

УДК 533.6.011.8

## О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ В ПОТОКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

© 2022 г. С. Л. Горелов<sup>1,2,\*</sup>, А. В. Могорычная<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup> ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Россия<sup>2</sup> Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*e-mail: gorelovsl@yandex.ru

\*\*e-mail: anna.magorychnaya@phystech.edu

Поступила в редакцию 05.12.2021 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 23.01.2022 г.

Вычисляются аэродинамические силы, действующие на клин и конус в потоке разреженного газа. Доказывается, что существует такой угол полураствора клина и конуса, что при увеличении этого угла подъемная сила становится отрицательной при произвольном угле атаки. Для высокоскоростных течений показано, что такой эффект существует при произвольном числе Рейнольдса.

*Ключевые слова:* аэродинамические силы в разреженном газе, число Рейнольдса, эффекты разреженности газа

DOI: 10.31857/S0032823522020060

**1. Введение.** Эффект изменения знака подъемной силы при изменении угла атаки в высокоскоростных плоских течениях впервые был обнаружен в [1]. В свободномолекулярном течении такой эффект был найден в [2]. Данная работа является развитием идей из [2]. Показано, что при обтекании клина разреженным газом при определенном соотношении угла полураствора и угла атаки подъемная сила клина может стать отрицательной. Причем, этот эффект проявляется при любых скоростях газа и отношениях температур поверхности клина и газа. Более того, такой эффект есть и в случае гиперзвукового течения невязкого газа (модель Ньютона). Для высокоскоростных течений на основе локального метода [3] показано, что эффект изменения знака подъемной силы при определенных значениях угла полураствора существует для клина и конуса при произвольном числе Рейнольдса.

**2. Свободномолекулярный случай. Обтекание клина.** Рассматривается свободномолекулярное обтекание клина конечной длины с углом полураствора  $\delta$  и углом атаки  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

*Теорема 1.* Существует такое значение  $\delta = \delta_0$ , что при  $\delta \geq \delta_0$  коэффициент подъемной силы клина  $C_y \leq 0$ , и  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , а при  $\delta < \delta_0$  имеем  $C_y > 0$  в некотором интервале значений угла атаки  $\alpha$  из множества  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ . Значение  $\delta = \delta_0$  определяется из уравнения

$$\left. \frac{dC_y(\alpha, \delta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

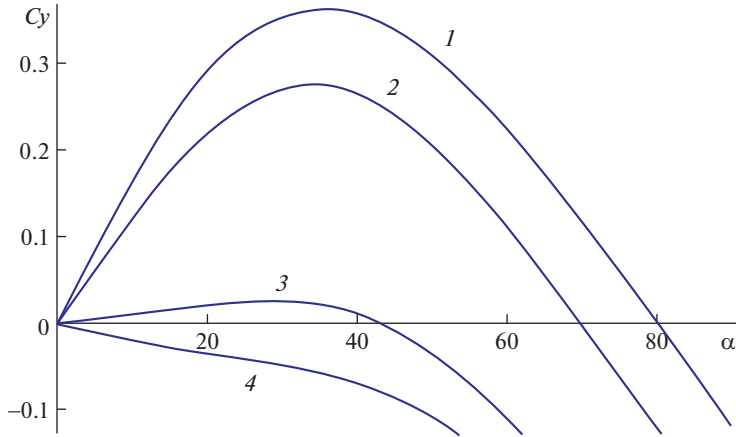


Рис. 1. Зависимость  $C_y$  от угла атаки  $\alpha$  при разных значениях  $\delta$  ( $S = 2$ ,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$ ): кривые 1–4 соответствуют значениям  $\delta = 10^\circ$ ;  $20^\circ$ ;  $36^\circ$ ;  $40^\circ$ .

