. Например, можно использовать значение прогиба  $w(\xi, \tau)$  в определенной точке  $\xi$  в разные моменты времени [31]. В соответствии с (3.2), (3.3) определяем амплитуду по длине струны и по времени  $w(\xi, \tau)$ . Моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответствуют амплитудам  $w_1$  и  $w_2$  (рис. 4 (б)). Тогда

$$\alpha = 4 \frac{\ln w_1 - \ln w_2}{\ln \tau_2 - \ln \tau_1} \quad (4.2)$$

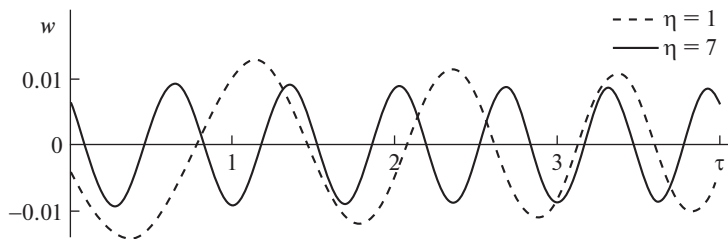


Рис. 5. Колебания предварительно растянутой струны ( $\xi = 1/2$ ).

Из решения (3.2) прямой задачи получены: моментам  $\tau_1 = 5.4933$ ,  $\tau_2 = 8.5214$  соответствуют периоды  $T_1 = 0.8542$ ,  $T_2 = 0.6853$ . По ним из (4.1) получаем  $\alpha = 1.0034$  (вместо точного значения  $\alpha = 1$ ). Пусть известны амплитуды  $w_1 = 0.0100$ ,  $w_2 = 0.0089$  и соответствующие моменты  $\tau_1 = 5.2769$ ,  $\tau_2 = 8.3488$ . Тогда по формуле (4.2)  $\alpha = 0.9999$ . Объяснение большей погрешности (4.1) по сравнению с (4.2) состоит в том, что периоды  $T_1$  и  $T_2$  являются усредненными, в то время как величины  $w_1$  и  $w_2$  в (4.2) определяются более точно. Для давления  $p = p_0 \tau^\alpha$  при  $\tau = 5$  в первом случае имеем погрешность около 0.544% ( $p = 5.027p_0$  вместо точного значения  $5p_0$ ), во втором случае 0.023%. Погрешность уменьшается при уменьшении неперериодичности (с приближением показателя  $\alpha$  к нулю).

**5. Колебания предварительно растянутой струны.** Рассмотрим случай предварительно растянутой струны при  $\alpha = 1$ . Из уравнения (2.6) следует

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_1^2} - \tau_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \tau_1 = \eta + \tau \quad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) имеет вид (3.2), (3.3), где вместо  $\tau$  нужно подставить  $\tau_1$  (либо  $\eta + \tau$ ). Входящие в них величины при  $\alpha = 1$  равны:  $\mu = 1/3$ ,  $\Gamma(2/3) = 1.354$ . Решение (3.2) при учете (3.3) приобретает вид:

$$w \approx W_1 \pi^{-\frac{2}{3}} 1.626 (\eta + \tau)^{\frac{1}{4}} \cos\left(z - \frac{\pi}{12}\right) \sin \pi \xi; \quad z = \frac{2\pi}{3} (\eta + \tau)^{\frac{3}{2}} \quad (5.2)$$

График этого решения в точке  $\xi = 1/2$  при  $W_1 = 0.02$  и различных значениях  $\eta$  дан на рис. 5.

Для определения параметра натяжения  $\eta$  может быть поставлена обратная задача. Положив  $\tau_i = \tau_i + \eta$  в (5.2), находим:

$$\eta = \frac{T_1^2 \tau_1 - T_2^2 \tau_2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad \eta = \frac{\tau_1 w_1^4 - \tau_2 w_2^4}{w_2^4 - w_1^4} \quad (5.3)$$

По найденному значению  $\eta$  может быть определено либо предварительное продольное перемещение  $u_0$  (при известных данных  $E$ ,  $p_0$ ,  $L$ ,  $\beta$ )

$$u_0 = \frac{p_0 L \eta}{E(1 + \beta)}, \quad (5.4)$$

либо параметр первого поверхностного эффекта

$$\beta = \frac{\eta p_0 L}{E u_0} - 1 \quad (5.5)$$

Как во всякой обратной задаче, предъявляются повышенные требования к точности экспериментальных данных  $\tau_1, \tau_2, T_1, T_2, w_1, w_2$ , входящих в (4.1), (4.2), (5.3). То же самое относится к параметрам  $E, p_0, L$ , входящим в (5.4) и (5.5). Отметим, в (5.5) имеется разность близких чисел.

