ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 2, с. 186–205

УДК 517.977.58

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА: МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ

© 2022 г. В. Н. Ушаков[1,*], А. А. Ершов[1,], А. В. Ушаков[1,***]**

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

**e-mail: ushak@imm.uran.ru*

***e-mail: ale10919@yandex.ru*

****e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.04.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 25.11.2021 г.

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучается зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего системе дифференциального включения. При определенных условиях на управляемую систему оценивается степень этой зависимости от параметра.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, зависимость от параметра, аппроксимация

DOI: 10.31857/S0032823522010088

1. Введение. Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучаются множества достижимости и интегральные воронки дифференциального включения, соответствующего системе. Проблематика, связанная с изучением множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем, тесно переплетена с многочисленными задачами теории динамических систем и, в том числе, с теми, которые возникают в теории управления и теории дифференциальных игр [1–8]. При исследовании множеств достижимости, их конструировании и оценивании применяются различные теоретические подходы и ассоциированные с ними вычислительные методы [1–19]. К упомянутым задачам управления и дифференциальных игр принадлежат, например, различного рода задачи о сближении, разрешающие конструкции которых включают в себя одним из основных компонентов так называемые множества разрешимости – множества тех позиций управляемой системы, из которых разрешима задача о сближении [1–4]. Во многих задачах эти множества могут быть описаны достаточно просто в терминах множеств достижимости и интегральных воронок [1–19]. Некоторые задачи могут быть сформулированы как задачи теории управляемости динамических систем [17].

В настоящей работе изучается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок от параметра: оценивается степень этой зависимости от параметра при определенных условиях на управляемую систему. Для оценки этой зависимости вводятся системы множеств в фазовом пространстве, аппроксимирующие множества достижимости и интегральные воронки на заданном промежутке времени, отвечающие конечному разбиению этого промежутка. При этом сначала оценивается степень зависимости аппроксимирующей системы множеств от параметра и затем эта оценка используется при оценке зависимости от параметра множеств достижимости и интегральных воронок дифференциального включения. Такой подход естественен и особенно полезен при изучении конкретных прикладных задач управления, при решении которых в конечном итоге приходится иметь дело не с идеальными множествами достижимости и интегральными воронками, а с их аппроксимациями, отвечающими дискретному представлению временного промежутка.

2. Оценки множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений. На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система Σ

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u), \tag{2.1}$$

$$u \in P, \tag{2.2}$$

здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы Σ, u – управляющее воздействие из множества $P \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^p)$, α – параметр из множества $\mathscr{L} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^l)$; $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ – пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max(h(X^{(1)}, X^{(2)}), h(X^{(2)}, X^{(1)}))$, $h(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max\limits_{x^{(1)} \in X^{(1)}} \rho(x^{(1)}, X^{(2)})$ – хаусдорфово отклонение $X^{(1)}$ от $X^{(2)}$, где $\rho(x^{(1)}, X^{(2)}) = \min\limits_{x^{(2)} \in X^{(2)}} \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\|$.

Предполагается, что система Σ удовлетворяет условиям.

A. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\left\| f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u) \right\| \le \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|)$$

$$(t, x) \text{ и } (\tau, x) \text{ из } D, \quad u \in P, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L}$$

$$\left\| f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u) \right\| \le L(t) \|x - y\|$$

$$(t, x) \text{ и } (t, y) \text{ из } D, \quad u \in P, \quad \alpha \in \mathscr{L}$$

B. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\left\| f_\alpha(t, x, u) \right\| \le \gamma(1 + \|x\|); \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P, \quad \alpha \in \mathscr{L}$$

Введем многозначное отображение

$$(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) = \operatorname{co} \mathscr{F}_\alpha(t, x)$$

$$\mathscr{F}_\alpha(t, x) = \{ f_\alpha(t, x, u) : u \in P \} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$$

$$(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathscr{L}$$

Отображение $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям.

A*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} d(F_\alpha(t, x), F_\beta(\tau, x)) \le \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|) \\ (t, x) \text{ и } (\tau, x) \text{ из } D, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L} \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$
\begin{gathered}
d(F_\alpha(t,x),F_\alpha(t,y)) \le L(t)\|x-y\| \\
(t,x) \text{ и } (t,y) \text{ из } D, \quad \alpha\in\mathscr{L}
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

B*. Найдется такое $\gamma\in(0,\infty)$, что

$$
h(F_\alpha(t,x),\{\mathbf{0}\}) \le \gamma(1+\|x\|); \quad (t,x,\alpha)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathscr{L},
$$

здесь $\mathbf{0}$ — нуль-вектор в $\mathbb{R}^n$.

Введем на $[t_0,\vartheta]$ д.в. (дифференциальное включение)

$$
\frac{dx}{dt}\in F_\alpha(t,x); \quad \alpha\in\mathscr{L}, \tag{2.5}
$$

отвечающее системе Σ.

Пусть t_* и t^* ($t_*<t^*$) из $[t_0,\vartheta]$, $x^*\in\mathbb{R}^n$, $X^*\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha\in\mathscr{L}$.

Введем обозначения

$X_\alpha(t^*,t_*,x_*)$ — множество достижимости д.в. (2.5) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*)=x_*$;

$X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ — множество достижимости д.в. (2.5) в момент t^* с начальным множеством X_*:

$$
X_\alpha(t^*,t_*,X_*) = \bigcup_{x_*\in X_*} X_\alpha(t^*,t_*,x_*)
$$

Известно, что $X_\alpha(t^*,t_*,X_*)\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, отображение $(t^*,t_*,X_*)\mapsto X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ непрерывно по t^* на $[t_*,\vartheta]$ при фиксированных $(t_*,X_*)\in[t_0,\vartheta]\times\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ в хаусдорфовой метрике, а также $X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_*, t^*, α.

Отображение $\alpha\mapsto X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ непрерывно также на $\mathscr{L}$ при фиксированных (t^*,t_*,X_*), $t_0\le t_*<t^*\le\vartheta$, $X_*\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Уточним непрерывную зависимость $\alpha\mapsto X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ на множестве $\mathscr{L}$. Для этого выведем оценку сверху хаусдорфова расстояния

$$
d(X_\alpha(t^*,t_*,X_*),X_\beta(t^*,t_*,X_*)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L},
$$

которую представим в виде функции от $\|\alpha-\beta\|$.

