

УДК 531.36

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

© 2022 г. М. В. Беличенко^{1,*}¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия***e-mail: tuzemec1@rambler.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2021 г.

После доработки 07.12.2021 г.

Принята к публикации 23.12.2021 г.

Исследуется движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого (точка подвеса) совершает высокочастотные горизонтальные вибрации, а геометрия масс тела для этой точки отвечает случаю С.В. Ковалевской. Задача рассматривается в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанных в гамильтоновой форме. Изучаются частные движения тела — маятниковые колебания и вращения вокруг горизонтально расположенной главной оси инерции, являющейся либо осью динамической симметрии, либо осью из экваториальной плоскости инерции. При этом радиус-вектор центра масс тела относительно точки подвеса совершает маятниковые движения в вертикальной плоскости, содержащей ось вибрации (продольные движения) или перпендикулярной этой оси (поперечные движения). В данной работе завершен начатый ранее линейный анализ орбитальной устойчивости описанных маятниковых движений, проводимый с учетом пространственных возмущений. Эта задача сведена к эквивалентной задаче об устойчивости тривиального равновесия редуцированной неавтономной системы с двумя степенями свободы. В областях устойчивости в линейном приближении проведен подробный нелинейный анализ орбитальной устойчивости. Проверены критерии устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, критерии формальной устойчивости, а также рассмотрены случаи резонансов четвертого порядка.

Ключевые слова: волчок Ковалевской, высокочастотные вибрации, маятниковые движения, орбитальная устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522020035

1. Введение. Маятниковые движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой впервые описаны Б.К. Млодзеевским в 1894 г. [1], где было показано, что такие движения может совершать тело с центром масс в главной плоскости инерции; осью вращения является главная ось инерции, перпендикулярная этой плоскости. Позднее рассматривались вопросы об устойчивости малых маятниковых колебаний [2], а также плоских и близких к ним вращений тела с центром масс на главной оси инерции [3]. Маятниковые движения изучены для тел с геометрией масс, отвечающей случаю Ковалевской [4, 5], Горячева—Чаплыгина [6], Бобылева—Стеклова [7], а также динамически симметричного тела [8].

Теоретический и прикладной интерес представляет изучение влияния высокочастотных вибраций на движение твердого тела или системы твердых тел. Первые рабо-

ты в данной области опубликованы А. Стефенсоном [9], показавшим возможность стабилизации верхнего положения математического маятника за счет вертикальных вибраций точки подвеса. Подробная библиография по динамике маятниковых систем при наличии вибраций содержится в монографиях [10, 11].

В работе А.П. Маркеева [12] были получены приближенные автономные уравнения движения тела с произвольной геометрией масс в случае произвольных высокочастотных периодических или условно-периодических вибраций точки подвеса в трехмерном пространстве. В этих уравнениях влияние вибраций точки подвеса эквивалентно наложению дополнительного (стационарного) вибрационного потенциального поля. В рамках указанной системы уравнений проведен ряд исследований частных случаев движений твердого тела с вибрирующей точкой подвеса для различных случаев геометрии масс тела и различных случаев вибраций [12–18].

Были описаны [16] (в рамках приближенной автономной системы) маятниковые движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса для широкого спектра вибраций, включающего и вибрации вдоль горизонтальной прямой. Была исследована орбитальная устойчивость этих движений. В этой статье угол собственного вращения волчка относительно оси симметрии являлся циклической координатой, и потому исследование устойчивости проведено по отношению к отклонению плоскости маятниковых движений волчка.

Другим классическим случаем динамики твердого тела с неподвижной точкой является случай С.В. Ковалевской [19]. В частности, было проведено [4, 5] исследование устойчивости маятниковых движений волчка Ковалевской с неподвижной точкой подвеса по отношению к возмущениям угла собственного вращения вокруг главной оси, содержащей центр масс тела.

Представляет интерес (в рамках приближенной автономной системы) изучить влияние вибраций точки подвеса волчка Ковалевской на устойчивость его маятниковых движений. В случае вибраций точки подвеса вдоль горизонтальной прямой система допускает как маятниковые движения, аналогичные таким движениям тела с неподвижной точкой, так и маятниковые движения других типов. Изучение этих движений начато [18] с линейного анализа их орбитальной устойчивости (по отношению к пространственным возмущениям).

Отметим, что первый интеграл, имеющий место в задаче о движении волчка Ковалевской вокруг неподвижной точки, исчезает при наличии вибраций точки подвеса. В такой постановке задачи отсутствует и циклическая координата (угол прецессии). При этом из-за появления выделенного направления в пространстве, определяемого направлением оси вибраций, возникает возможность стабилизации маятниковых движений, неустойчивых в случае неподвижной точки подвеса.

Целью данной работы является завершение линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых движений волчка Ковалевской с вибрирующим подвесом, а также проведение подробного нелинейного анализа их орбитальной устойчивости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, точка O которого (называемая далее точкой подвеса) совершает периодическое движение вдоль фиксированной горизонтальной прямой с частотой Ω по закону $O'O = \xi(t)$ относительно фиксированной точки O' . Среднее значение $\langle \xi(t) \rangle$ за период считаем равным нулю.

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OY которой направлена вертикально вверх, а вибрации происходят вдоль оси OX (или в отдельном оговоренном случае – вдоль оси OZ). Введем связанную с телом систему координат $Oxuz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O . Главные моменты инерции тела для точки O обозначим через A , B и C и свяжем соотношениями, отвечающими волчку Ковалевской

$$2A = B = C$$

Пусть центр масс G волчка лежит на оси Oz , и $OG = z_G$, а масса тела – m . Ориентацию системы $Oxuz$ относительно $OXYZ$ зададим углами Эйлера ψ , θ и φ .

Будем считать, что наибольшее отклонение h_* точки подвеса от точки O' мало по сравнению с приведенной длиной тела $l = B/(mz_G)$, а частота вибраций точки подвеса Ω велика по отношению к характерной частоте $\omega_* = \sqrt{g/l}$. Введем малый параметр $\varepsilon^2 = h_*/l$ и будем считать, что $\omega_* \sim \varepsilon^2 \Omega$ (т. е. $h_* \Omega \sim l \omega_*$).

Движение тела опишем с помощью канонических уравнений Гамильтона. Методами теории возмущений можно привести функцию Гамильтона к виду, главная часть которой автономна. Впервые такое преобразование проведено для уравнений Эйлера–Пуассона [12], а приведение гамильтониана к автономному виду описано в монографии [10]. Оставляя за переменными прежние обозначения, запишем приближенный автономный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{(\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi) P_2^2}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi (P_1 - P_3 \cos \theta) P_2}{\sin \theta} + \frac{P_3^2}{2} + \frac{(\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) (P_1 - P_3 \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \psi \sin \theta + \hat{\Pi}_v \quad (2.1)$$

$$\hat{\Pi}_v = \frac{\alpha}{2} \left(2(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta)^2 + (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta)^2 \right), \quad (2.2)$$

где $\alpha = \langle \dot{\xi}^2 \rangle m^2 z_G^2 / (B^2 \omega_*^2)$ – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность вибраций, P_1 , P_2 , P_3 – безразмерные импульсы, отвечающие углам ψ , θ и φ соответственно. Слагаемое $\hat{\Pi}_v$ представляет собой вибрационный потенциал.

