

УДК 539.3

**КАПИЛЛЯРНАЯ АДГЕЗИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ  
ЧАСТИЧНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ**© 2022 г. Ю. Ю. Маховская<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия**\*e-mail: makhovskaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.11.2021 г.

После доработки 10.01.2022 г.

Принята к публикации 21.01.2022 г.

Рассмотрена контактная задача для упругого осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, и упругого полупространства в условиях капиллярной адгезии, т.е. при наличии в зазоре мениска жидкости, стягивающего поверхности вне области контакта. Контактующие тела находятся под действием нормальной и тангенциальной нагрузок в условиях частичного проскальзывания, в области проскальзывания предполагается двучленный закон трения Кулона. В предположении, что материалы индентора и полупространства одинаковы, получены аналитические соотношения для распределения касательных напряжений в контакте, тангенциальной нагрузки и перемещения, а также уравнение для определения размера области сцепления. Проведен анализ контактных характеристик в зависимости от формы индентора, поверхностного натяжения жидкости и капиллярного давления в мениске.

*Ключевые слова:* капиллярная адгезия, мениск, частичное проскальзывание, трение покоя

**DOI:** 10.31857/S0032823522020072

**1. Введение.** Контакт поверхностей во влажной атмосфере при определенных условиях сопровождается капиллярной конденсацией и образованием менисков жидкости, стягивающих отдельные контактирующие микронеровности двух поверхностей или удерживающих на поверхности микрочастицы износа и загрязнений. Силы капиллярной адгезии, возникающие в таких микроменисках, могут достигать значительных величин и существенно влиять на динамическую и статическую силы трения [1], что является одной из причин заедания и поломок в микромеханических системах [2], а также важным фактором в сцеплении биологических материалов [3].

Для моделирования контакта отдельного выступа или частицы износа с контртелом в условиях статического трения рассматривается решение контактной задачи для осесимметричного индентора и упругого полупространства под действием нормальной и тангенциальной сил, когда приложенная тангенциальная сила недостаточно велика, чтобы вызвать полное скольжение, и область контакта делится на зоны сцепления и проскальзывания. Исследование влияния мениска жидкости, окружающего область контакта, на решение такой задачи является целью настоящей работы.

Решение задачи о контакте с частичным проскальзыванием для двух упругих шаров было получено Каттанео [4] и Миндлиным [5] и обобщено для случая произвольных осесимметричных тел в работах Йегера [6] и позже Чивареллы [7], а также обобщено для случая трансверсально изотропных тел [8]. Предположение об идентичности ма-

териалов контактирующих тел позволило рассматривать задачи о нормальном и тангенциальном нагружении отдельно друг от друга. При этом считалось, что в области скольжения нормальные  $p$  и касательные  $\tau$  напряжения связаны одночленным законом трения Амонтона  $\tau = \mu p$ , где  $\mu$  – коэффициент трения. В такой постановке были в дальнейшем рассмотрены задачи для различной геометрии взаимодействующих тел, в частности, для текстурированных поверхностей [9, 10].

Влияние адгезии, вызванной межмолекулярными силами, в условиях контакта сухих поверхностей на решение задачи о частичном проскальзывании изучалось в [11–13] для случая плоской задачи и в [14–16] для пространственного осесимметричного контакта. В работах [11–15] решение строилось аналитически в рамках приближения об идентичности материалов взаимодействующих тел, а в [16] – численно для пары различных материалов. Заметим, что локальный закон трения в форме Амонтона  $\tau = \mu p$  неприменим для задач с учетом адгезии, в которых контактное давление на части области контакта становится отрицательным, а значит, отрицательным должно быть и касательное напряжение в этой области, что физически невозможно. Поэтому в работах [11, 12, 14] касательное напряжение в области проскальзывания считалось постоянным  $\tau = \tau_0$ , а в работах [13, 15, 16] использовался закон трения  $\tau = \mu p$ , но предполагалось, что в области контакта действует только положительное нормальное давление  $p$ . Однако, закон трения в виде постоянного касательного напряжения  $\tau = \tau_0$  не позволяет учесть влияние нормальных напряжений на касательные. Предположение о только положительном нормальном давлении в области контакта также не является физически достоверным, в частности, оно не позволяет исследовать случай отрицательной внешней нагрузки, когда контакт по конечной области существует благодаря адгезии, и контактные давления могут стать отрицательными в значительной части области контакта или во всей этой области.

В настоящей работе предлагается преодолеть эту трудность путем использования двучленного закона трения Кулона в области проскальзывания:

$$\tau = \tau_0 + \mu p \quad (1.1)$$

где величины  $\tau_0$  и  $\mu$  таковы, чтобы обеспечить неотрицательные касательные напряжения во всей области проскальзывания даже при отрицательных значениях нормального давления  $p$ . В работе рассмотрено контактное взаимодействие в условиях частичного проскальзывания с учетом капиллярной адгезии, вызванной наличием в зазоре между телами мениска жидкости.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается контакт упругого полупространства и упругого индентора в присутствии мениска жидкости, стягивающего поверхности вне области контакта. Пусть ось  $z$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$  направлена вглубь упругого полупространства, а плоскость  $z = 0$  совпадает с поверхностью полупространства. К индентору сначала приложена внешняя нормальная сила  $P$ , действующая вдоль оси  $z$ , и после этого приложена тангенциальная сила  $T$ , действующая в направлении оси  $x$  (рис. 1). Форма индентора описывается функцией  $f(x, y) = A(x^2 + y^2)^n$ , где  $n \geq 1$  – целое число.

Пусть внутри области  $\Omega_c$  поверхности находятся в контакте, а мениск занимает область  $\Omega_m$ . Граничные условия при  $z = 0$  для давления и перемещения в направлении оси  $z$  определяются формой индентора  $f(x, y)$  в области контакта и постоянным капиллярным давлением  $p_0$  в области мениска:

$$\begin{aligned} u_z(x, y) &= -f(x, y) + \delta_z; & (x, y) \in \Omega_c \\ p(x, y) &= -p_0; & (x, y) \in \Omega_m \\ p(x, y) &= 0; & (x, y) \notin \Omega_c \cup \Omega_m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

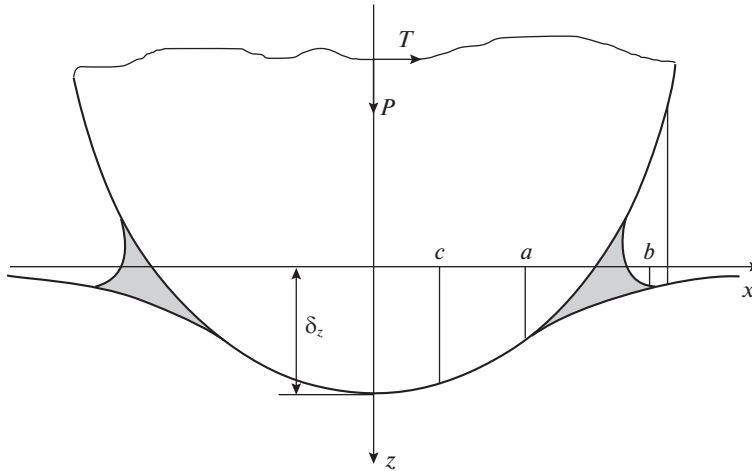


Рис. 1. Схема контакта при наличии капиллярной адгезии в условиях частичного проскальзывания.