*Доказательство.* Коэффициенты давления и трения для плоской пластины под углом атаки  $\theta$  равны [5]

$$C_p = \frac{1}{S^2 \sqrt{\pi}} \left[ S_\theta \exp(-S_\theta^2) + \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2} + S_\theta^2 \right) (1 + \operatorname{erf} S_\theta) + \frac{\sqrt{\pi} t}{2} \chi(S_\theta) \right] \quad (2.1)$$

$$C\tau = \frac{\cos \theta}{S \sqrt{\pi}} \chi(S_\theta), \quad \chi(x) = \exp(-x^2) + x \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} x)$$

Здесь  $S = U_\infty \sqrt{m/2kT_\infty}$ ,  $U_\infty$  – скорость газа,  $m$  – масса молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_\infty$  – температура газа,  $T_w$  – температура поверхности,  $t = T_w/T_\infty = t_w (1 + S^2 (\gamma - 1) / \gamma)$ ,  $t_w$  – температурный фактор,  $\gamma$  – отношение теплоемкостей,  $S_\theta = S \sin \theta$ .

Коэффициент подъемной силы выражается

$$C_y = C_p \cos \theta - C\tau \sin \theta \quad (2.2)$$

Для верхней части клина  $\theta = \theta_u = \delta - \alpha$ , для нижней части  $\theta = \theta_b = \delta + \alpha$ .

$$C_{y_b} = C_p \cos(\delta + \alpha) - C\tau \sin(\delta + \alpha)$$

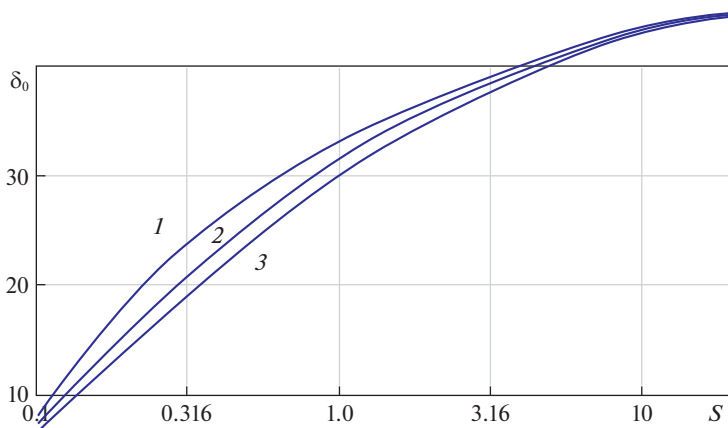
$$C_{y_u} = -C_p \cos(\delta - \alpha) - C\tau \sin(\delta - \alpha) \quad (2.3)$$

Коэффициент подъемной силы клина выражается формулой

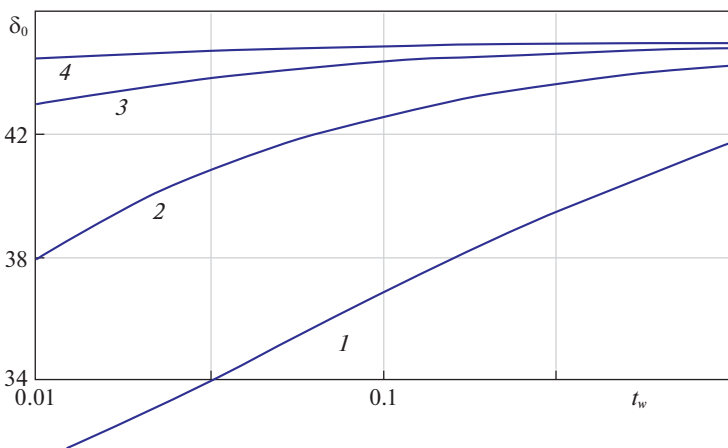
$$C_y = C_{y_b} + C_{y_u} \quad (2.4)$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей  $C_y$  от угла атаки  $\alpha$  для разных величин угла полураствора  $\delta$ . Из графиков хорошо видно, что с увеличением  $\delta$  кривая  $C_y(\alpha)$  отходит от точки  $\alpha = 0$  все ближе к горизонтали. И при некотором значении  $\delta = \delta_0$  кривая при  $\alpha = 0$  становится горизонтальной, а затем при увеличении  $\delta$  значения  $C_y$  становятся отрицательными. Определить эту величину  $\delta_0$  можно из уравнения

$$\left. \frac{dC_y(\alpha, \delta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.5)$$



**Рис. 2.** Зависимость  $\delta_0$  от скоростного отношения  $S$  для разных температурных факторов: кривые 1–3 соответствуют значениям  $t_w = 1; 0.1; 0.01$ .