Система с гамильтонианом (2.1), (2.2) имеет частные решения, при которых главная ось Oz (или, что то же, радиус-вектор \mathbf{OG}) совершает маятниковые движения в фиксированной вертикальной плоскости вокруг одной из двух других главных осей инерции, занимающей фиксированное горизонтальное положение. При этом ось вибрации либо лежит в плоскости этих движений, либо перпендикулярна ей. В первом случае маятниковые движения будем называть продольными, во втором – поперечными.

Данная работа посвящена исследованию двух типов движения: продольных движений, при которых осью вращения является ось Oy из экваториальной плоскости инерции (рис. 1а), и поперечных движений, при которых осью вращения является ось динамической симметрии Ox . Другие два типа движения в данной работе не рассматриваются.

Указанным продольным движениям отвечает частное решение системы (2.1), (2.2), задаваемое соотношениями

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad (2.3)$$

а изменение величин ψ и P_1 описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H_0 = \frac{P_1^2}{2} - \cos \psi + \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi \quad (2.4)$$

Для поперечных маятниковых движений ось Oz может совпасть с осью OZ . Чтобы избежать вырождения, при исследовании таких движений перенаправим оси системы

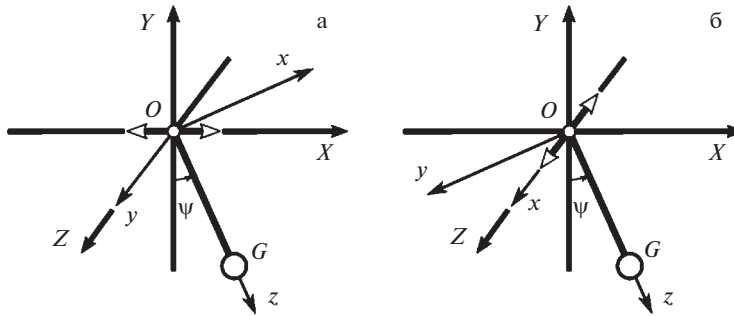


Рис. 1. Маятниковые движения.

координат $OXYZ$ таким образом, чтобы вибрации точки подвеса происходили вдоль оси OZ . Гамильтониан приближенной системы запишется в виде (2.1), в котором вибраторный потенциал примет вид

$$\hat{\Pi}_v = \frac{\alpha}{2} (2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

Поперечным движениям отвечает частное решение системы (2.1), (2.5)

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = \pi/2, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad (2.6)$$

при этом величины ψ и P_1 удовлетворяют каноническим уравнениям математического маятника с гамильтонианом

$$H_{01} = P_1^2 - \cos \psi \quad (2.7)$$

Ранее [18] было проведено исследование движений систем с гамильтонианами (2.4) и (2.7), а также линейный анализ орбитальной устойчивости описанных маятниковых движений по отношению к пространственным возмущениям.

Целью данной работы является завершение линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых движений системы с функцией Гамильтона (2.1), (2.2) и (2.1), (2.5), по отношению к пространственным возмущениям, а также выполнение подробного нелинейного исследования орбитальной устойчивости.

Отметим, что при отсутствии вибраций точки подвеса маятниковые движения тела могут совершаться в любой фиксированной вертикальной плоскости. В этом случае, вследствие имеющейся относительно вертикали симметрии силового поля (поля тяжести), в системе имеется циклическая координата, и по отношению к пространственным возмущениям маятниковые движения неустойчивы. При наличии горизонтальных вибраций точки подвеса указанная симметрия нарушается, и циклическая координата исчезает. Далее будет показано, что маятниковые движения могут быть устойчивыми и при наличии пространственных возмущений.

3. Маятниковые движения. Гамильтонианы (2.4) и (2.7) и соответствующие им системы уравнений, описывающие маятниковые движения, далее будем называть модельными.

Модельные системы имеют первые интегралы (интегралы энергии) вида $H_0 = h = \text{const}$, $H_{01} = h = \text{const}$. На рис. 2а,б построены бифуркационные диаграммы в плоскости параметров α , h для модельных систем (2.4) и (2.7), соответственно, где отображены области, отвечающие разным типам маятниковых движений.

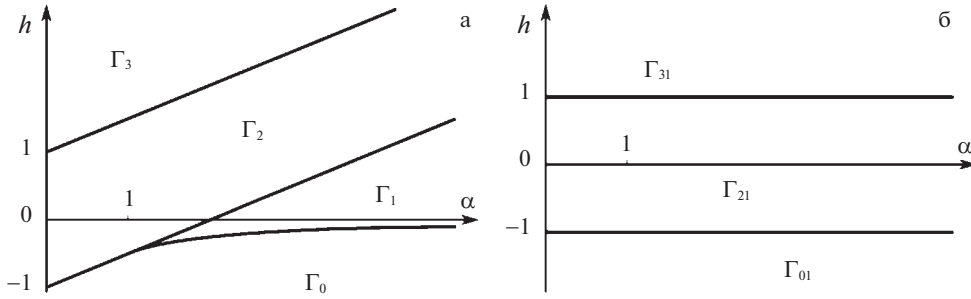


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы.

На рис. 2а области $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ и Γ_3 с различным характером движения разделены прямыми $h = \pm 1 + \alpha/2$ и участком гиперболы $2\alpha h = -1$ при $\alpha > 1$. Точкам гиперболы $2\alpha h = -1$ отвечает устойчивое боковое положение равновесия $\psi_* = \pm \arccos(\alpha^{-1})$. Точкам прямой $h = -1 + \alpha/2$ при $\alpha < 1$ отвечает устойчивое нижнее положение равновесия $\psi = 0$, а при $\alpha > 1$ – неустойчивое нижнее положение и асимптотическое движение. Прямая $h = 1 + \alpha/2$ соответствует неустойчивому верхнему положению равновесия $\psi = \pi$ и асимптотическому движению. На рис. 2б прямой $h = -1$ при всех α отвечает устойчивое нижнее положение равновесия, а прямой $h = 1$ отвечают неустойчивое верхнее равновесие и асимптотическое движение.

В областях Γ_0 и Γ_{01} на рис. 2а и 2б движение невозможно. В области Γ_1 центр масс тела совершает колебания около бокового равновесия $\psi = \psi_*$. Областям Γ_2 и Γ_{21} отвечают колебания центра масс около нижнего положения. В областях Γ_3 и Γ_{31} происходят вращения волчка.

Для проведения интегрирования модельных систем разрешим интегралы энергии $H_0 = h$ и $H_{01} = h$ относительно импульса P_1 и, используя уравнения Гамильтона, получим дифференциальные уравнения продольных и поперечных маятниковых движений, соответственно $\dot{\psi} = P_1(\psi, h) = \pm\sqrt{2h + 2 \cos \psi - \alpha \cos^2 \psi}$ и $\dot{\psi} = 2P_1(\psi, h) = \pm 2\sqrt{(h + \cos \psi)}$.