Известно, что при условиях **A***, **B*** множество достижимости $X_\alpha(t^*,t_*,X_*)$ удовлетворяет равенству

$$
X_\alpha(t^*,t_*,X_*) = \lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0}\tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)
$$

Здесь $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)\subset\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathscr{L}$ — множества, отвечающие разбиениям $\Gamma=\{\tau_0=t_*,\tau_1,\dots,\tau_i,\dots,\tau_N=t^*\}$ ($\tau_{i+1}-\tau_i=\Delta=\Delta(\Gamma)=N^{-1}(t^*-t_*)$, $i=\overline{0,N-1}$) промежутка $[t_*,t^*]$, задаются равенством $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)=\tilde{X}^\Gamma_\alpha(t_N)$ при помощи соотношений

$$
\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_0)=X_*, \quad \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1})=\tilde{X}^\Gamma_\alpha\left(\tau_{i+1},\tau_i,\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_i)\right); \quad i=\overline{0,N-1},
$$

где обозначено

$$\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau^*, \tau_*, W_*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = w_* + (\tau^* - \tau_*)f_*, w_* \in W_*, f_* \in F_\alpha(\tau_*, w_*)\},$$

$$t_* \le \tau_* < \tau^* \le t^*, \quad W_* \in \operatorname{comp}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Принимая во внимание условие **B*** и размеры компакта X_*, можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащую все возникающие в последующих рассуждениях и оценках множества в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Считаем, что ниже в оценках применены функции $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ и $L(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, отвечающие этой области D.

Вывод оценки величины

$$d\left(X_\alpha\left(t^*, t_*, X_*\right), X_\beta\left(t^*, t_*, X_*\right)\right); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \tag{2.6}$$

проведем сначала для одноточечного множества $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$.

При выводе оценки (2.6) применим так называемую “пошаговую” схему рассуждений и “пошаговые” оценки, то есть при выводе оценки величины (2.6) будем продвигаться по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ разбиения Γ.

Вывод оценки начинаем с промежутка $[\tau_0, \tau_1]$ разбиения Γ. Оценим сверху хаусдорфово отклонение

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)\right); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L},$$

здесь $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1) = \tilde{X}_\alpha(\tau_1, \tau_0, x_*)$, $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1) = \tilde{X}_\beta(\tau_1, \tau_0, x_*)$.

В $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1)$ выберем точку $x(\tau_1)$, где $\rho\left(x(\tau_1), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)\right) = h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)\right)$. Точка $x(\tau_1)$ представима в виде

$$x(\tau_1) = x_* + \Delta f_\alpha(\tau_0); \quad f_\alpha(\tau_0) \in F_\alpha(\tau_0, x_*)$$

Выберем в $F_\beta(\tau_0, x_*)$ вектор $f_\beta(\tau_0)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_0)$. Справедливо соотношение

$$\left\|f_\alpha(\tau_0) - f_\beta(\tau_0)\right\| = \rho(f_\alpha(\tau_0), F_\beta(\tau_0, x_*)) \le h(F_\alpha(\tau_0, x_*), F_\beta(\tau_0, x_*)) \le \omega^*(\|\alpha - \beta\|)$$

В $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)$ рассмотрим точку $y(\tau_1) = x_* + \Delta f_\beta(\tau_0)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Имеет место оценка

$$\left\|x(\tau_1) - y(\tau_1)\right\| \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|)$$

Из определения точки $x(\tau_1)$ и включения $y(\tau_1) \in \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)$ следует оценка:

$$h(\tau_1) \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|), \tag{2.7}$$

здесь обозначено $h(\tau_1) = h(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1))$.

Обратимся к следующему промежутку $[\tau_1, \tau_2]$ разбиения Γ и рассмотрим множества $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2) = \tilde{X}_\alpha(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1))$, $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2) = \tilde{X}_\beta(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1))$.

В $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2)$ выберем точку $x(\tau_2)$, где

$$\rho\left(x(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right) = h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right) \tag{2.8}$$

Точка $x(\tau_2)$представима в виде

$$x(\tau_2) = x_*(\tau_1) + \Delta f_\alpha(\tau_1); \quad x_*(\tau_1) \in \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_1), \quad f_\alpha(\tau_1) \in F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1))$$

Выберем в $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)$ ближайшую к $x_*(\tau_1)$ точку $y_*(\tau_1)$:

$$\left\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\right\| = \rho\left(x_*(\tau_1), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1)\right)$$

Справедлива оценка

$$\left\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\right\| \le h(\tau_1) \tag{2.9}$$

Выберем в $F_{\beta}(\tau_1, y_*(\tau_1))$ ближайший к $f_{\alpha}(\tau_1)$ вектор $f_{\beta}(\tau_1)$. Выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\left\|f_{\alpha}(\tau_1) - f_{\beta}(\tau_1)\right\| \le h\left(F_{\alpha}\left(\tau_1, x_*(\tau_1)\right), F_{\beta}\left(\tau_1, y_*(\tau_1)\right)\right) \le \\ \le d\left(F_{\alpha}\left(\tau_1, x_*(\tau_1)\right), F_{\beta}\left(\tau_1, y_*(\tau_1)\right)\right) \le \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_1)h(\tau_1),\end{gathered}$$

согласно (2.3) и (2.4).

Введем в рассмотрение точку

$$y(\tau_2) = y_*(\tau_1) + \Delta f_{\beta}(\tau_1); \quad y_*(\tau_1) \in \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1), \quad f_{\beta}(\tau_1) \in F_{\beta}\left(\tau_1, y_*(\tau_1)\right)$$

Точки $x(\tau_2)$ и $y(\tau_2)$ стеснены неравенством

$$\begin{gathered}\left\|x(\tau_2) - y(\tau_2)\right\| \le \left\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\right\| + \Delta\left\|f_{\alpha}(\tau_1) - f_{\beta}(\tau_1)\right\| \le \\ \le h(\tau_1) + \Delta(\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_1)h(\tau_1)) \le \\ \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1),\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\Delta_1 = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

Принимая во внимание (2.8) и включение $y(\tau_2) \in \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2) = \tilde{X}_{\beta}(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_1))$, получаем

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right) \le \left\|x(\tau_2) - y(\tau_2)\right\| \tag{2.11}$$

Из оценок (2.10), (2.11) следует

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right) \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1) \tag{2.12}$$

Рассмотрим следующий промежуток $[\tau_2, \tau_3]$ разбиения Γ и множества $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_3) = \tilde{X}_{\alpha}(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2))$, $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_3) = \tilde{X}_{\beta}(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2))$.

Оценим сверху хаусдорфово отклонение

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_3), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_3)\right); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L}$$

Выберем для этого в $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_3)$ точку $x(\tau_3)$, где

$$\rho\left(x(\tau_3), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_3)\right) = h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_3), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_3)\right) \tag{2.13}$$

Точка $x(\tau_3)$ представима в виде

$$x(\tau_3) = x_*(\tau_2) + \Delta f_{\alpha}(\tau_2); \quad x_*(\tau_2) \in \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2), \quad f_{\alpha}(\tau_2) \in F_{\alpha}\left(\tau_2, x_*(\tau_2)\right).$$

Выберем в $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)$ ближайшую к $x_*(\tau_2)$ точку $y_*(\tau_2)$:

$$\left\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\right\| = \rho\left(x_*(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right)$$

Справедливо неравенство

$$\left\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\right\| \le h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_2), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_2)\right)$$

Выберем в $F_\beta(\tau_2, y(\tau_2))$ ближайший к $f_\alpha(\tau_2)$ вектор $f_\beta(\tau_2)$. Получаем оценку

$$\left\|f_\alpha(\tau_2) - f_\beta(\tau_2)\right\| \le h\Big((\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y(\tau_2))\Big) \le$$
$$\le d\left(F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))\right) \le$$
$$\le \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_2)\left\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\right\|$$