где  $u_z = u_{z1} + u_{z2}$  — суммарное нормальное смещение поверхностей взаимодействующих тел за счет их деформирования,  $\delta_z$  — внедрение индентора в полупространство в направлении оси  $z$ . При этом капиллярное давление под искривленной поверхностью мениска  $p_0$  определяется формулой Лапласа

$$p_0 = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.2)$$

где  $\gamma$  — поверхностное натяжение жидкости,  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны мениска в двух взаимно ортогональных плоскостях, определяемые начальной геометрией и упругой деформацией индентора и полупространства.

Считается, что величина тангенциальной силы  $T$  недостаточна для того, чтобы вызвать скольжение во всей области контакта  $\Omega_c$ , т.е. область контакта делится на области сцепления  $\Omega_{st}$  и проскальзывания  $\Omega_{sl}$ . При этом граничные условия в направлении оси  $x$  определяются тангенциальным перемещением  $\delta_x$  индентора в области сцепления и законом трения (1.1) в области проскальзывания:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \delta_x; & (x, y) &\in \Omega_{st} \\ \tau(x, y) &= \tau_0 + \mu p(x, y); & (x, y) &\in \Omega_{sl} \\ \tau(x, y) &= 0; & (x, y) &\notin \Omega_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия равновесия в нормальном и тангенциальном направлении имеют вид:

$$P = \iint_{\Omega_c \cup \Omega_m} p(x, y) dx dy, \quad T = \iint_{\Omega_c} \tau(x, y) dx dy \quad (2.4)$$

**3. Метод решения.** Решение задачи строится в предположении, что упругие постоянные материалов индентора и полупространства одинаковы, и уравнения, связывающие контактные напряжения и перемещения в нормальном и тангенциальном направлениях не зависят друг от друга [7, 18]:

$$\begin{aligned}
 u_z(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_{\Omega_c \cup \Omega_m} \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' \\
 u_x(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_{\Omega_c} \frac{\tau(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy',
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материалов индентора и полупространства. Таким образом, задача о нормальном контакте может решаться независимо от задачи о тангенциальном нагружении.

*Задача о нормальном нагружении* упругого осесимметричного контакта при наличии мениска определяется условиями (2.1) и (2.2), а также первыми уравнениями из (2.4) и (3.1). В этом случае задача является осесимметричной: форма индентора описывается функцией  $f(r) = Ar^{2n}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , контактное давление  $p$  и перемещение  $u_z$  также являются функциями радиальной координаты  $r$ , область контакта  $\Omega_c$  представляет собой круг  $r \leq a$ , а область мениска  $\Omega_m$  – кольцо  $a \leq r \leq b$ .

В предположении, что угол смачивания обеих поверхностей жидкостью равен нулю и пренебрегая силой натяжения пленки на внешней границе мениска, из формулы Лапласа (2.2) можно получить следующее условие, связывающее капиллярное давление с упругими перемещениями границ взаимодействующих тел, их формой и нормальным внедрением [17]:

$$u_z(b) + f(b) - \delta_z = \frac{2\gamma}{p_0} \tag{3.2}$$

Контактная задача о нормальном нагружении осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, с условиями (2.1) и (3.2), а также при условии непрерывности контактного давления на границе области контакта

$$p(a) = -p_0 \tag{3.3}$$

была рассмотрена и решена в [17]. В результате получены следующие соотношения для распределения контактного давления по радиальной координате  $r$

$$p(r) = \frac{nAE^*a^{2n-1}}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma^2(n+1/2)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{a^{2(n-m)}} - \frac{2p_0}{\pi} \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} \tag{3.4}$$

нормального внедрения индентора

$$\delta_z = Aa^{2n} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} - \frac{2p_0}{E^*} \sqrt{b^2 - a^2}, \tag{3.5}$$

внешней нормальной силы

$$P = \frac{2AE^*na^{2n+1}}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} - 2p_0b^2 \left( \arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right), \tag{3.6}$$

а также уравнение, следующее из условия (3.2):

$$\begin{aligned}
 \frac{Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\pi^{1/2}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} - \frac{b^{2n}}{a^{2n}} \right] \arccos \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{a^{2(n-k)}}{b^{2(n-k)}} \right\} + \\
 + \frac{2bp_0}{\pi E^*} \left[ 1 - \frac{a}{b} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right] + \frac{2\gamma}{p_0} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Если внешняя нормальная нагрузка  $P$  и капиллярное давление  $p_0$  заданы, то соотношения (3.6) и (3.7) служат в качестве уравнений для численного определения радиуса области контакта  $a$  и внешнего радиуса мениска  $b$ . После этого распределение контактного давления и внедрение индентора определяются по формулам (3.4) и (3.5), соответственно.

*Задача о тангенциальном нагружении* задается условиями (2.3) и вторыми из соотношений (2.4) и (3.1). Поскольку распределение нормальных давлений (3.4) зависит только от радиальной координаты  $r$ , из условий (2.3) следует, что касательное напряжение  $\tau$  в области проскальзывания  $\Omega_{sl}$  и перемещение  $u_x$  в области сцепления  $\Omega_{st}$  также являются функциями только радиальной координаты  $r$ , откуда, в силу формы второго из уравнений (3.1), следует осесимметричность решения задачи о тангенциальном нагружении. Пусть область сцепления  $\Omega_{st}$  представляет собой круг  $r \leq c$ , а область проскальзывания  $\Omega_{sl}$  – кольцо  $c \leq r \leq a$  (см. рис. 1). Касательное напряжение  $\tau(r)$  считается непрерывным на границе областей сцепления и проскальзывания (при  $r = c$ ).