Полагая, что $u = \cos \psi$ ($|u| \leq 1$), перепишем эти уравнения в виде

$$\dot{u} = \sqrt{-\alpha(1 - u^2)(u - u_1)(u - u_2)}, \quad \dot{u} = 2\sqrt{(u + h)(1 - u^2)} \tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения $u_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha h})/\alpha$, ($u_1 < u_2$).

Интегрирование уравнений продольных и поперечных маятниковых движений (3.1) проведено в работе [18]. Для дальнейшего исследования введем обозначения

$$k_1 = \sqrt{\frac{2(u_2 - u_1)}{(1 - u_1)(u_2 + 1)}}, \quad k_{21} = \sqrt{\frac{h + 1}{2}},$$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{4}(1 - u_1)(u_2 + 1)}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}(u_2 - u_1)}$$

и выпишем частоты маятниковых движений ω_j (j – индекс области)

$$\omega_1 = \frac{\pi \xi_1}{K(k_1)}, \quad \omega_2 = \frac{\pi \xi_2}{2K(k_1^{-1})}, \quad \omega_3 = \frac{\pi \xi_1}{2K(k_1)}$$

$$\omega_{21} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2K(k_{21})}, \quad \omega_{31} = \frac{\pi \sqrt{2}}{k_{21}^{-1} K(k_{21}^{-1})}$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – модуль эллиптического интеграла.

В областях колебаний и вращений модельных систем введем переменные действие-угол I, ψ .

Переменную действие введем по формуле

$$I = I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint P_1(\psi, h) d\psi, \quad (3.2)$$

где интеграл берется по полному изменению угла ψ за период колебания или вращения.

Обращая соотношение (3.2), получим гамильтониан $H_0 = h(I)$, записанный через переменную действие.

4. Гамильтониан возмущенного движения. Маятниковые движения (колебания и вращения) полных систем с тремя степенями свободы, для которых “маятниковая часть” записана через переменную действие, а остальные переменные принимают значения (2.3) или (2.6), примем за невозмущенное движение. Рассмотрим вопрос об орбитальной устойчивости этих движений.

В системе с гамильтонианом (2.1) введем возмущения по формулам $r = I - I_0$, $p_2 = P_2$, $p_3 = P_3$, $q_2 = \theta - \pi/2$, $q_3 = \varphi - \varphi_0$, где I_0 и φ_0 – значение переменной действие и угла φ на невозмущенном движении. Выделим слагаемые возмущенного гамильтониана до четвертого порядка включительно по переменным $r^{1/2}$, p_2 , q_2 , p_3 , q_3 и представим его в виде

$$\hat{H} = H_2 + H_4 + O_6, \quad H_2 = \omega_0 r + \tilde{H}_2(p_2, q_2, p_3, q_3, w)$$

$$H_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_0}{\partial I} r^2 + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} r + \tilde{H}_4(p_2, q_2, p_3, q_3, w) \quad (4.1)$$

Здесь ω_0 – частота невозмущенного движения, а O_6 – 2π -периодические слагаемые шестого и более высоких порядков по $r^{1/2}$, p_2 , q_2 , p_3 , q_3 . Указанные частные производные в выражении для H_4 вычисляются следующим образом

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial I} = \frac{\partial \omega_0}{\partial h} \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} = \left(\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial h} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^{-1}$$

Для продольных маятниковых движений, описываемых гамильтонианом (2.4), функции \tilde{H}_2 и \tilde{H}_4 имеют вид

$$\tilde{H}_2 = p_2^2 + P_1 q_3 p_2 + \frac{\cos \psi + 2\alpha \sin^2 \psi + P_1^2}{2} q_2^2 + P_1 p_3 q_2 -$$

$$- \frac{\alpha \sin 2\psi}{2} q_3 q_2 + \frac{p_3^2}{2} + \frac{(P_1^2 + \alpha \cos^2 \psi)}{2} q_3^2 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & q_3 p_3 q_2 p_2 + \frac{5}{6} P_1 p_3 q_2^3 + \frac{1}{2} P_1 q_3 p_2 q_2^2 - \frac{2}{3} P_1 q_3^3 p_2 - \frac{1}{2} q_3^2 p_2^2 + P_1 p_3 q_3^2 q_2 + \\ & + \frac{1}{2} p_3^2 q_2^2 + \frac{1}{24} (8P_1^2 - \cos \psi - 8\alpha \sin^2 \psi) q_2^4 + \frac{1}{12} \alpha \sin 2\psi q_2^3 q_3 + \\ & + \frac{1}{2} (P_1^2 - \alpha \sin^2 \psi) q_2^2 q_3^2 + \frac{1}{3} \alpha \sin 2\psi q_2 q_3^3 - \frac{1}{6} (P_1^2 + \alpha \cos^2 \psi) q_3^4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае, когда невозмущенное движение – поперечное маятниковое движение, описываемое системой с гамильтонианом (2.7), имеем

$$\tilde{H}_2 = \frac{p_2^2}{2} - P_1 q_3 p_2 + \frac{p_3^2}{2} + 2P_1 q_2 p_3 + \frac{2P_1^2 - \alpha + \cos \psi}{2} q_2^2 + \frac{\alpha - P_1^2}{2} q_3^2 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & \frac{1}{2} q_3^2 p_2^2 - q_3 p_3 q_2 p_2 + p_3^2 q_2^2 + \frac{2}{3} P_1 q_3^3 p_2 - \frac{1}{2} P_1 q_3 p_2 q_2^2 + \frac{5}{3} P_1 p_3 q_3^2 - \\ & - P_1 p_3 q_3^2 q_2 + \frac{1}{6} (P_1^2 - \alpha) q_3^4 - \frac{1}{2} (\alpha + P_1^2) q_3^2 q_2^2 + \frac{1}{24} (4\alpha + 16P_1^2 - \cos \psi) q_2^4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

В выражениях (4.2)–(4.5) функции $\psi(w)$ и $P_1(w)$ отвечают невозмущенному движению.

На уровне энергии невозмущенного движения $\hat{H} = 0$ осуществим изоэнергетическую редукцию и, принимая в качестве новой независимой переменной величину w , рассмотрим неавтономную редуцированную систему с двумя степенями свободы с гамильтонианом

$$K = K_2 + K_4 + \tilde{O}_6, \quad K_2 = \frac{1}{\omega_0} \tilde{H}_2, \quad K_4 = \frac{1}{\omega_0} \left[\tilde{H}_4 - \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} \frac{\tilde{H}_2}{\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_0}{\partial I} \frac{\tilde{H}_2^2}{\omega_0^2} \right] \quad (4.6)$$

Критерии орбитальной устойчивости тривиального положения равновесия системы с гамильтонианом (4.1) и описанной редуцированной системы с гамильтонианом (4.6) совпадают [20].