Рассмотрим точку $y(\tau_3) = y_*(\tau_2) + \Delta f_\beta(\tau_2)$ в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$. Точки $x(\tau_3)$ и $y(\tau_3)$ удовлетворяют неравенству

$$\left\|x(\tau_3) - y(\tau_3)\right\| \le \left\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\right\| +$$
$$+\,\Delta\left(\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_2)\left\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\right\|\right) \le$$
$$\le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_2)\Delta_2} h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)\right) \le$$
$$\le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_2)\Delta_2}\left(\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1)\right),$$

где $\Delta_2 = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

В итоге получаем

$$\left\|x(\tau_3) - y(\tau_3)\right\| \le \left(1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2}\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2} h(\tau_1) \tag{2.14}$$

Учитывая (2.13) и включение $y(\tau_3) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$, получаем

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)\right) \le \left\|x(\tau_3) - y(\tau_3)\right\| \tag{2.15}$$

Из (2.14), (2.15) следует

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)\right) \le \left(1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2}\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2} h(\tau_1) \tag{2.16}$$

Для окончательного уяснения структуры оценки величины $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}),\ \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$, $i = \overline{0, N-1}$ рассмотрим следующий промежуток $[\tau_3, \tau_4]$ разбиения Γ и множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4) = \tilde{X}_\alpha(\tau_4, \tau_3, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3))$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4) = \tilde{X}_\beta(\tau_4, \tau_3, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3))$.

Оценим сверху величину

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)\right); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L}$$

Для этого выберем в $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4)$ точку $x(\tau_4)$, где

$$\rho\left(x(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)\right) = h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)\right) \tag{2.17}$$

Точка $x(\tau_4)$ представима в виде

$$x(\tau_4) = x_*(\tau_3) + \Delta f_\alpha(\tau_3); \quad x_*(\tau_3) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \quad f_\alpha(\tau_3) \in F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3))$$

Выберем в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$ ближайшую к $x_*(\tau_3)$ точку $y_*(\tau_3)$:

$$\left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\| = \rho\left(x_*(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)\right)$$

Справедливо неравенство

$$\left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\| \le h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)\right) \tag{2.18}$$

Выберем в $F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))$ вектор $f_\beta(\tau_3)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_3)$. Справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left\|f_\alpha(\tau_3) - f_\beta(\tau_3)\right\| \le h\left(F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3)), F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))\right) \le \\ \le d\left(F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3)), F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))\right) \le \\ \le \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_3)\left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\|\end{gathered}$$

согласно соотношениям (2.3), (2.4).

Выделим в $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_4)$ точку $y(\tau_4) = y_*(\tau_3) + \Delta f_\beta(\tau_3)$.

Принимая во внимание (2.16), (2.18), получаем

$$\begin{gathered}\left\|x(\tau_4) - y(\tau_4)\right\| \le \left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\| + \Delta\left\|f_\alpha(\tau_3) - f_\beta(\tau_3)\right\| \le \\ \le \left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\| + \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_3)\left\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\right\| \le \\ \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_3)\Delta_3}\left(\left(1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2}\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_3)\Delta_3}h(\tau_1)\right), \\ \Delta_3 = \Delta = \Delta(\Gamma)\end{gathered}$$

В итоге получаем оценку

$$\begin{gathered}\left\|x(\tau_4) - y(\tau_4)\right\| \le \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|)\left(1 + e^{L(\tau_3)\Delta_3} + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2}\right) + \\ + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1)\end{gathered}$$

Далее, учитывая выбор точек $x(\tau_4)$ и $y(\tau_4)$, имеем

$$h\left(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_4), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_4)\right) \le \left\|x(\tau_4) - y(\tau_4)\right\|$$

Из последних двух неравенств следует оценка

$$\begin{gathered}h\left(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_4), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_4)\right) \le \left(1 + e^{L(\tau_3)\Delta_3} + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2}\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + \\ + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1)\end{gathered} \tag{2.19}$$

Анализируя оценки (2.12), (2.16), (2.19), заключаем, что промежутку $[\tau_3, \tau_4]$, $i = \overline{0, N-1}$ разбиения Γ отвечает следующая оценка хаусдорфова отклонения $h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}),$ $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1}))$ множества $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\alpha(\tau_{i+1}, \tau_i,\ \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_i))$ от множества $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\beta(\tau_{i+1}, \tau_i,$ $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_i))$:

$$\begin{gathered}h\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1})) \le \\ \le \left(1 + e^{\sum\limits_{k=i}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum\limits_{k=i-1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum\limits_{k=i-2}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + \ldots e^{\sum\limits_{k=1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}\right)h(\tau_1)\end{gathered} \tag{2.20}$$

Далее, учитывая, что $h(\tau_1) = h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_1), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1))$ удовлетворяет (2.7), получаем из (2.20) следующую оценку

$$\begin{gathered}h\left(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1})\right) \le \\ \le \left(1 + e^{\sum\limits_{k=i}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum\limits_{k=i-1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum\limits_{k=i-2}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + \ldots + e^{\sum\limits_{k=1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|)\end{gathered} \tag{2.21}$$

Дополним оценку (2.21) комментарием, относящимся к введенной в условие **B** непрерывной функции $L(t)$ на промежутке $[\tau_0, \vartheta]$.

Замечание 2.1. В многочисленных работах, посвященных нелинейным управляемым системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями, в качестве одного из основных условий, налагаемых на систему, вводится условие локальной липшицевости ее правой части по фазовой переменной.

При этом достаточно часто при исследовании и решении задач управления такими системами возникает потребность в выделении в пространстве позиций управляемой системы области D, которая бы заведомо содержала все компоненты разрешающей конструкции (разрешающие множества, траектории систем, фазовые ограничения и т.д.). Иными словами, довольно часто при исследовании и решении задач управления возникает потребность в выделении в пространстве позиций системы сцены D, на которой разворачивается процесс решения задачи. При этом при конструировании решения и обосновании его корректности употребляется константа Липшица L, отвечающая этой области D. Однако, введенная область D может оказаться большой и соответствующая ей константа L может также оказаться большой. В таком случае оценки, обосновывающие корректность решения задачи управления, в которых участвует эта константа L, могут оказаться грубыми. По разным соображениям эти оценки в конкретной задаче управления (с конкретной управляемой системой) могут быть неудовлетворительными с точки зрения лица, решающего задачу и рассчитывающего на более тонкие оценки. В связи с этим в условия, налагаемые на нелинейную управляемую систему (2.1), в настоящей работе вместо традиционного условия локальной липшицевости с константой Липшица L введена непрерывная функция $L(t) \in (0,\infty)$ на $[\tau_0,\vartheta]$, более адекватная динамике системы (2.1). Оценка (2.21) величины $h(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}),\ \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1}))$ является более точной в том смысле, что для каждого промежутка $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ разбиения Γ участвует в пошаговых оценках свое значение $L(\tau_i) \in (0,\infty)$, близкое при малых $\Delta = \Delta(\Gamma)$ к $L(t)$, $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$, а не какая-либо константа $L \in (0,\infty)$, общая для всех $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ из промежутка $[\tau_0,\vartheta]$. Отметим, однако, что эти рассуждения предполагают, что область D в пространстве позиций системы и отвечающая ей функция $L(t)$ на $[\tau_0,\vartheta]$ выбраны достаточно адекватно динамике управляемой системы. Так, например, в задачах управления, связанных с исследованием множеств достижимости и интегральных воронок, желательно, чтобы область D отслеживала более менее точно динамику множеств достижимости и, стало быть, — пространственную структуру интегральной воронки.