Для определения касательного напряжения в области сцепления воспользуемся теорией Каттанео–Миндлина [4, 5], обобщенной [6, 7] для трехмерного индентора произвольной формы. Представим функцию  $\tau(r)$  при  $r \leq a$  в виде:

$$\tau(r) = \tau_0 + \mu p(r) - \tau^*(r), \quad (3.8)$$

где для функции дополнительного касательного напряжения  $\tau^*(r)$  выполняется условие  $\tau^*(r) \equiv 0$  при  $r \geq c$ . Подставляя выражение (3.8) во второе соотношение (3.1) и переходя в интегралах к полярным координатам [18], получим

$$u_x(r) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^a (\tau_0 + \mu p(r') - \tau^*(r')) \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{K}(x)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Из первого соотношения (3.1) и граничных условий (2.1) следует

$$\frac{1}{\pi E^*} \int_0^a p(r') \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = -\frac{p_0}{\pi E^*} \int_a^b \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} - f(r) + \delta_z \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (3.10) в (3.9) и учитывая граничные условия (2.3), а также значение интеграла [18]

$$\int_0^s \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = s \mathbf{E} \left( \frac{r}{s} \right); \quad r \leq s, \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{E}(x)$  – полный эллиптический интеграл второго рода, получим для функции дополнительного касательного напряжения  $\tau^*(r)$  уравнение

$$\frac{1}{\pi E^*} \int_0^c \tau^*(r') \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = -f^*(r) + \delta^*, \quad (3.12)$$

где

$$f^*(r) = \mu f(r) - \frac{4\mu p_0}{\pi E^*} \left[ a \mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right) - b \mathbf{E} \left( \frac{r}{b} \right) \right] - \frac{4\tau_0 a}{\pi E^*} \mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right) \quad (3.13)$$

$$\delta^* = \mu \delta_z - \delta_x$$

Поскольку для функции  $\tau^*(r)$  выполняется условие  $\tau^*(c) = 0$ , то интегральное уравнение (3.12) по форме совпадает с интегральным уравнением контактной задачи о внедрении в упругое полупространство осесимметричного штампа заданной формы  $f^*(r)$  (3.13) при действии на него нормальной внешней силы, равной по величине

$$T^* = 2\pi \int_0^c r \tau^*(r) dr, \quad (3.14)$$

а значит, для решения уравнения (3.12) можно использовать полученные ранее соотношения для решения задачи о нормальном внедрении осесимметричного штампа в полупространство.

Воспользуемся решением задачи о внедрении осесимметричного штампа заданной формы  $f^*(r)$  в упругое полупространство [19]. Полученное выражение для нормального давления под штампом [19], с учетом соотношений (3.12)–(3.14) и (3.8) приобретает вид следующего выражения для искомого касательного напряжения при  $r \leq c$

$$\tau(r) = \mu p(r) + \tau_0 - \frac{E^* c^2}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 c^2 - r^2}} \Delta f^*(cxy) dx dy \quad (3.15)$$

Условие для определения нормального внедрения штампа [19], преобразуется в условие для определения тангенциального перемещения  $\delta_x$

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \delta_{zy} - \delta_{xy} - y f^*(cy)) dy = 0 \quad (3.16)$$

Воспользовавшись формулой, полученной Галиным [20] для силы, прижимающей осесимметричный штамп, получим

$$T^* = 2E^* \int_0^c \Delta f^*(r) r \sqrt{c^2 - r^2} dr \quad (3.17)$$

В соотношениях (3.15) и (3.17),  $\Delta$  – оператор Лапласа в полярных координатах,  $\Delta f(r) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) f(r)$ . При этом искомая полная тангенциальная сила  $T$ , с учетом (3.8) и (3.14), а также условий (2.1), определяется как

$$T = \mu P + \pi \mu p_0 (b^2 - a^2) + \pi a^2 \tau_0 - T^* \quad (3.18)$$

После подстановки выражений (3.13) в соотношения (3.15)–(3.18) и взятия интегралов (используя методы интегрирования [17]), получим окончательно для касательного напряжения в области сцепления  $r \leq c$ :

$$\begin{aligned} \tau(r) = & \frac{\mu n A E^* \Gamma^2(n+1)}{\pi^{3/2} \Gamma^2(n+1/2)} \left( \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{a^{1-2m}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{c^{1-2m}} \right) - \\ & - \frac{2\mu p_0}{\pi} \left( \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} + \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{c^2 - r^2}{b^2 - c^2}} \right) + \frac{2(\tau_0 + \mu p_0)}{\pi} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{c^2 - r^2}{a^2 - c^2}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а также для тангенциальных перемещения и силы:

$$\delta_x = \frac{\mu A \pi^{1/2} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} (a^{2n} - c^{2n}) - \frac{2\mu p_0}{E^*} (\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - c^2}) + \frac{2(\tau_0 + \mu p_0)}{E^*} \sqrt{a^2 - c^2} \quad (3.20)$$

$$T = \frac{2\mu A E^* n \Gamma(n+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(n+3/2)} (a^{2n+1} - c^{2n+1}) - 2\mu p_0 b^2 \left( \arccos \frac{a}{b} - \arcsin \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} + \frac{c}{b} \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \right) + 2a^2 (\tau_0 + \mu p_0) \left( \arccos \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right) + \pi \mu p_0 (b^2 - 2a^2) \quad (3.21)$$

Предельная тангенциальная сила, при которой начинается полное скольжение индентора относительно полупространства, получается из (3.21) при  $c = 0$ :

$$T_{\text{lim}} = \mu P + \pi a^2 \tau_0 + \pi \mu p_0 (b^2 - a^2), \quad (3.22)$$