Замечание. Положения равновесия модельных систем (2.4) и (2.7) в рамках редуцированной неавтономной системы с двумя степенями свободы сохраняются. Для рассматриваемых движений устойчивость положений равновесия сохраняется и при пространственных возмущениях. В этом случае корни характеристических уравнений линейризованных систем $\pm i\Omega_{k,j}$ (k – индекс области, $j = 1, 2$) имеют вид

$$\Omega_{2,1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \Omega_{2,2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \Omega_{21,1} = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_{21,2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

$$\Omega_{1,(1,2)} = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - 1 \pm \sqrt{16\alpha^4 - 16\alpha^2 + 1}}{2(\alpha^2 - 1)}} \quad (4.8)$$

5. Критерии устойчивости маятниковых движений. В областях колебаний и вращений модельных систем рассмотрим сначала линейризованную систему, описываемую гамильтонианом K_2 . Пусть $\mathbf{X}(w)$ – матрица фундаментальных решений этой системы, удовлетворяющих начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_4$, где \mathbf{E}_4 – единичная матрица четвертого порядка. Характеристическое уравнение линейной системы имеет вид

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0 \quad (5.1)$$

Здесь a_1 – след матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, a_2 – сумма ее главных миноров второго порядка.

Условия устойчивости в линейном приближении задаются неравенствами [21]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2 / 4 \quad (5.2)$$

В областях устойчивости в линейном приближении гамильтониан K_2 при помощи 2π -периодической по w линейной замены переменных $p_2, q_2, p_3, q_3 \rightarrow p'_2, q'_2, p'_3, q'_3$ может быть приведен к нормальной форме

$$K'_2 = \frac{1}{2}\lambda_1(q_2'^2 + p_2'^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_3'^2 + p_3'^2),$$

где $\pm i\lambda_{1,2}$ – характеристические показатели системы.

Границами областей устойчивости в линейном приближении внутри областей $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{21}, \Gamma_3$ и Γ_{31} являются кривые резонансов первого и второго порядков, задаваемых соотношениями

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N, \quad |k_1| + |k_2| \leq 2; \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где k_1 и k_2 – целые числа.

Согласно теореме Крейна–Гельфанда–Лидского [23], эти кривые в областях Γ_1, Γ_2 и Γ_{21} рождаются из точек нижних границ этих областей, где величины $\Omega_{i,j}$, вычисляемые по формулам (4.7) и (4.8), связаны соответствующими резонансными соотношениями. Из некоторых таких точек рождаются пары кривых резонансов, заключающие между собой области неустойчивости (области параметрического резонанса), а из других рождается по одной резонансной кривой (и области неустойчивости нет).

В областях, где выполняются условия (5.2) устойчивости в линейном приближении, проводится нелинейный анализ устойчивости тривиального положения равновесия рассматриваемой неавтономной системы с двумя степенями свободы. Для этого при помощи близкой к тождественной замены переменных $p'_2, q'_2, p'_3, q'_3 \rightarrow \hat{p}_2, \hat{q}_2, \hat{p}_3, \hat{q}_3$ требуется провести нормализацию преобразованного гамильтониана возмущенного движения в слагаемых четвертой степени относительно возмущений.

Если в системе отсутствуют резонансы четвертого порядка, то есть величины $\lambda_{1,2}$ не связаны соотношениями вида

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N, \quad |k_1| + |k_2| = 4; \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

то имеет место нерезонансный случай, и нормальная форма гамильтониана в симплектических полярных координатах φ_i, r_i ($\hat{q}_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \hat{p}_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i, i = 2, 3$) приводится к виду

$$\hat{K} = \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_3 + c_{20} r_2^2 + c_{11} r_2 r_3 + c_{02} r_3^2 + \tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w), \quad (5.4)$$

где c_{20}, c_{11} и c_{02} – постоянные коэффициенты, а $\tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w)$ – 2π -периодическая по w функция, порядок которой по r_2 и r_3 не ниже третьего.

При отсутствии вырождения в членах четвертой степени нормализованного гамильтониана (5.4), то есть при выполнении условия

$$D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$$

положение равновесия $r_2 = r_3 = 0$ неавтономной редуцированной системы с двумя степенями свободы устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [22]. Если при $r_2 \geq 0, r_3 \geq 0$ квадратичная форма

$$c_{20}r_2^2 + c_{11}r_2r_3 + c_{02}r_3^2$$

является знакоопределенной, то положение равновесия формально устойчиво [22].

Пусть в системе выполняется резонансное соотношение вида (5.3). В случае $k_1 k_2 < 0$ в системе имеется положительно определенный первый интеграл, и рассмат-

риваемое положение равновесия формально устойчиво [22]. Если же $k_1 k_2 \geq 0$, то гамильтониан системы приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned} \hat{K} = & \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_3 + c_{20} r_2^2 + c_{11} r_2 r_3 + c_{02} r_3^2 + a_{k_1 k_2} \sin(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - Nw) + \\ & + b_{k_1 k_2} \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - Nw) + \tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w) \end{aligned} \quad (5.5)$$

где коэффициенты $a_{k_1 k_2}$, $b_{k_1 k_2}$ постоянны. При выполнении условия

$$\left| c_{20} k_1^2 + c_{11} k_1 k_2 + c_{02} k_2^2 \right| > |k_1|^{k_1/2} |k_2|^{k_2/2} \sqrt{a_{k_1 k_2}^2 + b_{k_1 k_2}^2} \quad (5.6)$$

положение равновесия $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ устойчиво с учетом в функции Гамильтона членов не выше второго порядка по r_j ($j = 2, 3$) [22]. Если условие (5.6) выполняется с обратным знаком, то имеет место неустойчивость.

Случаи вырождения $D = 0$, а также случаи кратного резонанса, требуют дополнительного исследования и в данной работе не рассматриваются.

Нормальную форму гамильтониана вида (5.4) или (5.5) можно получить, построив нормализованное отображение, порождаемое системой канонических уравнений движения системы с функцией Гамильтона K за период 2π [20]. Построение отображения выполнено с использованием программного пакета MAPLE.

6. О результатах исследования устойчивости в линейном приближении. Для проверки условий (5.2) устойчивости в линейном приближении внутри областей Γ_1 , Γ_2 , Γ_{21} , Γ_3 , и Γ_{31} следует проинтегрировать уравнения движения неавтономной системы с гамильтонианом K_2 и определить коэффициенты характеристического уравнения (5.1). Интегрирование уравнений движения и вычисление необходимых коэффициентов проведено численно.

Исследование линейной орбитальной устойчивости рассматриваемых продольных и поперечных маятниковых движений волчка подробно проведено в работе [18], где в соответствующих областях в плоскости параметров α и h построены диаграммы устойчивости. Полученные результаты показаны на рис. 3. На этих рисунках полужирными линиями отмечены границы областей, соответствующие рис. 2, тонкими линиями обозначены кривые резонансов первого и второго порядков. Серым цветом показаны области неустойчивости, области устойчивости в линейном приближении не закрашены. В областях с вертикальной штриховкой содержится счетное множество резонансных кривых первого и второго порядков.