Таким образом, во многих конкретных задачах управления проблема выбора области D и соответствующей ей функции $L(t)$, $t \in [\tau_0,\vartheta]$ является, на наш взгляд, весьма значимой, ибо от этого зависит точность оценок, связанных с решением задач.

Очевидно, что один из путей решения этой проблемы в каждой конкретной задаче, связанной с исследованием множеств достижимости и интегальных воронок, состоит в пошаговом (по временным слоям $[\tau_i,\tau_{i+1}]\times\mathbb{R}^n$, $i = 0,1,\ldots,N-1$) формировании области D и функции $L(t)$, $t \in [\tau_0,\vartheta]$, осуществляемых параллельно с конструированием множеств достижимости.

Вернемся теперь к оценке (2.21) и представим некоторые загрубления этой оценки, имеющие более простую форму.

Заменив в (2.21) единицу и экспоненты $\exp[\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k]$, $r = \overline{1,i}$ экспонентой $\exp[\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k]$, получаем оценку

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}),\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le \exp\left[\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k\right](i+1)\Delta\omega^*(\|\alpha-\beta\|),$$

то есть

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le \exp\left[\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k\right](\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.22}$$

В частности, справедлива оценка

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)\right) \le \exp\left[\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k\right](t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.23}$$

Заменив в оценках (2.21)–(2.23) числа $L(\tau_k)$, $k = \overline{0, N-1}$ каким-либо L, удовлетворяющим неравенству $0 < \max\limits_{t\in[t_0,\vartheta]} L(t) \le L < \infty$, получаем соответственно оценки при $i \in \overline{0, N-1}$ и α, β из $\mathscr{L}$:

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le \sum_{k=0}^{i} e^{Lk\Delta}\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.24}$$

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le e^{L\cdot(\tau_{i+1} - \tau_0)}(\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.25}$$

$$h\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)\right) \le e^{L(t^* - t_*)}(t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.26}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше относительно $h(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}),\ \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1}))$ дают оценки величины $h(\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1}),\ \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}))$, аналогичные оценкам (2.21)–(2.26). Учитывая это, получаем в итоге следующие оценки хаусдорфова расстояния $d(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}),$ $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1}))$, $i \in \overline{0, N-1}$.

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le \left(1 + \sum_{s=0}^{i-1}\exp\left[\sum_{k=i-s}^{i} L(\tau_k)\Delta_k\right]\right)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.27}$$

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le e^{\sum\limits_{k=0}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}(\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.28}$$

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)\right) \le e^{\sum\limits_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k}(t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.29}$$

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le \sum_{k=0}^{i} e^{Lk\Delta}\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.30}$$

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})\right) \le e^{L\cdot(\tau_{i+1} - \tau_0)}(\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.31}$$

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)\right) \le e^{L(t^* - t_*)}(t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \tag{2.32}$$

Мы рассмотрели случай, когда $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$ и для него получили оценки (2.27)–(2.32). Оценки (2.27)–(2.32) справедливы и в общем случае $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_*, X_*) \subset D$.

Имея ввиду общий случай, выделим из (2.27)–(2.32) оценку (2.29) для последующих рассуждений. Наряду с множествами $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*)$ и $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)$, входящими в (2.29), рассмотрим множества достижимости $X_{\alpha}(t^*) = X_{\alpha}(t^*, t_*, X_*)$, $X_{\beta}(t^*) = X_{\beta}(t^*, t_*, X_*)$ д.в. (2.5).

Нас интересуют оценки сверху величин $d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*))$ и $d(X_\beta(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\beta(t^*))$, α и β из $\mathscr{L}$. Известно, что при условиях **A** и **B** на систему (2.1) эти оценки имеют вид

$$\begin{aligned} d\left(X_\alpha(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)\right) &\le e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)(\omega^*(\Delta)+LK\Delta) \\ d\left(X_\beta(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\beta(t^*)\right) &\le e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)(\omega^*(\Delta)+LK\Delta), \end{aligned} \tag{2.33}$$

здесь $L \in (0,\infty)$ неравенством, следующим после формулы (2.23), а $K = \max\limits_{(t,x,u,\alpha)\in D\times P\times L} \|f_\alpha(t,x,u)\| \in (0,\infty)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Замечание 2.2. Можно показать, что, наряду с оценками (2.33), выполняются более тонкие оценки

$$d\left(X_\alpha(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)\right) \le \exp\left[\int\limits_{t_*}^{t^*} L(t)dt\right](t^*-t_*)(\omega^*(\Delta)+LK\Delta)$$

$$d\left(X_\beta(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\beta(t^*)\right) \le \exp\left[\int\limits_{t_*}^{t^*} L(t)dt\right](t^*-t_*)(\omega^*(\Delta)+LK\Delta)$$

Принимая во внимание (2.29) и (2.33), получаем

$$\begin{gathered} d\left(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)\right) \le \\ \le d\left(X_\alpha(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*)\right) + d\left(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(t^*), \tilde{X}^\Gamma_\beta(t^*)\right) + d\left(\tilde{X}^\Gamma_\beta(t^*), X_\beta(t^*)\right) \le \\ \le e^{\sum\limits_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k}(t^*-t_*)\omega^*(\|\alpha-\beta\|) + 2e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)(\omega^*(\Delta)+LK\Delta), \end{gathered}$$

α и β из $\mathscr{L}$.

Так как эта оценка имеет место при любых разбиениях Γ промежутка $[\tau_0, \vartheta]$, то устремив диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ к нулю, получаем

$$d\left(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)\right) \le \exp\left[\int\limits_{t_*}^{t^*} L(t)dt\right](t^*-t_*)\omega^*(\|\alpha-\beta\|), \tag{2.34}$$

здесь $\int_{t_*}^{t^*} L(t)dt$ — интеграл Римана функции $L(t)$ на отрезке $[t^*, t_*] \subset [t_0, \vartheta]$.

Теперь обратимся к промежутку $[t_0, \vartheta]$, на котором изначально рассматриваются управляемая система (2.1) и д.в. (2.5).

Полагаем в предыдущих выкладках $t_* = t_0$, $t^* = t \in [t_0, \vartheta]$, $X_* = X^{(0)} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$, где $X^{(0)}$ — начальное множество для системы (2.1) и д.в. (2.5), так что множества достижимости $X_\alpha(t)$ и $X_\beta(t)$ д.в. (2.5) принимают вид $X_\alpha(t) = X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})$, $X_\beta(t) = X_\beta(t, t_0, X^{(0)})$.