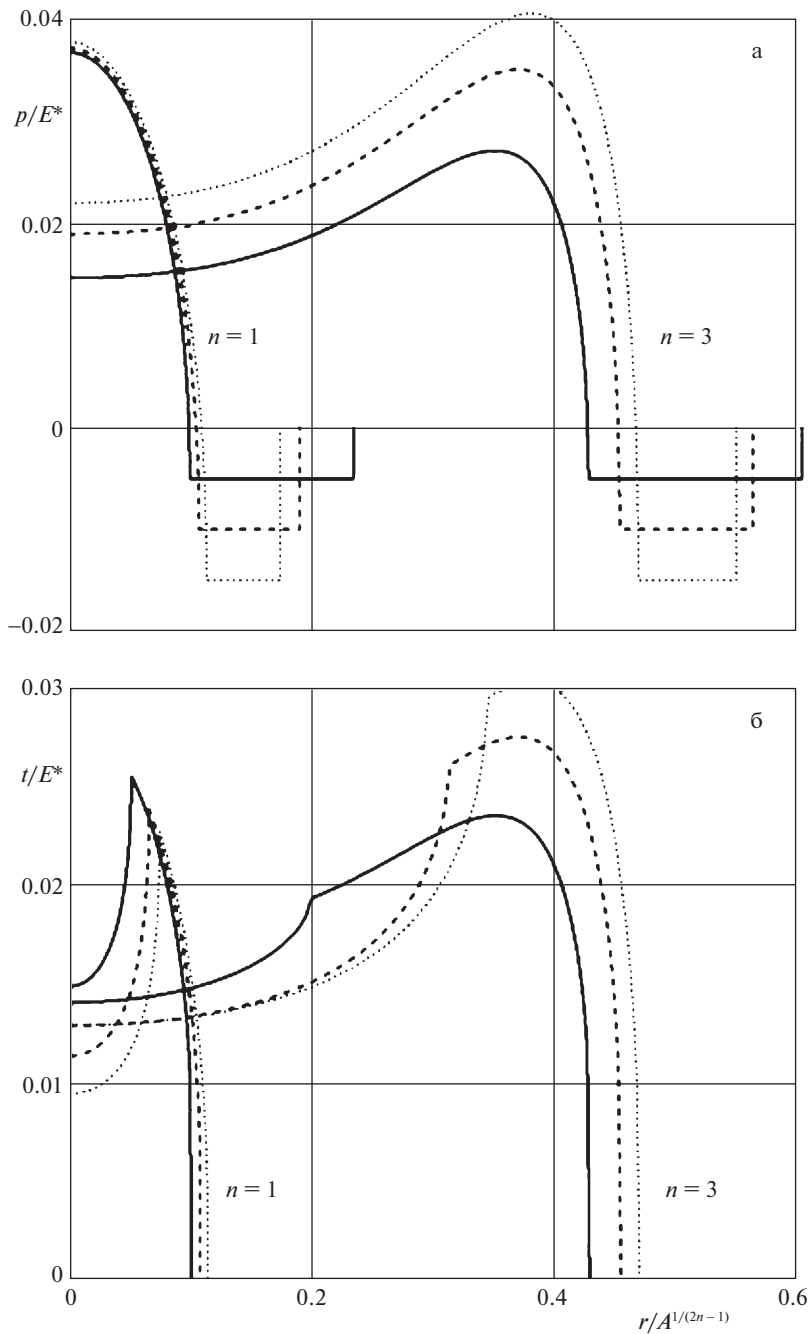
где  $P$  определяется выражением (3.6).

Если величины  $a$  и  $b$  определены решением уравнений (3.6), (3.7) задачи о нормальном нагружении, то при заданной тангенциальной силе  $T$  численное решение уравнения (3.21) позволяет определить радиус области сцепления  $c$ , после чего касательные напряжения в области сцепления и тангенциальное перемещение определяются выражениями (3.19) и (3.20).

В случае  $n = 1$  и  $A = 1/(2R)$  (индентор в форме параболоида вращения с радиусом кривизны вершины  $R$ ) и  $\mu = 0$  (трение в зоне проскальзывания задано законом  $\tau(r) = \tau_0$ ) соотношения (3.19)–(3.21) совпадают с выражениями [14].

**4. Результаты расчета.** На рис 2,а приведены распределения безразмерного нормального давления  $p/E^*$  по безразмерной радиальной координате  $rA^{1/(2n-1)}$ , где  $A^{-1/(2n-1)}$  – характерный размер индентора. Результаты приведены для двух форм индентора, описываемых различными показателями степени  $n$  функции  $f(r) = Ar^{2n}$ , и трех величин безразмерного капиллярного давления в мениске  $p_0/E^*$ . Остальные безразмерные параметры задачи считались постоянными – безразмерное поверхностное натяжение жидкости  $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$  и внешняя нормальная сила  $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-3}$ , действующая на индентор. Увеличение показателя  $n$  соответствует “уплощению” вершины индентора и, вследствие этого, расширению как области контакта, так и области мениска (область постоянного отрицательного давления на графике). Возрастание величины капиллярного давления в мениске приводит к увеличению размера области контакта и возрастанию контактного давления, что более выражено при больших значениях  $n$ , при этом ширина кольцевой области, занятой мениском, уменьшается.

На рис. 2,б приведены распределения безразмерного касательного напряжения  $\tau/E^*$ , соответствующие тем же величинам параметров, что и распределения давления на рис. 2,а. Параметры закона трения (1.1) –  $\mu = 0.5$  и  $\tau_0/E^* = 0.01$  – выбраны таким образом, чтобы касательные напряжения в области контакта оставались положительными, несмотря на то, что нормальные давления становятся отрицательными вблизи границы области контакта (см. рис. 2,а). При этом графики для  $n = 1$  рассчитаны при значении



**Рис. 2.** Распределение нормального (а) и касательного (б) контактных напряжений для двух различных форм индентора ( $n = 1$  и  $3$ ) и трех значений капиллярного давления:  $p_0/E^* = 0.005$  (сплошные линии),  $0.010$  (штриховые линии) и  $0.015$  (пунктирные линии).