Картина устойчивости для продольных маятниковых движений показана на рис. 3а. В области Γ_2 колебаний около нижнего положения кривые резонансов первого и второго порядков берут начало в точках нижней границы области с абсциссами

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{2}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8} \quad (\Omega_{2,1} = n, \quad n = \overline{2, 4}); \quad \alpha = \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \quad (\Omega_{2,2} = n, \quad n = \overline{1, 2}) \\ \alpha = \frac{1}{9}, \frac{17}{25}, \frac{41}{49} \quad \left(\Omega_{2,1} = \frac{1}{2} + n, \quad n = \overline{1, 3} \right) \\ \alpha = \frac{1}{5}, \frac{9}{13}, \frac{25}{29} \quad \left(\Omega_{2,2} = \frac{1}{2} + n, \quad n = \overline{0, 2} \right) \\ \alpha = \frac{14 - 4\sqrt{6}}{25}, \frac{1}{2}, \frac{242 - 8\sqrt{30}}{289}, \frac{301 - 20\sqrt{3}}{338} \quad (\Omega_{2,1} + \Omega_{2,2} = n, \quad n = \overline{2, 5}) \\ \alpha = \frac{1}{2} \quad (\Omega_{2,1} - \Omega_{2,2} = 1) \end{aligned}$$

В области Γ_2 имеются шесть существенных областей устойчивости. Четыре из них примыкают к точке A_1 ($\alpha = 1/2$, $h = -3/4$), где имеет место кратный резонанс $\Omega_{2,1} = 2$,

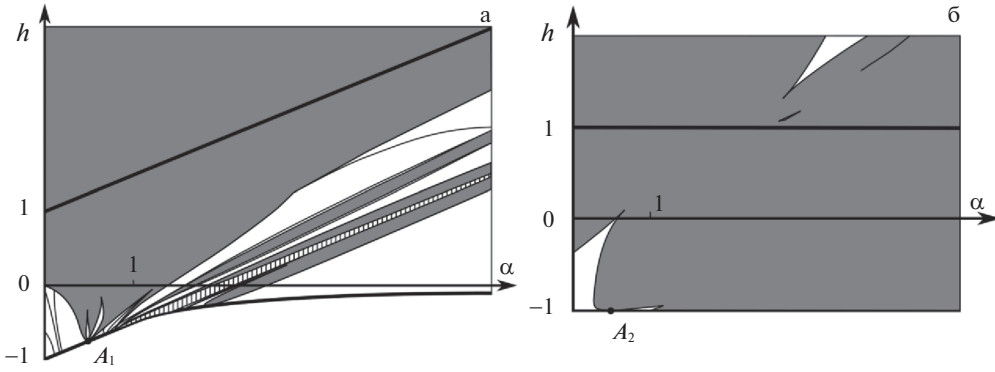


Рис. 3. Результаты линейного анализа устойчивости [18].

$\Omega_{2,2} = 1$. Первая из этих областей примыкает к границе $\alpha = 0$ и нижней границе области Γ_2 и имеет угловую точку $(0; 0)$. Вторая и третья области устойчивости расположены между точкой кратного резонанса A_1 и угловыми точками $(0.49252; -0.34305)$ и $(0.64130; -0.17655)$, соответственно. Четвертая область устойчивости занимает участок нижней границы области Γ_2 при $\alpha \in (1/2; 7/9)$ и заканчивается в угловой точке $(1.22538; -0.05679)$. При $\alpha > 1$ имеются две обширные области устойчивости в линейном приближении, расширяющиеся с увеличением значения α . На верхней границе большей из этих областей находится угловая точка $(2.77955; 1.25049)$. Вблизи точки с абсциссой $\alpha = 1$ на нижней границе области Γ_2 находится счетное множество точек, порождающих резонансные кривые. Эти кривые ограничены заштрихованной областью около нижней границы Γ_2 .

В области Γ_1 колебаний в окрестности бокового положения равновесия кривые резонансов первого и второго порядков выходят из точек нижней границы области, абсциссы которых

$$\alpha = \frac{1}{15} \sqrt{359 + 2\sqrt{2689}} \quad (\Omega_{1,1} = 5/2); \quad \alpha = \frac{1}{15} \sqrt{375 + 30\sqrt{145}} \quad (\Omega_{1,2} = 1/2)$$

$$\alpha = \frac{1}{5} (\sqrt{42} + \sqrt{2}) \quad (\Omega_{1,1} + \Omega_{1,2} = 3)$$

Большую часть области Γ_1 занимает примыкающая к ее нижней границе область устойчивости в линейном приближении. Эта область ограничена сверху областью неустойчивости, выходящей из точки нижней границы области Γ_1 с абсциссой $\alpha = \sqrt{375 + 30\sqrt{145}}/15 \approx 1.80892$. Над этой областью неустойчивости в окрестности верхней границы области Γ_1 располагается заштрихованная область, где, как и в области Γ_2 , располагается счетное множество резонансных кривых.

В области вращений Γ_3 не обнаружено областей орбитальной устойчивости.

Диаграмма устойчивости поперечных маятниковых движений представлена на рис. 3б. В области Γ_{21} колебаний около нижнего положения равновесия кривые резонансов первого и второго порядков выходят из точек нижней границы области с абсциссами

$$\alpha = 1 \quad (\Omega_{21,1} = 0); \quad \alpha = 0 \quad (\Omega_{21,2} = 0)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\Omega_{21,1} = \frac{1}{2} \right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\Omega_{21,2} = \frac{1}{2} \right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (\Omega_{21,1} + \Omega_{21,2} = 1)$$

В этой области находятся две области устойчивости (рис. 3б), примыкающие к нижней границе Γ_{21} левее и правее точки кратного резонанса A_2 ($\alpha = 1/2$, $h = -1$; $\Omega_{21,1} = \Omega_{21,2} = 1/2$). Верхняя граница левой из этих областей заключена между точками $(0; -0.37233)$ и $(0.66882; 0.43844)$. Область устойчивости правее точки A_2 имеет угловую точку $(1.15900; -0.37413)$.

В области вращений Γ_{31} в рассматриваемом диапазоне параметров обнаружены три области устойчивости в линейном приближении. Наибольшая из них берет начало в точке $(2.72745; 2.68839)$ и расширяется с ростом h . Две малые области устойчивости представляют собой криволинейный треугольник с угловыми точками $(2.83023; 2.53740)$, $(2.67780; 2.40480)$ и $(2.70412; 2.41939)$, и тонкую полосу с угловой точкой $(3.78114; 3.53085)$ (заключенную при $h = 4$ между точками с абсциссами $\alpha = 4.22712$ и $\alpha = 4.22736$).

Таким образом, для описанных маятниковых движений существуют области линейной орбитальной устойчивости по отношению к рассматриваемым в работе пространственным возмущениям. Этот результат отличает данную задачу от аналогичной задачи в случае неподвижной точки подвеса тела, когда устойчивость при наличии пространственных возмущений невозможна.