**Рис. 3.** Зависимость  $\delta_0$  от температурного фактора  $t_w$  при разных значениях скоростного отношения: кривые 1–4 соответствуют значениям  $S = 2; 5; 10; 20$ .

Из уравнения (2.5) определяем значения  $\delta_0$  в зависимости от скорости набегающего потока  $S$  и температурного фактора  $t_w$ .

Из рис. 1 видно, что зависимость  $C_y(\alpha)$  немонотонна. Причем при любом угле полураствора  $\delta$ , начиная с некоторого угла, эта зависимость величина  $C_y(\alpha)$  становится отрицательной. Отсюда следует

*Теорема 2.* При любом значении угла полураствора  $\delta < \delta_0$  найдется такой угол атаки  $\alpha = \alpha_0$  из множества  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , что при  $\alpha > \alpha_0$  коэффициент подъемной силы  $C_y < 0$ .

*Доказательство.*

Эту теорему можно доказать непосредственным нахождением  $\alpha_0$  из решения уравнения

$$C_y(\alpha, \delta) = 0 \quad (2.6)$$

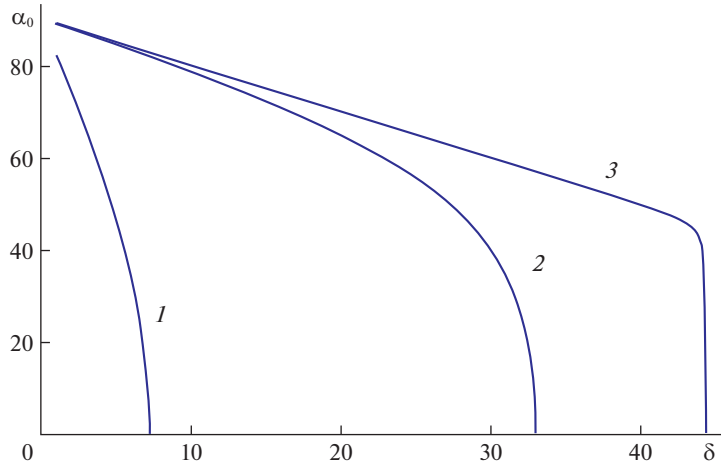


Рис. 4. Зависимость  $\alpha_0(\delta)$  для  $t_w = 0.1$ : кривые 1–3 соответствуют значениям  $S = 0.1; 1.0; 10.0$ .

На рис. 4 показан пример зависимости  $\alpha_0(\delta)$ .

**3. Высокоскоростные течения. Локальный метод. Клин.** В высокоскоростном потоке при  $S \rightarrow \infty$  возможно использовать метод, основанный на гипотезе локальности [6], которая состоит в следующем: аэродинамические коэффициенты сил, действующие на элемент поверхности, зависят только от местного угла наклона  $\theta$  этого элемента к вектору скорости набегающего потока  $U_\infty$ , от характерного для всего тела числа  $Re_0 = \rho_\infty U_\infty L / \mu_0$  и температурного фактора  $t_w = T_w / T_0$ , где  $\mu_0 = \mu(T_0)$  – коэффициент вязкости, вычисляемый по температуре торможения;  $T_0 = T_\infty [1 + S^2 (\gamma - 1) / \gamma]$ ,  $T_w$  – температура торможения и температура элемента поверхности, соответственно;  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей;  $L$  – характерный размер тела. В соответствии с гипотезой локальности предполагается, что для аэродинамических коэффициентов справедливы соотношения [6]

$$\begin{aligned} Cp &= p_0 \sin^2 \theta + p_1 \sin \theta \\ C\tau &= \tau_0 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, в свободномолекулярном случае ( $Re_0 \rightarrow 0$ ) из (2.1) при  $S \rightarrow \infty$  следует:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = [\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma]^{1/2},$$

а в случае невязкого высокоскоростного газа ( $Re_0 \rightarrow \infty$ ) следует формула Ньютона и  $p_0 = 2, p_1 = \tau_0 = 0$ .