**Заключение.** Приведенная постановка задачи отличается от обычной теории свободных колебаний струн тем, что учитываются два поверхностных эффекта. Первый из них, связанный различием упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема, приводит к изменению эффективной жесткости струны на растяжение, модуль упругости которой определяется безразмерным параметром  $\beta$  в (1.1).

Второй эффект характеризуется безразмерным параметром  $\alpha$ , данным в (2.5). В зависимости от возрастания ( $\alpha > 0$ ) или убывания ( $\alpha < 0$ ) избыточного давления происходит увеличение или уменьшение эффективной жесткости и частот поперечных колебаний струны по сравнению с частотами, возбуждаемыми при давлении сборки системы струна–опоры ( $\alpha = 0$ ). Без учета второго эффекта колебания струны могут быть только периодическими и обусловленными начальными условиями. Предложен способ определения параметра  $\alpha$  изменения давления на поверхность струны по экспериментальным данным периодов и амплитуд колебаний в различные моменты времени. Разные формулировки соответствующей обратной задачи приводят к соотношениям (4.1), (4.2), позволяющим получать результаты с различной точностью.

Для многих материалов в литературе отсутствуют значения параметра первого поверхностного эффекта  $\beta$ . Их определение представляет очевидные сложности. Один из возможных способов определения параметра  $\beta$  (или величины  $E_s$ ) состоит в решении обратной задачи для предварительно растянутой струны. Для этого служит формула (5.5). Если параметр  $\beta$  известен для материала, то в этом случае по формуле (5.4) может быть определена трудно измеряемая величина продольного перемещения.

Работа выполнена по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0088).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
2. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Phys. Rep.* 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
3. *Elnathan R., Kwiat M., Patolsky F., Voelcker N.H.* Engineering vertically aligned semiconductor nanowire arrays for applications in the life sciences // *Nano Today*. 2014. V. 9. № 2. P. 172–196.
4. *Guo L.J.* Nanoimprint lithography: methods and material requirements // *Adv. Mater.* 2007. V. 19. № 4. P. 495–513.
5. *Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanotribology and nanofabrication of  $\text{MoO}_3$  structures by atomic force microscopy // *Science*. 1996. V. 272. № 5265. P. 1158–1161.
6. *Wong E., Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanobeam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes // *Science*. 1997. V. 277. № 5334. P. 1971–1975.
7. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // *Int. J. Solids Struct.* 1978. V. 14. № 6. P. 431–440.
8. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. 2000. V. 11. № 3. P. 139–147.
9. *Sharma P., Ganti S., Bhate N.* Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Appl. Phys. Lett.* 2003. V. 82. № 4. P. 535–537.
10. *He L.H., Lim C.W., Wu B.S.* A continuum model for size-dependent deformation of elastic films of nano-scale thickness // *Int. J. Solids Struct.* 2004. V. 41. № 3–4. P. 847–857.
11. *Hajjaj A.Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F.K., Younis M.I.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2020. V. 119. 103328.