Результаты данного исследования в предельном случае отсутствия вибраций соответствуют выводам [4, 5]. В этих работах было получено, что маятниковые колебания волчка Ковалевской как вокруг оси динамической симметрии, так и вокруг оси из экваториальной плоскости орбитально устойчивы по отношению к возмущению угла собственного вращения, если амплитуда этих колебаний меньше значения $\pi/2$. Этим колебаниям на диаграммах рис. 1а и б отвечают отрезки $\alpha = 0$, $-1 < h < 1$. На рис. 1а область устойчивости колебаний при стремлении интенсивности вибраций к нулю сходится к отрезку $h \in [-1; 0]$, что отвечает колебаниям с амплитудой до $\pi/2$. На рис. 1б область устойчивости колебаний сходится к отрезку $h \in [-1; -0.37233]$, но при численном исследовании самой границы $\alpha = 0$ получаем, что условия (5.2) выполняются со знаком равенства при $h \in [-1; 0]$, а при $h > 0$ одно из этих условий выполняется с обратным знаком, что также отвечает результатам [4, 5].

7. Нелинейный анализ устойчивости маятниковых движений. Результаты нелинейного анализа устойчивости маятниковых движений, основанные на критериях из параграфа 4, представим на рис. 4–6. На этих диаграммах полужирными линиями показаны кривые резонансов первого и второго порядков, часть которых является границами областей устойчивости в линейном приближении, а остальные кривые разделяют эти области на подобласти g_i ($i = 1 \dots 16$). Кривые резонансов четвертого порядка, соответствующие условию $k_1 k_2 < 0$, отображены точечными линиями, резонансные кривые с $k_1 k_2 \geq 0$ показаны сплошными тонкими линиями. Пунктирные линии – кривые вырождения, на которых имеем $D = 0$.

В незакрашенных областях для маятниковых движений выполняются условия формальной устойчивости, а в областях, закрашенных светло-серым цветом, эти условия нарушаются. В заштрихованной области содержится счетное множество кривых резонансов четвертого порядка; на них исследование не проводилось. В темно-серых областях содержится конечное число резонансных кривых четвертого порядка, однако картина устойчивости здесь весьма сложна и в данной работе не описывается. Остановимся подробнее на результатах исследования.

7.1. Области продольных колебаний волчка около нижнего положения равновесия (рис. 4а). В области Γ_2 продольных колебаний около нижнего положения равновесия нелинейный анализ устойчивости проведен в областях линейной устойчивости, примыкающих к точке кратного резонанса A_1 и разделенных на подобласти g_i ($i = 1 \dots 10$).

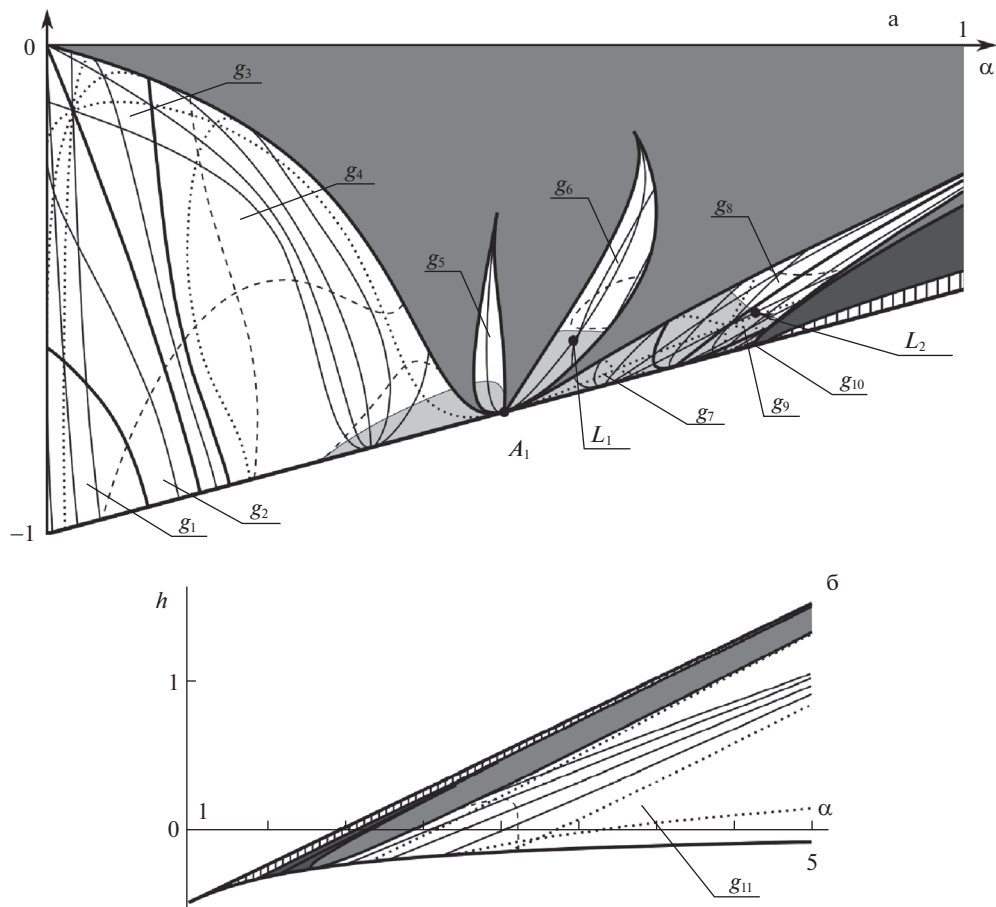


Рис. 4. Нелинейный анализ устойчивости продольных движений.

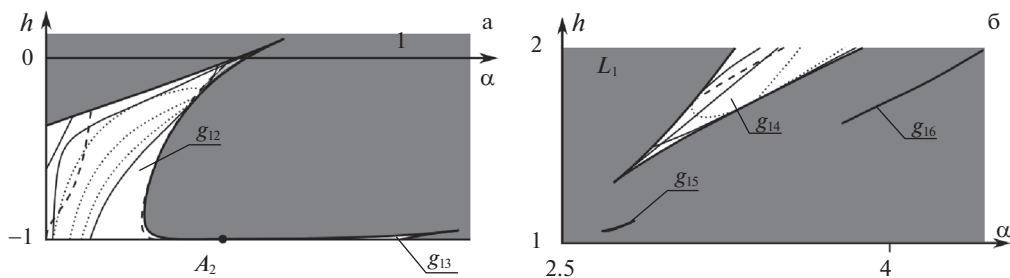


Рис. 5. Нелинейный анализ устойчивости поперечных движений.

Часть кривых резонансов четвертого порядка берут начало в точках нижней границы области Γ_2 (в силу громоздкости выражения для абсцисс точек и соответствующие резонансные соотношения не приводятся).