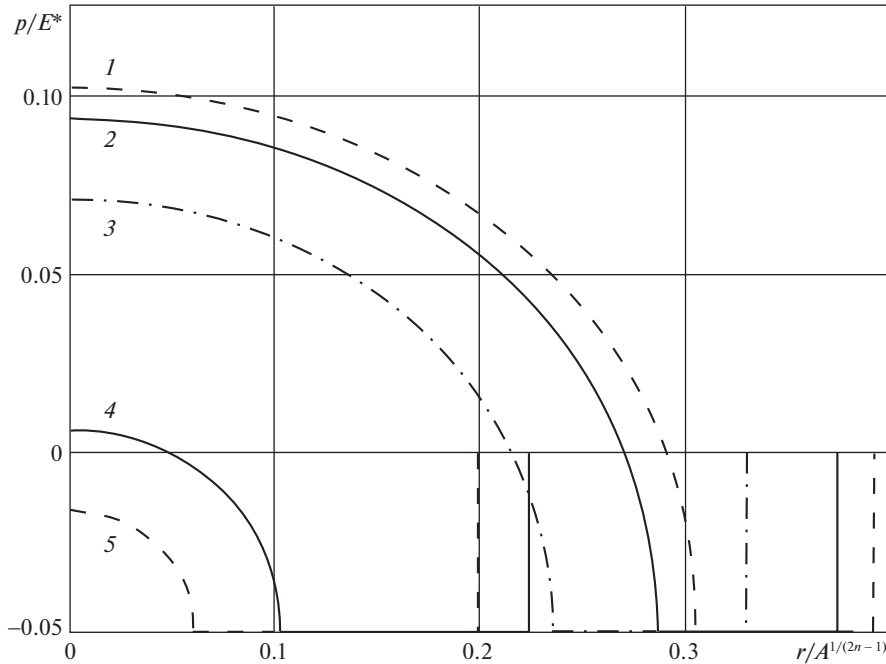
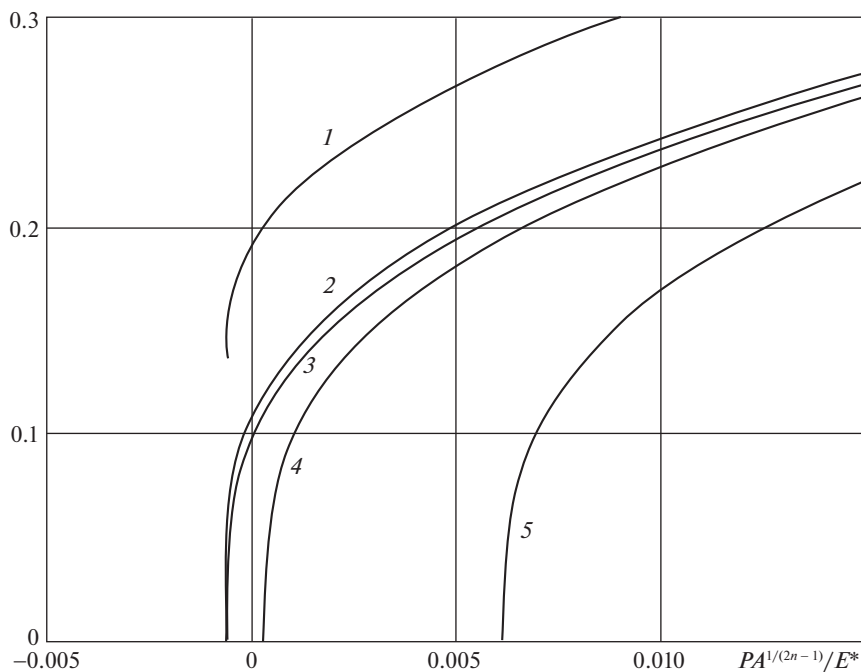


Рис. 3. Распределение нормального давления для различных значений внешней нормальной силы:  $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 0.06$  (кривая 1),  $0.04$  (кривая 2),  $0.01$  (кривая 3),  $-0.04$  (кривая 4) и  $-0.05$  (кривая 5).

безразмерной тангенциальной силы, действующей на индентор,  $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 6 \times 10^{-4}$ , а для  $n = 3$  — при  $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 7 \times 10^{-3}$ . Точки излома на графиках распределения касательного напряжения соответствуют границе областей сцепления и проскальзывания. Результаты расчета показывают, что возрастание величины капиллярного давления в мениске приводит к расширению области сцепления, при этом величина максимального касательного напряжения ведет себя по-разному в зависимости от формы индентора: при  $n = 1$  (индентор параболической формы) максимальное касательное напряжение убывает с возрастанием капиллярного давления, а при  $n \geq 1$  (инденторы с “уплощенной” вершиной) максимальное касательное напряжение возрастает вместе с капиллярным давлением.

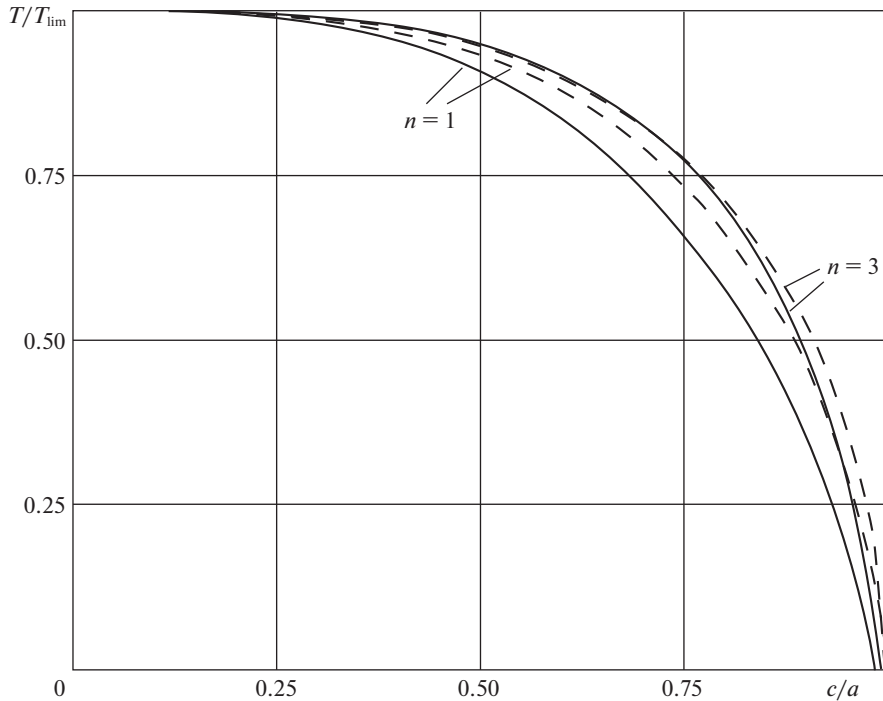
Чтобы проиллюстрировать влияние внешней нормальной силы на контактные характеристики, на рис. 3 приведены распределения контактного давления для различных значений безразмерной силы  $PA^{2/(2n-1)}/E^*$ . Графики построены при  $n = 1$  и  $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-3}$ . Увеличение внешней нагрузки приводит к возрастанию площади контакта и максимального контактного давления, при этом, благодаря мениску, контакт существует не только при положительной (вдавливающей индентор) силе, но и в некотором диапазоне отрицательных (отрывающих индентор) внешних нагрузок. Контактные давления отрицательны вблизи границы области контакта, при уменьшении нагрузки область отрицательных давлений расширяется (кривые от 1 до 4). При некотором значении отрицательной нагрузки контактные давления могут стать отрицательными во всей области контакта (кривая 5).