12. *Lim C.W., He L.H.* Size-dependent non-linear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *Int. J. Mech. Sci.* 2004. V. 46. № 11. P. 1715–1726.
13. *Wu J.X., Li X.F., Tang A.Y., Lee K.Y.* Free and forced transverse vibration of nanowires with surface effects // *J. Vib. Control.* 2017. V. 23. № 13. P. 2064–2077.
14. *Link H.* Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv.* 1960. V. 31. № 3. P. 149–167.
15. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
16. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.* 1963. V. 1. № 6. P. 1458–1459.
17. *Ильгамов М.А.* Спектр частот проволочного микро- и нанорезонатора // *Докл. РАН.* 2020. Т. 494. № 1. С. 21–24.
18. *Белецкий В.В., Новикова Е.Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите // *Космич. исслед.* 1969. Т. 7. № 3. С. 377–384.
19. *Демьянов Ю.А., Кокорева Д.В., Малашин А.А.* Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах // *ПММ.* 2003. Т. 67. № 2. С. 273–283.
20. *Асланов В.С.* Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника // *ПММ.* 2010. Т. 74. № 4. С. 582–593.
21. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* Влияние жесткости на поперечно-продольные движения музыкальных струн // *ПММ.* 2011. Т. 75. № 1. С. 95–100.
22. *Холодовский С.Е.* О движении полуограниченной струны с точечной массой на конце // *ПММ.* 2018. Т. 82. № 6. С. 751–756.
23. *Русских С.В., Шклярчук Ф.Н.* Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с устранением колебаний // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 4. С. 549–561.
24. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* О линейных поперечных колебаниях троса космического лифта // *ПММ.* 2020. Т. 84. № 5. С. 543–553.
25. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. С. 232–251.
26. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // *Акустич. ж.* 2015. Т. 61. № 6. С. 647–655.
27. *Ильгамов М.А., Ридель В.В.* Режимы разрывных колебаний в абсолютно гибкой нити // *Докл. РАН.* 1995. Т. 343. № 4. С. 478–481.
28. *Ридель В.В., Ильгамов М.А.* Нелинейные волны в абсолютно гибкой нити // *ПМТФ.* 1997. Т. 38. № 6. С. 139–146.
29. *Ильгамов М.А.* Скорость волны и спектр частот продольных колебаний растянутых нанопленок из интерметаллидов // *ФТТ.* 2015. Т. 57. № 5. С. 950–954.
30. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: МПО, 1996. 496 с.
31. *Утяшев И.М.* Анализ поперечных колебаний струны в зависимости от изменяющегося натяжения // *Вестн. Башкирского унив.* 2013. Т. 18. № 4. С. 973–977.

## Non-Periodic Oscillations of Micro- and Nano-Strings in a Gaseous Medium

M. A. Ilgamov<sup>a,b,c,#</sup> and I. M. Utyashev<sup>a,b,##</sup>

<sup>a</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC R.A.S, Ufa, Russia

<sup>b</sup> Bashkir State University, Ufa, Russia

<sup>c</sup> Institute of Mechanical Engineering. A.A. Blagonravova RAS, Moscow, Russia

<sup>#</sup>e-mail: ilgamov@anrb.ru

<sup>##</sup>e-mail: utyashev@mail.ru

Oscillations of a micro- and nano-string with varying pressure in a gaseous medium are considered. In this case, two surface effects are taken into account. The first is due to the difference in elastic properties in the surface layer and in the bulk of the material. Depending on the material, the effective tensile stiffness may be greater or less than conventional stiffness. The second effect is due to the interaction of the pressure of the medium and the difference

of the areas of the convex and concave sides of the circular surface, which appears when the deviation from the straight line. These effects are determined by dimensionless parameters. The solution is determined depending on the given law of pressure change over time. An increase in pressure leads to a decrease in amplitude and an increase in the oscillation frequency. An increase in amplitude and a decrease in frequency are associated with vacuuming. In the inverse problem, the law of pressure change is determined, as well as the parameter of the first effect.

*Keywords:* micro- and nano-strings, gas medium, pressure change, transverse non-periodic oscillations, inverse problem