Запишем для этих множеств оценку (2.34)

$$d(X_\alpha(t), X_\beta(t)) \le \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} L(t)dt\right](t-t_0)\omega^*(\|\alpha-\beta\|), \tag{2.35}$$

$t \in [t_0, \vartheta]$, α и β из $\mathscr{L}$.

Введем также разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = t_{i+1} - t_i = N^{-1}(\vartheta - t_0)$.

Наряду с множеством достижимости $X_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ рассмотрим интегральные воронки

$$X_\alpha\left(t_0, X^{(0)}\right) = \bigcup_{t\in[t_0,\vartheta]} (t, X_\alpha(t)); \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

дифференциального включения (2.5).

Полагаем $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i\in\Gamma}(t_i, X_\alpha(t_i))$, $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i\in\Gamma}(t_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i))$ – множества в D, а согласно рекуррентным соотношениям для $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, в которых положено $\tau_0 = t_0$ имеем $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_0) = X^{(0)}$.

Множества $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ есть некоторые аппроксимации интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, дискретные по переменной $t \in [t_0, \vartheta]$.

Из оценки

$$d\left(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)\right) \le e^{L(t_i - t_0)}(t_i - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta); \quad i = \overline{1, N}, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

следует оценка

$$d\left(X_\alpha^\Gamma\left(t_0, X^{(0)}\right), \tilde{X}_\alpha^\Gamma\left(t_0, X^{(0)}\right)\right) \le e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \tag{2.36}$$

здесь L определено неравенством после формулы (2.23), K – равенством следующим за формулой (2.33).

Учитывая, что для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеют место

$$d\left((t, X_\alpha(t)), (t_i, X_\alpha(t_i))\right) \le (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L},$$

получаем

$$d\left(X_\alpha\left(t_0, X^{(0)}\right), X_\alpha^\Gamma\left(t_0, X^{(0)}\right)\right) \le (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L} \tag{2.37}$$

Принимая во внимание оценки (2.36), (2.37), получаем

$$\begin{gathered} d\left(X_\alpha\left(t_0, X^{(0)}\right), \tilde{X}_\alpha^\Gamma\left(t_0, X^{(0)}\right)\right) \le \\ \le e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L} \end{gathered} \tag{2.38}$$

Очевидно, что используя описанную выше в этой работе технику вывода оценок, можем заменить оценку (2.38) более точной оценкой

$$\begin{gathered} d\left(X_\alpha\left(t_0, X^{(0)}\right), \tilde{X}_\alpha^\Gamma\left(t_0, X^{(0)}\right)\right) \le \\ \le e^{\sum_{i=0}^{N-1} L(t_i)\Delta_i}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + (1 + K)\Delta \\ \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma), \quad i \in \overline{0, N-1}, \quad \alpha \in \mathcal{L} \end{gathered} \tag{2.39}$$

Для интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ и $X_\beta(t_0, X^{(0)})$, α и β из $\mathcal{L}$ также имеет место важная оценка, очевидным образом вытекающая из (2.35)

$$\begin{gathered} d\left(X_\alpha\left(t_0, X^{(0)}\right), X_\beta\left(t_0, X^{(0)}\right)\right) \le \\ \le \exp\left[\int_{t_0}^{\vartheta} L(t)dt\right](\vartheta - t_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|); \quad \alpha, \beta \text{ из } \mathcal{L} \end{gathered} \tag{2.40}$$

3. Задачи о наведении интегральных воронок дифференциальных включений на целевое множество в пространстве $\mathbb{R}^2$. В этом параграфе ограничимся рассмотрением системы (2.1) и д.в. (2.5) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изучим задачи о наведении интегральных воронок $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ и их аппроксимаций $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, x_0)$ на целевые множества в $\mathbb{R}^2$. Некоторые из этих задач сформулируем с привлечением понятия площади множества в $\mathbb{R}^2$. В связи с этим изучим вопросы, затрагивающие приближенное вычисление площадей множеств достижимости $X_\alpha(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in X^{(0)} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и ассоциированных с $X_\alpha(t, t_0, x_0)$ множеств. При этом воспользуемся оценками хаусдорфовых расстояний, полученными в § 2.

Начнем изучение задач о наведении с рассмотрения отдельных интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $X^{(0)} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. К классу этих воронок принадлежат, разумеется, и воронки $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$, так что оценки хаусдорфовых расстояний, полученные для интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, имеют место и для воронок $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathscr{L}$.

Возьмем произвольную воронку $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $X^{(0)} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и аппроксимирующее ее множество $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i))$ в D, отвечающее разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N = \vartheta\}$ $(t_{i+1} - t_i = \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma)$, $i = \overline{0, N-1})$.

Рассогласование между временны́ми сечениями $X_\alpha(t_i)$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$ множеств $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ стеснено оценкой

$$d\left(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)\right) \le e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} \left(K\Delta \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j + (t_j - t_0)\omega^*(\Delta)\right); \quad \alpha \in \mathscr{L} \tag{3.1}$$

Наряду с множеством $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и его сечениями $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$ рассматриваем множество $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_0, X^{(0)})$, $\beta \in \mathscr{L}$ и его сечения $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$.

Справедлива оценка

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)\right) \le e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} (t_j - t_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L} \tag{3.2}$$

Из оценок (3.1) и (3.2) вытекает

$$d\left(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)\right) \le 8(\Delta, \|\alpha - \beta\|), \tag{3.3}$$

где обозначено

$$8(\Delta, \rho) = e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} \left((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + K\Delta \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right)$$
$$\alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L}, \quad t_i \in \Gamma, \quad \rho \in (0, \infty)$$

Оценки (3.1)–(3.3) применим при изучении задач о наведении интегральных воронок на целевые множества. Также они будут учтены при оценке рассогласования множеств типа множеств достижимости в $\mathbb{R}^2$.

Сформулируем эти задачи о наведении.

Считаем, что задано конечное множество $\mathcal{T}$ моментов $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{N_*}$ в промежутке $[t_0, \vartheta]$ и что рассмотренные нами разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, ..., t_i, ..., t_N = \vartheta\}$ содержат это множество $\mathcal{T}$.

Считаем, что в $\mathbb{R}^2$ заданы компакты $X^{(0)}$, $X^{(\vartheta)}$, $\Phi^{(k)}$, где каждое множество $\Phi^{(k)}$ отвечает своему моменту $\tau_k \in \mathcal{T}$; при этом множества $X^{(0)}$, $X^{(\vartheta)}$, $\Phi^{(k)}$, $\tau_k \in \mathcal{T}$ имеют спрямляемые границы $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(\vartheta)}$, $\partial \Phi^{(k)}$, $\tau_k \in \mathcal{T}$.

Задача 1. О наведении интегральной воронки (жесткая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha_*, x_*) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, что выполняются соотношения

$$X^{(\vartheta)} \subset X_{\alpha_*}(\vartheta, t_0, x_*), \quad \Phi^{(k)} \cap X_{\alpha_*}(\tau_k, t_0, x_*) = \varnothing, \quad \tau_k \in \mathcal{T} \tag{3.4}$$

Точное вычисление множеств $X_{\alpha_*}(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$ невозможно из-за сложности динамики системы (2.1).