**Рис. 4.** Зависимость безразмерных радиуса мениска  $bA^{1/(2n-1)}$  (кривая 1), области контакта  $aA^{1/(2n-1)}$  (кривая 2) и области сцепления  $cA^{1/(2n-1)}$  (кривые 3–5) от внешней нормальной нагрузки; кривые 3–5 соответствуют тангенциальной нагрузке  $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$ ;  $10^{-3}$  и  $5 \times 10^{-3}$ .

На рис. 4 показаны безразмерные радиусы областей контакта  $aA^{1/(2n-1)}$  и мениска  $bA^{1/(2n-1)}$  в зависимости от безразмерной внешней нормальной силы  $PA^{2/(2n-1)}/E^*$  при величине капиллярного давления  $p_0/E^* = 0.01$  и  $n = 1$ . Параметры закона трения и безразмерное поверхностное натяжение жидкости равны тем же значениям, при которых построены кривые на рис. 2. Поскольку решение задачи о нормальном нагружении получено независимо от задачи о тангенциальном нагружении, размеры областей контакта и мениска не зависят от величины тангенциальной силы. Однако, размер области сцепления зависит от этой величины. На рис. 3 кривыми 3–5 показаны зависимости радиуса области сцепления от нормальной нагрузки для трех значений тангенциальной силы. При относительно малой величине тангенциальной силы область сцепления существует как при положительных, так и в некоторой области отрицательных значениях нормальной нагрузки (кривая 3). При увеличении тангенциальной силы область сцепления существует, только начиная с некоторого положительного значения нормальной нагрузки, которое возрастает с возрастанием тангенциальной силы (кривые 4 и 5).

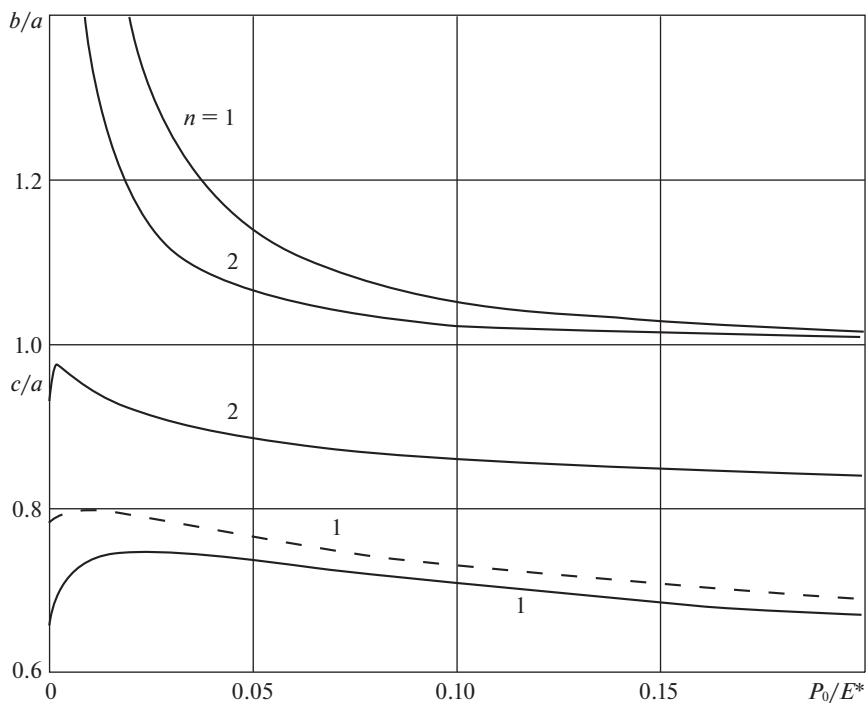
На рис. 5 представлены зависимости тангенциальной силы  $T$ , отнесенной к предельной силе  $T_{\text{lim}}$ , при которой начинается полное скольжение, от отношения радиусов областей сцепления и контакта  $c/a$  для двух форм индентора, определяемых показателем  $n$ , и различных значениях безразмерного поверхностного натяжения жидкости  $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^*$ . Результаты получены при величинах безразмерной нормальной силы



**Рис. 5.** Тангенциальная сила, отнесенная к предельной силе, в зависимости от относительного радиуса области сцепления для двух различных форм индентора ( $n = 1$  и  $3$ ) и двух значений безразмерного поверхностного натяжения жидкости:  $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-5}$  (сплошные линии) и  $10^{-3}$  (штриховые линии).

$PA^{2/(2n-1)}/E^* = 0$ , капиллярного давления  $p_0/E^* = 0.1$  и при параметрах закона трения  $\mu = 0.5$  и  $\tau_0/E^* = 0.1$ . По мере увеличения тангенциальной силы  $T$ , относительный радиус области сцепления  $c/a$  убывает вплоть до наступления полного скольжения, когда  $T = T_{\text{lim}}$  и  $c = a$ . При этом увеличение показателя  $n$  приводит к более медленному убыванию  $c/a$  при малых  $T$  и более быстрому – при больших  $T$ , близких к  $T_{\text{lim}}$ . Увеличение поверхностного натяжения жидкости (или уменьшение модуля упругости взаимодействующих тел) приводит к увеличению зоны сцепления; этот эффект более заметен при  $n = 1$ , т.е., для индентора параболической формы, чем для форм с уплощенной вершиной.

На рис. 6 показаны графики внешнего радиуса мениска  $b$  и радиуса области сцепления  $c$ , отнесенные к радиусу области контакта  $a$ , в зависимости от величины безразмерного капиллярного давления в мениске  $p_0/E^*$  при безразмерном поверхностном натяжении  $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$ , нормальной нагрузке  $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$  и параметрах закона трения  $\mu = 0.5$  и  $\tau_0/E^* = 0.01$ , а также при двух разных показателях  $n$ , характеризующих форму индентора. Графики  $b/a$  расположены в верхней половине рисунка, а графики  $c/a$  – в нижней, поскольку во всем диапазоне значений параметров задачи выполняется  $b/a \geq 1$ ,  $c/a \leq 1$  (см. рис. 1). Величина  $b/a$  определяется решением задачи о нормальном нагружении (3.6), (3.7), и поэтому не зависит от величины тангенциаль-