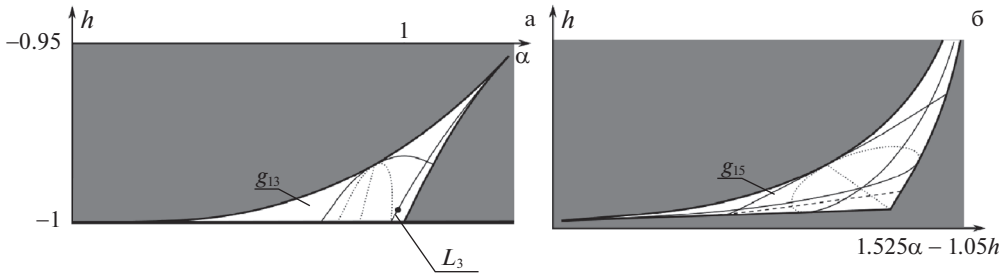


Рис. 6. Подробное описание малых областей.

Кроме того, в исследуемых областях обнаружены четыре резонансные кривые, граничные точки которых лежат на других границах областей устойчивости: две кривые $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 3$ (области g_2, g_3 и g_8, g_9) и кривые $4\lambda_1 = 9$ и $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$ (область g_6).

На кривых резонансов четвертого порядка $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ (область g_6) и $3\lambda_1 + \lambda_2 = 9$ (области g_9) обнаружены два малых участка неустойчивости, местоположение которых отмечено на рис. 4а точками L_1 и L_2 . Участок L_1 заключен между точками $(0.57520, -0.60225)$ и $(0.57386, -0.60567)$, а участок L_2 — между $(0.77345, -0.54603)$ и $(0.77360, -0.54590)$. Вне этих участков на данных кривых, а также на остальных резонансных кривых выполняется условие устойчивости (5.6).

В рассматриваемой части плоскости параметров обнаружены пять кривых вырождения: три из них лежат в левой области устойчивости в линейном приближении (подобласти g_1, g_2, g_3 и g_4), и по одной лежит в правых областях (подобласти g_6 и g_8, g_9).

В большей части четырех исследуемых областей устойчивости в линейном приближении имеет место формальная устойчивость. Исключение составляют части этих областей, примыкающие к точке A_1 кратного резонанса, где условие формальной устойчивости нарушается. При этом граница этой части области в подобласти g_9 пересекает участок неустойчивости L_2 на резонансной кривой.

7.2. Область продольных колебаний волчка около бокового положения равновесия (рис. 4б). Для колебаний волчка в окрестности бокового положения равновесия нелинейный анализ устойчивости проведен для области g_{11} устойчивости в линейном приближении при $\alpha < 5$. В этой части области обнаружено семь кривых резонансов четвертого порядка, выходящих из точек нижней границы области Γ_1 с абсциссами

$$\alpha = \frac{\sqrt{52105 + 136\sqrt{33505}}}{153} \quad \left(\Omega_{1,1} = \frac{9}{4}\right); \quad \alpha = \frac{\sqrt{2065 + 56\sqrt{1345}}}{21} \quad \left(\Omega_{1,2} = \frac{1}{4}\right)$$

$$\alpha = 2.62810 \quad (\Omega_{1,1} + 3\Omega_{1,2} = 3); \quad \alpha = 2.15272 \quad (\Omega_{1,1} - 3\Omega_{1,2} = 1)$$

$$\alpha = 2.01251 \quad (3\Omega_{1,1} + \Omega_{1,2} = 7); \quad \alpha = 2.68418 \quad (3\Omega_{1,1} - \Omega_{1,2} = 6)$$

$$\alpha = \frac{1}{9}(\sqrt{221} + 4\sqrt{2}) \quad (2\Omega_{1,1} + 2\Omega_{1,2} = 5)$$

На всех рассмотренных кривых резонансов четвертого порядка условия устойчивости (5.6) выполняются. Обнаружена одна кривая вырождения, лежащая между точками $(3.11532, -0.15951)$ и $(2.71379, 0.11436)$ на границах области. Условия формальной устойчивости выполняются во всей области g_{11} .

7.3. *Области поперечных колебаний волчка около нижнего положения равновесия (рис. 5а).* В области Γ_{21} поперечных колебаний десять резонансных кривых берут начало на нижней границе области, абсциссы которых

$$\begin{aligned} \alpha &= 7/8 \quad (\Omega_{21,1} = 1/4); \quad \alpha = 1/8 \quad (\Omega_{21,2} = 1/4) \\ \alpha &= 49/50 \quad (3\Omega_{21,1} + \Omega_{21,2} = 1); \quad \alpha = 1/50, \quad 9/10 \quad (3\Omega_{21,1} - \Omega_{21,2} = 2, 0) \\ \alpha &= 1/50 \quad (\Omega_{21,1} + 3\Omega_{21,2} = 1); \quad \alpha = 1/10, \quad 49/50 \quad (\Omega_{21,1} - 3\Omega_{21,2} = 0, -2) \\ \alpha &= \frac{4 - \sqrt{12}}{8}, \quad \frac{4 + \sqrt{12}}{8} \quad (2\Omega_{21,1} - 2\Omega_{21,2} = 1, -1) \end{aligned}$$

Дополнительно в области устойчивости в линейном приближении g_{12} найдены две резонансные кривые $4\lambda_1 = 3$, граничные точки которых лежат на боковых и верхней границах области. На всех кривых резонансов четвертого порядка в этой области условия устойчивости (5.6) выполняются. Также в области g_{12} обнаружены две кривые вырождения и область, в которой нарушаются условия формальной устойчивости. Эта область примыкает к верхней границе области g_{12} вблизи верхней угловой точки. Ее граница заключена между точками (0.51562, -0.01612) и (0.60296, 0.05082), и вытягивается внутрь области устойчивости до точки (0.43111, -0.19137).

Область устойчивости g_{13} в другом масштабе изображена на рис. 6а. В этой области найдена дополнительная резонансная кривая $4\lambda_2 = 3$. На кривой резонанса $3\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ в области g_{13} обнаружен участок неустойчивости, заключенный между точкой (49/50, -1) нижней границы области Γ_{21} и точкой (0.99119, -0.99625), отмеченной жирной точкой L_3 на рис. 6а. Условия формальной устойчивости выполняются во всей области g_{13} , и кривые вырождения отсутствуют.

7.4. *Области поперечных вращений волчка (рис. 5б).* Картина устойчивости поперечных вращений в области g_{14} показана на рис. 5б. Подробная картина для области g_{15} представлена в другом масштабе и в осях $1.525\alpha - 1.05h$ и h на рис. 6б, а узкая область g_{16} отдельно не изображена.

На всех кривых резонансов четвертого порядка (по семь кривых в областях g_{14} и g_{15} и одна кривая в области g_{16}) критерии устойчивости (5.6) выполнены; условия формальной устойчивости выполняются во всех точках областей g_{14} , g_{15} и g_{16} . В областях g_{14} и g_{15} обнаружены по одной кривой вырождения.

Заключение. В работе исследовано влияние вибраций точки подвеса вдоль горизонтальной прямой на вид и орбитальную устойчивость маятниковых движений волчка Ковалевской. Показано, что под действием вибраций точки подвеса тела, его маятниковые движения могут оставаться такими же, как и у тела с неподвижной точкой (поперечные движения), однако, с помощью вибраций можно получить и другие маятниковые движения тела (продольные движения).