В частности, невозможно вычисление множеств $X_{\alpha_*}(\vartheta, t_0, x_*)$, $X_{\alpha_*}(\tau_k, t_0, x_*)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$. Также в случае, когда, например, одно из множеств $\mathcal{L}$, $X^{(0)}$ бесконечно, невозможен полный перебор всех пар $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$.

Поэтому имеет смысл перейти от формулировки задачи 1 к формулировке в терминах множеств $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$. При этом под множествами $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i, t_0, x_0)$ мы понимаем временны́е сечения множеств $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$, отвечающие моментам $t_i \in \Gamma$.

А именно, полагаем, что заданы $\varepsilon, \rho, \sigma$ из $(0, \infty)$ и отвечающие числам ρ и σ конечные множества ρ-сеть $\mathcal{L}^{(\rho)} = \{\alpha^{(r)} : r = \overline{1, r_*}\}$ и σ-сеть $X^{(\sigma)} = \{x^{(s)} : s = \overline{1, s_*}\}$ в множествах $\mathcal{L}$ и $X^{(0)}$.

Задача 1(ε)_о наведении интегральных воронок. Требуется определить такую пару $(\alpha^{(r)}, x^{(s)}) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, что выполняются соотношения

$$X^{(\vartheta)} \subset \tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^\Gamma(\vartheta, t_0, x^{(s)}), \quad \Phi_\varepsilon^{(k)} \cap \tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^\Gamma(\tau_k, t_0, x_*) = \varnothing, \quad \tau_k \in \mathcal{T} \tag{3.5}$$

Для задач 1 или 1(ε), сформулированных для конкретной системы (2.1), может статься, что решения не существует. Учитывая такие ситуации, мы сформулируем задачу о наведении в менее жесткой постановке с привлечением понятия площади множества в $\mathbb{R}^2$.

При этом мы предполагаем, что такая постановка не противоречит смыслу исходной реальной задачи о наведении.

Сначала дадим формулировку в терминах идеальных множеств достижимости $X_\alpha(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$.

Предварительно введем обозначения

$$J^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{\tau_k \in T} s\left(\Phi^{(k)} \backslash X_\alpha(\tau_k, t_0, x)\right),$$

$$J^{(2)}(\alpha, x) = s\left(X^{(\vartheta)} \cap X_\alpha(\vartheta, t_0, x)\right),$$

$$\alpha \in \mathcal{L}, \quad x \in X^{(0)}$$

здесь $s(Y)$ – площадь множества $Y \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$.

Зафиксируем λ_1 и λ_2 из [0, 1], $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Полагаем $J(\alpha, x) = \lambda_1 J^{(1)}(\alpha, x) + \lambda_2 J^{(2)}(\alpha, x)$.

Задача 2. О наведении интегральных воронок (мягкая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha^*, x^*) \in \mathscr{L} \times X^{(0)}$, что выполняется соотношение

$$J(\alpha^*, x^*) = \max_{(\alpha,x)\in\mathscr{L}\times X^{(0)}} J(\alpha, x) \tag{3.6}$$

Поскольку точно решить задачу 2 мы не в состоянии, в силу тех же причин, что и задачу 1, то сформулируем и будем искать решение некоторой аппроксимационной задачи, в которой вместо множеств $\mathscr{L}$ и $X^{(0)}$, в случаях, когда они не являются конечными, вписаны их конечные сети $\mathscr{L}^{(\rho)}$ и $X^{(\sigma)}$, а вместо (идеальных) множеств достижимости $X_\alpha(t, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ вписаны их аппроксимции $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha^{(r)}}(t_i, t_0, x^{(s)})$, $(\alpha^{(r)}, x^{(s)}) \in \mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$.

Введем обозначения

$$\tilde{J}^{(1)}_{\Gamma}(\beta, y) = \sum_{\tau_k\in T} s\left(\Phi^{(k)} \backslash \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, y)\right), \quad \tilde{J}^{(2)}_{\Gamma}(\beta, y) = s\left(X^{(\vartheta)} \cap \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\vartheta, t_0, y)\right)$$

$$(\beta, y) \in L^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$$

Полагаем $\tilde{J}_{\Gamma}(\beta, y) = \lambda_1 \tilde{J}^{(1)}_{\Gamma}(\beta, y) + \lambda_2 \tilde{J}^{(2)}_{\Gamma}(\beta, y)$.

Задача 3. О наведении интегральных воронок (мягкая постановка). Требуется определить такую пару $(\beta^*, y^*) \in \mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, что выполняется соотношение

$$\tilde{J}_{\Gamma}(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta,y)\in\mathscr{L}^{(\rho)}\times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_{\Gamma}(\beta, y) \tag{3.7}$$

Покажем, что при малых ρ, σ из $(0, \infty)$ решение аппроксимационной задачи 3 близко к решению задачи 2. Это обстоятельство оправдывает подмену задачи 2 задачей 3. При этом под близостью решений мы понимаем как близость оптимальных значений (3.6) и (3.7) в задачах 2 и 3, так и близость оптимальных пар в $\mathscr{L} \times X^{(0)}$ и $\mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$.

Итак, рассмотрим сначала пары (α, x) и (β, y), где (α, x) выбрана в $\mathscr{L} \times X^{(0)}$ произвольно, а пара $(\beta, y) \in \mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ такова, что $\|\alpha - \beta\| \le \rho$, $\|x - y\| \le \sigma$.

Оценим сверху хаусдорфово расстояние

$$d\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, y)\right); \quad \tau_k \in \mathscr{T}$$

Учитывая (3.3) и оценку

$$d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, y)\right) \le \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right]\|x - y\| \le \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right]\sigma, \tag{3.8}$$

получаем

$$d\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, y)\right) \le d(X_\alpha\left(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, x)\right) +$$
$$+ d\left(\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_k, t_0, y)\right) \le \varkappa(\Delta, \rho) + \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right]\sigma; \quad \tau_k \in \mathscr{T}$$

Введем для упрощения обозначение

$$\varkappa^{\Delta}(\rho, \sigma) = \varkappa(\Delta, \rho) + \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right]\sigma; \quad \rho \text{ и } \sigma \text{ из } (0, \infty)$$

В итоге для пар $(\alpha, x) \in \mathscr{L} \times X^{(0)}$ и $(\beta, y) \in \mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\|\alpha - \beta\| \le \rho$, $\|x - y\| \le \sigma$ имеем оценку

$$d\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)\right) \le \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.9}$$

Распишем подробнее функцию $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$ и оценим ее сверху.

Справедливо представление

$$\varkappa^\Delta(\rho, \sigma) = \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right]\left((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + K\Delta\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j + \sigma\right)$$

Так как, согласно условию **A**, функция $L(t) \in (0, \infty)$ непрерывна на $[t_0, \vartheta]$, то при $L \in \left(\max\limits_{t\in[t_0,\vartheta]} L(t), \infty\right)$ справедлива оценка

$$\varkappa^\Delta(\rho, \sigma) \le e^{L(\vartheta - t_0)}((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + LK(\vartheta - t_0)\Delta + \sigma)$$

Из этой оценки вытекает предельное равенство $\lim\limits_{\Delta\downarrow 0, \rho\downarrow 0, \sigma\downarrow 0} \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) = 0$.