Теорема 1 доказывается так же как в разд. 2 и критический угол вычисляется из решения уравнения (2.5).

В свободномолекулярном случае ( $Re_0 \rightarrow 0$ ) уравнение (2.5) имеет вид

$$\cos(2\delta) = 0, \quad \delta_0 = 45^\circ \quad (3.2)$$

Теорема 2 как и в случае разд. 2 доказывается прямым решением уравнения (2.6). Получается, что в этом случае такого угла нет, то есть  $\alpha_0 = 90^\circ$ .

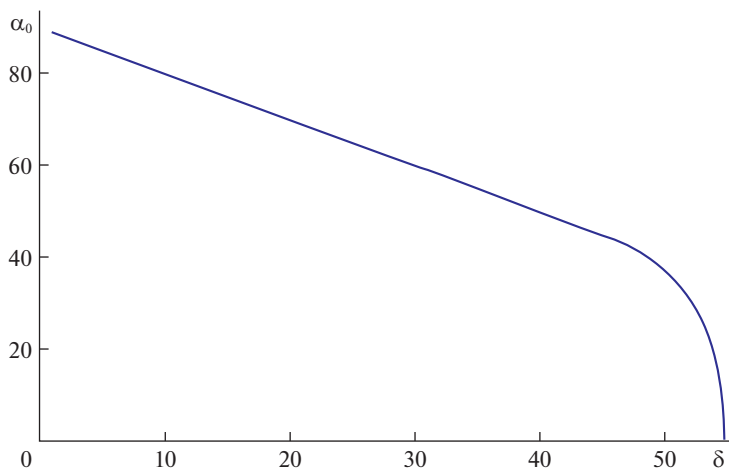


Рис. 5. Зависимость  $\alpha_0(\delta)$  для клина в случае модели Ньютона ( $\text{Re}_0 \rightarrow \infty$ ).

В случае невязкого газа ( $\text{Re}_0 \rightarrow \infty$ ) используется формула Ньютона и нахождение критического угла сводится к решению уравнения

$$3 \sin(3\delta) - \sin \delta = 0$$

Исключая нефизичные значения корней ( $|\delta| > \pi/2$ ) и отрицательные значения (вследствие симметрии), получаем

$$\delta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.73^\circ \quad (3.3)$$

Решение уравнения (2.6) дает доказательство теоремы 2. Результат этого решения показан на рис. 5.

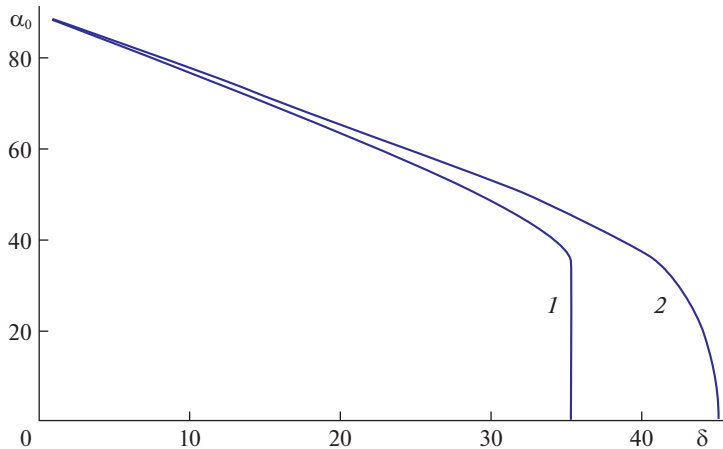
**4. Высокоскоростные течения. Конус.** Используя формулы (3.1) коэффициент подъемной силы конуса запишется [6]

$$C_y = \left\{ (\rho_0 - \tau_0) \sin^2 \delta \cos \alpha \left[ \cos^2 \alpha f(z) - g(z) \right] + \right. \\ \left. + \rho_1 \sin \delta \left[ \cos^2 \alpha g(z) - h(z) \right] \right\} \text{ctg } \alpha; \quad z = \text{tg } \delta \text{ctg } \alpha \quad (4.1)$$