При отсутствии вибраций точки подвеса маятниковые движения тела орбитально неустойчивы по отношению к пространственным возмущениям, но с помощью вибраций вдоль горизонтали можно добиться стабилизации некоторых маятниковых движений. В таких областях орбитальной устойчивости в линейном приближении проведен строгий нелинейный анализ устойчивости. Построены области выполнения условий формальной устойчивости и устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, а также проверены критерии устойчивости на кривых резонансов четвертого порядка.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. Физич. наук об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
2. *Архангельский Ю.А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела, вокруг неподвижной точки в одном частном случае // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 294–302.
3. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.
4. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
5. *Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Ковалевской // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 3–9.
6. *Бардин Б.С.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
7. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // R.&C. Dyn. 2012. V. 17. № 6. P. 533–546.
8. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 2. С. 249–266.
9. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. & Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52. Pt. 2. № 8. P. 1–10.
10. *Холостова О.В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2016. 308 с.
11. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа “маятник”. Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
12. *Маркеев А.П.* Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
13. *Холостова О.В.* Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестн. РУДН. Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 111–122.
14. *Вишенкова Е.А.* Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелин. дин. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474.
15. *Беличенко М.В., Холостова О.В.* Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелин. дин. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.
16. *Belichenko M.V.* On the stability of pendulum-type motions in the approximate problem of dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 2. P. 243–263.
17. *Kholostova O.V.* On the dynamics of a rigid body in the Hess case at high-frequency vibrations of a suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 1. P. 59–84.
18. *Belichenko M.V.* Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019. V. 489. 012034. P. 1–9.
19. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Institut Mittag-Leffler: Acta Mathematica. 1889. V. 12. P. 177–232.
20. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 63–85.
21. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
22. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
23. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

On the Orbital Stability of Pendulum-type Motions in the Approximate Problem of Kovalevskaya Top Dynamics with a Vibrating Suspension Point

M.V. Belichenko^{a,#}

^a *Moscow aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

[#] *e-mail: tuzemec1@rambler.ru*

We study the motion of a heavy rigid body under the assumption that one of its points (the suspension point) performs high-frequency horizontal vibrations, and the body mass geometry for this point corresponds to S.V. Kovalevskaya case. The problem is considered within the framework of an approximate autonomous system of differential equations written in Hamiltonian form. The particular body motions are studied; they are pendulum-type oscillations and rotations around a horizontally located principal axis of inertia, which is either an axis of dynamic symmetry or an axis from the equatorial plane of inertia. For these motions, the radius vector of the center of mass of the body relative to the suspension point performs pendulum-type motions in a vertical plane containing the vibration axis (longitudinal motions), or perpendicular to this axis (transverse motions). In this paper, the linear analysis of the pendulum-type motions orbital stability with respect to spatial perturbations, which was started earlier, is completed. This problem is reduced to an equivalent problem on the stability of the trivial equilibrium of a non-autonomous reduced two-degree-of-freedom system. In the regions of linear orbital stability a detailed nonlinear analysis of the orbital stability is carried out. Criteria of the stability for most (in the sense of the Lebesgue measure) initial conditions and the formal stability criteria are checked, cases of fourth-order resonances are also considered.

Keywords: Kovalevskaya top, fast vibrations, pendulum-type motions, orbital stability

REFERENCES

1. *Mlodzeevsky B.K.* About permanent axes in the movement of a heavy solid body around a fixed point // Proc. of the Dep. of Phys. Sci. Soc. of Devotees of Natural Science, Anthropology, and Ethnography, 1894, vol. 7, no. 1, pp. 46–48. (in Russian)
2. *Arkhangelskii Iu.A.* On the stability of motion of a heavy solid about a fixed point in a certain special case // JAMM, 1960, vol. 24, no. 2, pp. 294–302.
3. *Markeev A.P.* On flat and near-flat rotations of a heavy rigid body around a fixed point // Izv AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela, 1988, no. 4, pp. 29–36. (in Russian)
4. *Markeyev A.P.* The stability of the plane motions of a rigid body in the Kovalevskaya case // JAMM, 2001, vol. 65, no. 1, pp. 47–54.
5. *Markeev A.P., Medvedev S.V., Chekhovskaya T.N.* To the problem of stability of pendulum-like vibrations of a rigid body in Kovalevskaya's case // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 1, pp. 1–6.
6. *Bardin B.S.* Stability problem for pendulum-type motions of a rigid body in the Goryachev–Chaplygin case // Mech. Solids, 2007, vol. 42, pp. 177–183.
7. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the bobylev-steklov case // R.&C. Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 533–546.
8. *Bardin B.S., Savin A.A.* On orbital stability pendulum-like oscillations and rotation of symmetric rigid body with a fixed point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 2, pp. 249–266.
9. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem.&Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc., 1908, vol. 52, pt. 2, no. 8, pp. 1–10.
10. *Kholostova O.V.* Problems of Dynamics of a Rigid Body with a Vibrating Suspension Point. (Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom) Moscow; Izhevsk: Institut Komp'ut. Issled., 2016. 308 p. (in Russian)
11. *Strizhak T.G.* Investigation Methods of Pendulum-Type Dynamic Systems. (Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa “mayatnik”) Alma-Ata: Nauka, 1981. 253 p.
12. *Markeyev A.P.* The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point // JAMM, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 193–203.

13. *Kholostova O.V.* On stability of relative equilibriums of a rigid body with a vibrating point of support // Vestn. Ross. Univ. Druzhby Narodov. Matematika. Informatika. Fizika, 2011, no. 2, pp. 111–122. (in Russian)
14. *Vishenkova E.A.* Stability of special motions (permanent rotations) of a heavy rigid body with a suspension point vibrating along the vertical // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2015, vol. 11, no. 3, pp. 459–474. (in Russian)
15. *Belichenko M.V., Kholostova O.V.* On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104. (in Russian)
16. *Belichenko M.V.* On the stability of pendulum-type motions in the approximate problem of dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, vol. 14, no. 2, pp. 243–263.
17. *Kholostova O.V.* On the dynamics of a rigid body in the hess case at high-frequency vibrations of a suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.
18. *Belichenko M.V.* Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2019, vol. 489, 012034, pp. 1–9.
19. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Institut Mittag-Leffler: Acta Mathematica, 1889, vol. 12, pp. 177–232.
20. *Markeev A.P.* Stability of planar rotations of a satellite in a circular orbit // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 46–63.
21. *Lyapunov A.M.* On the Motion Stability in One Particular Case of Three Body Problem. (Ob ustoychivosti dvizheniya v odnom chastnom sluchae zadachi o trekh telakh) Sobr. soch. V. 1. Moscow: AN SSSR, 1954. pp. 327–401. (in Russian)
22. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libracii v nesnoi mekhanike i kosmodinamike), Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian)
23. *Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M.* Parametric Resonance in Linear Systems. (Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh) Moscow: Nauka, 1987. 328 p. (in Russian)