Условия **A** и **B** дополним следующим условием.

C. Границы $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(\vartheta)}$, $\partial\Phi^{(k)}$, $\partial X_\alpha(t_i, t_0, x)$, $\partial\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i, t_0, y)$ $((\alpha, x) \in \mathscr{L} \times X^{(0)}$, $(\beta, y) \in \mathscr{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\tau_k \in \mathscr{T}$, $t_i \in \Gamma)$ ограничены сверху по длине некоторым $l^* \in (0, \infty)$.

Условие **C** выполнимо для многих задач о наведении интегральных воронок, поскольку длины границ $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(\vartheta)}$, $\partial\Phi^{(k)}$ $(\tau_k \in \mathscr{T})$ ограничены, а длина границ $\partial X_\alpha(t_i, t_0, x)$ и $\partial\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i, t_0, y)$, $t_i \in \Gamma$ не возрастает скачкообразно с возрастанием моментов t_i. Так, например, множество $X_\alpha(t, t_0, x)$, $\alpha \in \mathscr{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ непрерывно зависит от t на $[t_0, \vartheta]$ (см. разд. 2) и во многих задачах управления вместе с ним непрерывно зависит от t на $[t_0, \vartheta]$ множество $\partial X_\alpha(t, t_0, x)$. В этих задачах непрерывно зависит от t и длина границы $\partial X_\alpha(t, t_0, x)$.

Полагаем

$U_\alpha(\tau_k) = \mathrm{cl}\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x)_{\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)} \setminus X_\alpha(\tau_k, t_0, x)\right)$ — $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$-слой вокруг множества $X_\alpha(\tau_k, t_0, x)$;

$\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) = \mathrm{cl}(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)_{\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)} \setminus \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y))$ — $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$-слой вокруг множества $X_\alpha(\tau_k, t_0, x)$.

Из оценки (3.9) следуют включения

$$\begin{aligned} X_\alpha(\tau_k, t_0, x) &\subset \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cup \tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) \\ \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) &\subset X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cup U_\alpha(\tau_k) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Из включений (3.10) получаем

$$\begin{aligned} X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)} &\subset \left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) \cup \left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) \cap \Phi^{(k)}\right); \quad \tau_k \in \mathscr{T} \\ \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)} &\subset \left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) \cup \left(U_\alpha(\tau_k) \cap \Phi^{(k)}\right); \quad \tau_k \in \mathscr{T} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекают неравенства для площадей

$$\begin{aligned} s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) &\subset s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) + s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right); \quad \tau_k \in \mathscr{T} \\ s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) &\subset s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) + s\left(U_\alpha(\tau_k)\right); \quad \tau_k \in \mathscr{T} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из неравенств (3.12) следует оценка

$$\left|s\left(X_\alpha(\tau_k,t_0,x)\cap\Phi^{(k)}\right)-s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k,t_0,y)\cap\Phi^{(k)}\right)\right|\le$$
$$\le\max\left(s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right),s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right)\right);\quad \tau_k\in\mathcal{T} \tag{3.13}$$

Сделаем краткое замечание относительно слоев, окружающих компактные множества в $\mathbb{R}^2$; к таким слоям принадлежат множества $U_\alpha(\tau_k)$ и $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k\in\mathcal{T}$.

Известно (см., например, [20]), что если $X\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ – выпуклое множество, то площадь $s(U_\varepsilon)$ ε-слоя $U_\varepsilon=\mathrm{cl}(X_\varepsilon\backslash X)$, окружающего множество X и длина $l(\partial X)$ границы ∂X множества X связаны равенством

$$s(U_\varepsilon)=l(\partial X)\varepsilon+\pi\varepsilon^2$$

Если же множество $X\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ невыпукло, то площадь $s(U_\varepsilon)$ может быть меньше, чем $l(\partial X)\varepsilon+\pi\varepsilon^2$. В этом случае справедливо неравенство

$$s(U_\varepsilon)\le l(\partial X)\varepsilon+\pi\varepsilon^2, \tag{3.14}$$

которым мы воспользуемся при оценке площадей $U_\alpha(\tau_k)$, $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k\in\mathcal{T}$.

А именно, принимая во внимание определение множеств $U_\alpha(\tau_k)$, $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k\in\mathcal{T}$ и учитывая (3.14), получаем

$$\max\left(s\left(U_\alpha(\tau_k)\right),s(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k))\right)\le$$
$$\le\max\left(l\left(\partial\left(X_\alpha(\tau_k,t_0,x)\cap\Phi^{(k)}\right)\right),l\left(\partial\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k,t_0,x)\cap\Phi^{(k)}\right)\right)\right)\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+$$
$$+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2\le l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2 \tag{3.15}$$

Из (3.13), (3.15) следует

$$\left|s\left(X_\alpha(\tau_k,t_0,x)\cap\Phi^{(k)}\right)-s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k,t_0,y)\cap\Phi^{(k)}\right)\right|\le$$
$$\le l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2;\quad \tau_k\in\mathcal{T} \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует оценка

$$\left|s\left(\Phi^{(k)}\backslash X_\alpha(\tau_k,t_0,x)\right)-s\left(\Phi^{(k)}\backslash\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k,t_0,y)\right)\right|\le$$
$$\le l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2;\quad \tau_k\in\mathcal{T} \tag{3.17}$$

Из (3.17) получаем оценку

$$\left|\sum_{\tau_k\in\mathcal{T}}s\left(\Phi^{(k)}\backslash X_\alpha(\tau_k,t_0,x)\right)-\sum_{\tau_k\in\mathcal{T}}s\left(\Phi^{(k)}\backslash\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k,t_0,y)\right)\right|\le$$
$$\le N_*\left(l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2\right),$$

которую запишем в виде

$$\left|J^{(1)}(\alpha,x)-\tilde{J}_\Gamma^{(1)}(\beta,y)\right|\le N_*\left(l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2\right) \tag{3.18}$$

По аналогичной схеме выводится оценка

$$\left|J^{(2)}(\alpha,x)-\tilde{J}_\Gamma^{(2)}(\beta,y)\right|\le l^*\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)+\pi\varkappa^\Delta(\rho,\sigma)^2 \tag{3.19}$$

Из оценок (3.18) и (3.19) получаем

$$\left|J(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)\right| \le \zeta^\Delta(\rho, \sigma), \tag{3.20}$$

где введено обозначение

$$\zeta^\Delta(\rho, \sigma) = (N_* + 1)\left(l^* \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) + \pi \varkappa^\Delta(\rho, \sigma)^2\right), \Delta, \rho \text{ и } \sigma \text{ из } (0, \infty)$$

Опираясь на оценку (3.20), покажем, что при малых Δ, ρ и σ решения задач 2 и 3 близки, и оценим эту близость.