При  $z \geq 1$   $f(z) = 1 + \frac{3}{2z^2}$ ,  $g(z) = 1 + \frac{1}{2z^2}$ ,  $h(z) = 1$ ;

$$\text{При } z < 1 \quad \begin{cases} f(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2z^2} \right) (\pi - \arccos z) + \frac{1}{z} \left( \frac{11}{6} + \frac{2}{3z^2} \right) \sqrt{1 - z^2} \right] \\ g(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2z^2} \right) (\pi - \arccos z) + \frac{3}{2z} \sqrt{1 - z^2} \right] \\ h(z) = \frac{1}{\pi} \left( \pi - \arccos z + \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2} \right) \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 из решения уравнения (2.5) находим значение  $\delta_0 = 35.26^\circ$ .



**Рис. 6.** Зависимость  $\alpha_0(\delta)$  для кругового конуса в свободномолекулярной модели ( $Re_0 \rightarrow 0$ ) — кривая 1 и модель Ньютона ( $Re_0 \rightarrow \infty$ ) — кривая 2.

Для доказательства теоремы 2 решаем уравнение  $Cy = 0$  при  $\delta < \delta_0$ . Результат решения на рис. 6.

В случае модели Ньютона подставляем в эти выражения  $p_0 = 2$ ,  $p_1 = \tau_0 = 0$  получаем формулы локального метода для конуса. Уравнение (2.5) дает

$$\cos 2\delta = 0, \quad \delta_0 = 45^\circ \quad (4.2)$$

**Заключение.** В статье рассматриваются коэффициенты подъемной силы клина и кругового конуса для двух моделей течения: свободномолекулярная модель газа и модель основанная на гипотезе локальности высокоскоростных течений. Для данных случаев сформулированы и доказаны теоремы, согласно которым для любого угла полураствора найдется такой угол атаки, начиная с которого коэффициент подъемной силы становится отрицательным, и также существует угол полураствора, начиная с которого коэффициент подъемной силы отрицателен для любого угла атаки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин В.С., Гладков А.А. О подъемной силе при гиперзвуковых скоростях // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1138–1139.
2. Галкин В.С. О подъемной силе в свободномолекулярном потоке // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 567.
3. Василенко Д.А., Дорофеев Ф.Е., Дорофеев Е.А. Построение нейросетевого аппроксиматора для определения критического угла полураствора в эффекте смены знака коэффициента подъемной силы для затупленных конических тел // Тр. МАИ. 2021. Вып. 119.
4. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989, 688 с.
5. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967, 440 с.
6. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом разреженном газе // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.

**On the Lifting Force in a Rarefied Gas Flow****S. L. Gorelov<sup>a,#</sup> and A. V. Mogorychnaya<sup>b,##</sup>**<sup>a</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Zhukovsky, Russia*<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Russia*<sup>#</sup>*e-mail: gorelovsl@yandex.ru*<sup>##</sup>*e-mail: anna.mogorychnaya@phystech.edu*

For the cases of a wedge and a cone aerodynamic forces acting on a body in a rarefied gas flow, are calculated. The theorem about existence of such an angle of half opening of a wedge and a cone, that for every wider angle of half opening the lifting force is negative for every arbitrary angle of attack is formulated and proved. It is shown, that this effect takes place at any arbitrary Reynolds number.

*Keywords:* aerodynamics forces in a rarefied gas flow, Reynolds number, rarefaction effects

## REFERENCES

1. *Galkin V.S., Gladkov A.A.* On the lift force at hypersonic speeds // JAMM, 1961, vol. 25, iss. 6, pp. 1697–1699.
2. *Galkin V.S.* On the lifting force in a free molecular flow // JAMM, 1962, vol. 26, iss. 3, pp. 848–849.
3. *Vasilenko D.A., Dorofeev F.E., Dorofeev E.A.* Construction of a neural network approximator to determine the critical half-angle in the effect of sign reversal of the lifting force coefficient for blunt conical bodies // Proc. MAI, 2021, iss. 119.
4. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989. 688 p. (in Russian)
5. *Kogan M.N.* Dynamics of Rarefied Gas. Moscow: Nauka, 1967. 440 p.
6. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic rarefied gas // TsAGI Proc., 1977, iss. 1833, pp. 6–10.