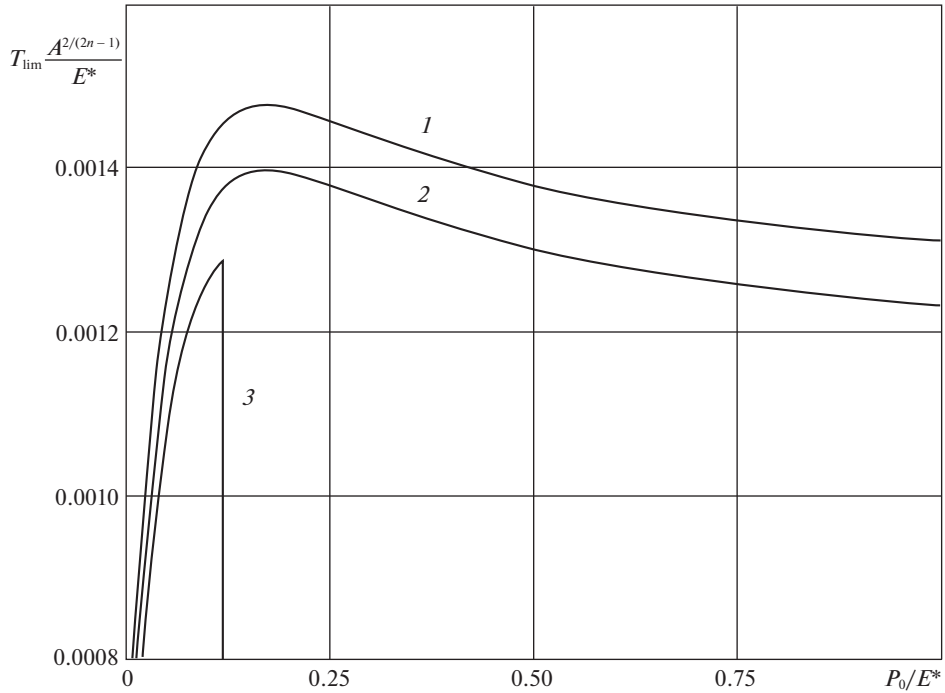


**Рис. 6.** Внешний радиус мениска (кривые в верхней половине рисунка) и радиус области сцепления (кривые в нижней половине), отнесенные к радиусу области контакта, в зависимости от капиллярного давления для двух различных форм индентора ( $n = 1$  и  $2$ ) и двух значений тангенциальной силы  $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 5 \times 10^{-4}$  (сплошные линии) и  $4 \times 10^{-4}$  (штриховая линия).

ной силы. Графики величины  $c/a$  на рис. 6 построены для двух значений тангенциальной силы.

Результаты, представленные на рис. 6, показывают, что при увеличении величины капиллярного давления в мениске величина  $b/a$  уменьшается, т.е. уменьшается ширина кольцевой области, занятой мениском. Таким образом, увеличение адгезионного давления, стягивающего поверхности, сопровождается уменьшением области, по которой действует это давление. При этом относительный радиус области сцепления монотонно зависит от  $p_0/E^*$ : при очень малых величинах капиллярного давления величина  $c/a$  резко возрастает, достигает максимума и плавно уменьшается при дальнейшем повышении капиллярного давления  $p_0/E^*$ . Увеличение показателя  $n$  (“уплощение” вершины индентора) приводит к уменьшению ширины мениска, но к увеличению радиуса области сцепления по отношению к контактному радиусу, при этом максимум  $c/a$  сдвигается в сторону меньших  $p_0/E^*$ . Увеличение тангенциальной нагрузки приводит к уменьшению относительного радиуса области сцепления  $c/a$ , при этом ее максимум сдвигается в сторону больших значений капиллярного давления  $p_0/E^*$ .

Безразмерная величина  $T_{\text{lim}} A^{2/(2n-1)}/E^*$  предельной тангенциальной силы, при которой возникает переход к полному скольжению, показана на рис. 7 как функция безразмерного капиллярного давления  $p_0/E^*$  для трех значений нормальной нагрузки —



**Рис. 7.** Предельная тангенциальная сила в зависимости от капиллярного давления для трех значений нормальной силы:  $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$  (кривая 1), 0 (кривая 2),  $-10^{-4}$  (кривая 3).

положительной (прижимающей индентор к полупространству), нулевой и отрицательной (отрывающей индентор от полупространства). Зависимость предельной тангенциальной силы от капиллярного давления также немонотонна. Контакт существует при нулевых и отрицательных нагрузках благодаря действию капиллярной адгезии. Однако, при отрицательной нагрузке увеличение капиллярного давления  $p_0/E^*$  может приводить к разрыву контакта (кривая 3).

Заметим, что для мениска, образовавшегося за счет капиллярной конденсации из окружающего воздуха и находящегося с ним в термодинамическом равновесии, капиллярное давление определяется уравнением Кельвина [18]

$$p_0 = -\frac{R_g T_0}{V_m} \ln H, \quad (3.1)$$

где  $T_0$  – абсолютная температура,  $R_g$  – универсальная газовая постоянная,  $V_m$  – молярный объем жидкости,  $H$  – относительная влажность окружающего воздуха. Уравнение (3.1) описывает монотонное убывание величины  $p_0$  с возрастанием относительной влажности  $H$ . Таким образом, в случае адгезии, вызванной капиллярной конденсацией из атмосферы, величины, немонотонно зависящие от капиллярного давления  $p_0$  (относительный радиус области сцепления  $c/a$  и предельная тангенциальная сила  $T_{\text{lim}}$ ), будут немонотонно зависеть и от влажности  $H$  – возрастать с увеличением  $H$  до некоторого значения влажности, а затем убывать.

**Заключение.** Построено решение контактной задачи о нормальном и тангенциальном нагружении осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, в контакте с упругим полупространством из такого же материала при наличии капиллярной адгезии. Задача рассмотрена в условиях частичного проскальзывания, когда область контакта делится на зоны сцепления и проскальзывания, при этом в области проскальзывания действует двучленный закон трения. Получены аналитические выражения для касательных напряжений в области сцепления, внешней тангенциальной нагрузки и тангенциального перемещения индентора, а также для предельной тангенциальной силы, при которой происходит переход к полному скольжению. Исследовано влияние на эти контактные характеристики формы индентора, поверхностного натяжения жидкости и капиллярного давления в мениске.