Действительно, согласно (3.20), для любой пары $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)} \subset \mathcal{L} \times X^{(0)}$ выполняется неравенство

$$\left|J(\beta, y) - \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)\right| \le \zeta^\Delta(\rho, \sigma),$$

поскольку пара $(\beta, y) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ является ближайшей парой в $\mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ к самой себе и, стало быть, удовлетворяет неравенствам $\|\beta - \beta\| \le \rho$, $\|y - y\| \le \sigma$.

Отсюда для любой пары $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ верно неравенство

$$\tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \le J(\beta, y) \le \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x),$$

из которого следует

$$\max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \le \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \tag{3.21}$$

С другой стороны, согласно (3.20), справедливо неравенство

$$J(\alpha, x) \le \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma)$$

для любых $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ и $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\|\alpha - \beta\| \le \rho$, $\|x - y\| \le \sigma$.

Отсюда следует, что для любой пары $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ справедливо неравенство

$$J(\alpha, x) \le \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \zeta^\Delta(\rho, \sigma),$$

из которого, в свою очередь, следует

$$\max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \le \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.22}$$

Из неравенств (3.21), (3.22) следует

$$\max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \le \max_{(\alpha, x) \in L \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \le$$
$$\le \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma),$$

т.е. имеет место оценка

$$\left|\max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)\right| \le \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.23}$$

Допустим, пара $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ – оптимальная в задаче 3, т.е. $\tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)$.

Тогда справедлива оценка

$$\left|\max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*)\right| \le \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.24}$$

Кроме того, как показано выше, пара (β^*, y^*), как и любая пара $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ удовлетворяет неравенству

$$\left|J(\beta^*, y^*) - \tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*)\right| \le \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.25) получаем

$$\left|\max_{(\alpha,x)\in\mathcal{L}\times X^{(0)}} J(\alpha, x) - J(\beta^*, y^*)\right| \le 2\zeta^\Delta(\rho, \sigma) \tag{3.26}$$

Неравенство (3.26) устанавливает, что любая оптимальная пара $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ в задаче 3 является $2\zeta^\Delta(\rho, \sigma)$-оптимальной в задаче 2.

Принимая во внимание квадратичную зависимость функции $\zeta^\Delta(\rho, \sigma)$ от функции $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$ и учитывая равенство $\lim\limits_{\Delta\downarrow 0,\rho\downarrow 0,\sigma\downarrow 0} \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) = 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta\downarrow 0,\rho\downarrow 0,\sigma\downarrow 0} \zeta^\Delta(\rho, \sigma) = 0$.

Отсюда следует, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\Delta = \Delta(\Gamma)$, ρ и σ из $(0, \infty)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\zeta^\Delta(\rho, \sigma) \le \varepsilon \tag{3.27}$$

По ρ и σ, удовлетворяющим (3.27), находим пару $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ — оптимальную в задаче 3.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. *Kurjanskii A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
3. *Куржанский А.Б.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ. 2009. 756 с.
4. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
5. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
6. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
7. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
8. *Никольский М.С.* Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. киберн. 1987. № 4. С. 31–34.
9. *Никольский М.С.* Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокитта // Дифференц. ур. 2000. Т. 96. № 11. С. 1501–1505.
10. *Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Построение множества достижимости интегратора Брокетта // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 707–794.
11. *Ананьевский И.М.* Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автомат. и телемех. 2001. № 3. С. 3–15.
12. *Ананьевский И.М.* Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. ур. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11.
13. *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
14. *Филиппова Т.Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269.

15. *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.* Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
16. *Ершов А.А., Ушаков В.Н.* О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.
18. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др.* Управление маятником при помощи маховика М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 170–195.
19. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
20. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.

Control Systems Depending on Parameter: Reachable Sets and Integral Funnels

V. N. Ushkov[a,#], A. A. Ershov[a,##], and A. V. Ushkov[a,###]

[a] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia
[#]e-mail: ushak@imm.uran.ru
[##]e-mail: ale10919@yandex.ru
[###]e-mail: aushakov.pk@gmail.com

A nonlinear control system in a finite-dimensional Euclidean space and on a finite time interval, depending on a parameter, is considered. The dependence on the parameter of the reachable sets and integral funnels of the corresponding differential inclusion is studied. Under certain conditions on the control system, the degree of this dependence on the parameter is estimated.

Keywords: control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, parameter dependence, approximation

REFERENCES

1. *Kurjanskii A.B.* Control and Observation under Conditions of Uncertainty. (Upravlenie i nablyudeniye v usloviyakh neopredelennosti) Moscow: Nauka, 1977. 392 p. (in Russian)
2. *Kurjanskii A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
3. *Kurjanskii A.B.* Selected Works. (Izbrannye Trudy) Moscow: MSU, 2009. 756 p. (in Russian)
4. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional Differential Games. (Pozitsionnyye differentsial'nyye igry) Moscow: Fizmatlit, 1974. 456 p. (in Russian)
5. *Chernous'ko F.L.* Estimation of the Phase State of Dynamical Systems: Method of Ellipsoids. (Otsenivaniye fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: Metod ellipsoidov) Moscow: Nauka, 1988. 319 p. (in Russian)
6. *Chernous'ko F.L., Melikyan A.A* Game Control and Search Problems. (Igrovyye zadachi upravleniya i poiska) Moscow: Nauka, 1978. 270 p. (in Russian)
7. 7. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften, 1998, vol. 54, pp. 149–232.
8. *Nikol'skii M.S.* On the approximation of the reachable set of a differential inclusion // Moscow Univ. Bull. Ser. 15. Comput. Math.&Cybern., 1987, no. 4, pp. 31–34. (in Russian)
9. *Nikol'skii M.S.* An inner estimate of the attainability set of Brockett's nonlinear integrator // Differ. Eqns., 2000, vol. 36, pp. 1647–1651.
10. *Vdovin S.A., Taras'yev A.M., Ushakov V.N.* Construction of the attainability set of a Brockett integrator // JAMM, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646.
11. *Anan'evskii I.M.* Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters // Autom.&Remote Control, 2001, vol. 62, pp. 343–355.
12. *Anan'evskii I.M.* Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion // Differ. Eqns., 2003, vol. 39, pp. 1–10.

13. *Gusev V.I.* Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S134–S146.
14. *Filippova T.F.* Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S95–S102.
15. *Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Ushakov A.V.* Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions // Bull. Udmurt Univ. Math. Mech. Comput. Sci., 2011, iss. 4, pp. 23–39.
16. *Ershov A.A., Ushakov V.N.* An approach problem for a control system with an unknown parameter // Sbornik: Mathematics, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352.
17. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Control of Linear Systems under External Disturbances: Technique of Linear Matrix Inequalities. (Upravleniye lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv) Moscow: Lenand, 2014. 560 p.
18. *Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V. et al.* Control of the Pendulum Using a Flywheel. (Upravleniye mayatnikom pri pomoshchi makhovika) Moscow: MSU, 2009. pp. 170–195. (in Russian)
19. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. N.Y.: Wiley, 1967. 576 p.
20. *Leichtweiss K.* Von konvexe mengen. Berlin: Springer, 1980. 330 p.