## REFERENCES

1. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*, 2008, vol. 3, no. 1–2, pp. 20–27.
2. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Phys. Rep.*, 2011, vol. 503, no. 4–5, pp. 115–163.
3. *Elnathan R., Kwiat M., Patolsky F., Voelcker N.H.* Engineering vertically aligned semiconductor nanowire arrays for applications in the life sciences // *Nano Today*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 172–196.
4. *Guo L.J.* Nanoimprint lithography: methods and material requirements // *Adv. Mater.*, 2007, vol. 19, no. 4, pp. 495–513.
5. *Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanotribology and nanofabrication of MoO<sub>3</sub> structures by atomic force microscopy // *Science*, 1996, vol. 272, no. 5265, pp. 1158–1161.
6. *Wong E., Sheehan P.E., Lieber C.M.* Nanobeam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes // *Science*, 1997, vol. 277, no. 5334, pp. 1971–1975.
7. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* Surface stress in solids // *Int. J. Solids Struct.*, 1978, vol. 14, no. 6, pp. 431–440.
8. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, no. 3, pp. 139–147.
9. *Sharma P., Ganti S., Bhate N.* Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities // *Appl. Phys. Lett.*, 2003, vol. 82, no. 4, pp. 535–537.
10. *He L.H., Lim C.W., Wu B.S.* A continuum model for size-dependent deformation of elastic films of nano-scale thickness // *Int. J. Solids Struct.*, 2004, vol. 41, no. 3–4, pp. 847–857.
11. *Hajjaj A.Z., Jaber N., Ilyas S., Alfosail F.K., Younis M.I.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2020, vol. 119, 103328.
12. *Lim C.W., He L.H.* Size-dependent non-linear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *Int. J. Mech. Sci.*, 2004, vol. 46, no. 11, pp. 1715–1726.
13. *Wu J.X., Li X.F., Tang A.Y., Lee K.Y.* Free and forced transverse vibration of nanowires with surface effects // *J. Vibr. Control.*, 2017, vol. 23, no. 13, pp. 2064–2077.
14. *Link H.* Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv*, 1960, vol. 31, no. 3, pp. 149–167.
15. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
16. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 1458–1459.
17. *Ilgamov M.A.* The Frequency spectrum of a wire micro- and nanoresonator // *Dokl. Phys.*, 2020, vol. 65, pp. 308–311.
18. *Beletsky V.V., Novikova E.T.* On the relative motion of a bundle of two bodies in orbit // *Cosmic Res.*, 1969, vol. 7, no. 3, pp. 377–384. (in Russian)
19. *Dem'yanov Yu.A., Kokoreva D.V., Malashin A.A.* Mutual influence of transverse and longitudinal vibrations in musical instruments // *JAMM*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 273–283. (in Russian)
20. *Aslanov V.S.* The effect of the elasticity of an orbital tether system on the oscillations of a satellite // *JAMM*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 416–424. (in Russian)
21. *Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A.* The effect of stiffness on the transverse and longitudinal motions of a musical string: Commemorating the 100th anniversary of the birth of Kh.A. Rakhmatulin // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 65–68. (in Russian)

22. *Kholodovskii S.E.* On the Motion of a Semibounded String with a Point Mass Attached to the Free End // *Mech. of Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 266–270.
23. *Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N.* Movement of a Heavy Rigid Body Suspended on a Cable of Variable Length with Oscillation Elimination // *Mech. of Solids*, 2019, vol. 54, no 5, pp. 683–693.
24. *Sadov Y.A., Nuralieva A.B.* Linear Transverse Oscillations of the Space Elevator Cable // *Mech. of Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1185–1193.
25. *Akhtyamov A.M.* The Theory of Identification of Boundary Conditions and Its Applications (Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i yeye prilozheniya). Moscow: Fizmatlit, 2009. pp. 232–251. (in Russian)
26. *Akhtyamov A.M., Utyashev I.M.* Identification of boundary conditions at both ends of a string from the natural vibration frequencies // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 6, pp. 615–622.
27. *Ilgamov M.A., Ridel V.V.* Modes of discontinuous vibrations in an absolutely flexible thread // *Dokl. Phys.*, 1995, vol. 343, no. 4, pp. 478–481. (in Russian)
28. *Ridel V.V., Ilgamov M.A.* Nonlinear waves in an absolutely flexible fiber // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 38, no.6, pp. 936–942.
29. *Ilgamov M.A.* Wave velocity and frequency spectrum of longitudinal oscillations of stretched intermetallic nanofilms // *Phys. Solid State*, 2015, vol. 57, no. 5, pp. 962–966.
30. *Zaitsev V.F., Polyanin A.D.* Partial Differential Equations Handbook: Exact Solutions (*Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi: Tochnyye resheniya*). Moscow: MPO, 1996. 496 p. (in Russian)
31. *Utyashev I.M.* Analysis of transverse vibrations of a string depending on changing tension // *Vestn. Bashk. Univ.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 973–977. (in Russian)