Установлено, в частности, что увеличение показателя  $n$  степенной функции, описывающей форму индентора (“уплощение” вершины индентора) и увеличение поверхностного натяжения жидкости приводят к возрастанию области сцепления и предельной тангенциальной силы, необходимой для перехода к полному скольжению. При этом величина предельной тангенциальной силы немонотонно зависит от капиллярного давления в мениске, определяемого относительной влажностью окружающего воздуха.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 21-58-52006.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun Y., Song C., Liu Z., et al. Effect of relative humidity on the tribological/conductive properties of Cu/Cu rolling contact pairs // *Wear*. 2019. V. 436. 203023.
2. Maboudian R., Ashurst W.R., Carraro C. Tribological challenges in micromechanical systems // *Tribol. Lett.* 2002. V. 12. P. 95–100.
3. Klaassen M., de Vries E.G., Masen M.A. The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions // *Biotribol.* 2017. V. 11. P. 124–131.
4. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. V. 27. P. 342–348.
5. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 1949. V. 16. P. 259–268.
6. Jäger J. Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift // *Arch. Appl. Mech.* 1995. V. 65. P. 478–487.
7. Ciavarella M. Tangential loading of general three-dimensional contacts // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. № 4. P. 998–1003.
8. Argatov I., Mishuris G. Tangential contact of elastically similar bodies // in: *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham: Springer, 2018. P. 129–146.
9. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 695–709.
10. Lyubicheva A.N., Tsukanov I.Y. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies // *Europ. J. Mech. A*. 2022. V. 91. 104405.
11. Sari O.T., Adams G.G., Muftu S. Nano-scale effects in the sliding and rolling of a cylinder on a substrate // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 2005. V. 72. № 5. P. 633–640.
12. Adams G.G. Stick, partial slip and sliding in the plane strain micro contact of two elastic bodies // *R. Soc. Open Sci.* 2014. V. 1. 140363.
13. Yan J., Huang G. A double-Hertz model for adhesive contact between cylinders under inclined forces // *Proc. R. Soc. A*. 2019. V. 475. 20180589.
14. Savkoor A.R. *Dry Adhesive Friction of Elastomers: A Study of the Fundamental Mechanical Aspects*. Delft: Univ. Technol., 1987.
15. Popov V.L., Dimaki A.V. Friction in an adhesive tangential contact in the Coulomb-Dugdale approximation // *J. Adhesion*. 2017. V. 93. № 14. P. 1131–1145.
16. Bazrafshan M., Rooij M.B., Schipper D.J. On the role of adhesion and roughness in stick-slip transition at the contact of two bodies: A numerical study // *Tribol. Int.* 2018. V. 121. P. 381–388.

17. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128–137.
18. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
19. Довнорович В.И., Яшин В.Ф. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Гомель: БИИЖТ, 1961. 55 с.
20. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
21. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.

### Capillary Adhesion of Elastic Bodies in the Conditions of Partial Slip

Yu. Yu. Makhovskaya<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: makhovskaya@mail.ru*

A contact problem is considered for an elastic axisymmetric indenter, whose shape is described by a power law function, and the elastic half-space in the conditions of capillary adhesion, i.e., in the presence of a liquid bridge outside the contact region. The contacting bodies are subjected to normal and tangential loads in the conditions of partial slip, the two-term Coulomb friction law being assumed in the slip region. Under the assumption of similar materials of the indenter and half-space, analytic relations are obtained for the tangential stress distribution in the contact region, tangential force and displacement, as well as an equation for the determination of the stick region radius. The contact characteristics are analyzed depending on the indenter shape, surface tension of the liquid, and capillary pressure in the meniscus.

*Keywords:* capillary adhesion, meniscus, partial slip, static friction

### REFERENCES

1. Sun Y., Song C., Liu Z. *et al.* Effect of relative humidity on the tribological/conductive properties of Cu/Cu rolling contact pairs // *Wear*, 2019, vol. 436, 203023.
2. Maboudian R., Ashurst W.R., Carraro C. Tribological challenges in micromechanical systems // *Tribol. Lett.*, 2002, vol. 12, pp. 95–100.
3. Klaassen M., de Vries E.G., Masen M.A. The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions // *Biotribol.*, 2017, vol. 11, pp. 124–131.
4. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 1938, vol. 27, pp. 342–348.
5. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, pp. 259–268.
6. Jäger J. Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift // *Arch. Appl. Mech.*, 1995, vol. 65, pp. 478–487.
7. Ciavarella M. Tangential loading of general three-dimensional contacts // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1998, vol. 65, no. 4, pp. 998–1003.
8. Argatov I., Mishuris G. Tangential contact of elastically similar bodies // in: *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham: Springer, 2018, pp. 129–146.
9. Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with periodic relief during partial slip // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 621–630.
10. Lyubicheva A.N., Tsukanov I.Y. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies // *Eur. J. Mech. A*, 2022, vol. 91, 104405.
11. Sari O.T., Adams G.G., Muftu S. Nano-scale effects in the sliding and rolling of a cylinder on a substrate // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 2005, vol. 72, no. 5, pp. 633–640.
12. Adams G.G. Stick, partial slip and sliding in the plane strain micro contact of two elastic bodies // *R. Soc. Open Sci.*, 2014, vol. 1, 140363.
13. Yan J., Huang G. A double-Hertz model for adhesive contact between cylinders under inclined forces // *Proc. R. Soc. A*, 2019, vol. 475, 20180589.

14. *Savkoor A.R.* Dry Adhesive Friction of Elastomers: A Study of the Fundamental Mechanical Aspects. Delft: Univ. Technol., 1987.
15. *Popov V.L., Dimaki A.V.* Friction in an adhesive tangential contact in the Coulomb-Dugdale approximation // *J. Adhesion*, 2017, vol. 93, no. 14, pp. 1131–1145.
16. *Bazrafshan M., Rooij M.B., Schipper D.J.* On the role of adhesion and roughness in stick-slip transition at the contact of two bodies: A numerical study // *Tribol. Int.*, 2018, vol. 121, pp. 381–388.
17. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Capillary adhesion in the contact between elastic solids // *JAMM*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 117–125.
18. *Johnson K.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 452 p.
19. *Dovnorovich V.I., Yashin V.E.* Some Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity. (Nekotorye Prostranstvennyye Zadachi Teorii Uprugosti) Gomel: Belvr. Inst. Inzh. Zheleznodor. Trans., 1961. 55 p. (in Russian)
20. *Galín L.A.* Contact Problems. The Legacy of L.A. Galin. Series: Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 155 / Ed. by *Gladwell G.M.L.* Springer, 2008. 324 p.
21. *Derjaguin B.V., Churaev N.V., Muller V.M.* Surface Forces. (Poverkhnostnye sily) Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (in Russian).