ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 2, с. 153–168

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ РАВНОГРАННОГО ТЕТРАЭДРА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Е. А. Никонова[1,*]

[1] *ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

**e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

Поступила в редакцию 22.05.2021 г.
После доработки 30.12.2021 г.
Принята к публикации 13.01.2022 г.

Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений равногранного тетраэдра вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Исследуется связь этих свойств стационарных движений со свойствами стационарных движений правильного тетраэдра, естественным геометрическим обобщением которого является равногранный тетраэдр.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, теория Рауса, устойчивость и ветвление стационарных движений, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S0032823522020096

1. Введение. В [1–3] были обнаружены достаточно неожиданные динамические свойства твердого тела в форме правильного тетраэдра и других платоновых тел, совершающих движение в центральном ньютоновском поле притяжения.

Исследование “чувствительности” динамических свойств платоновых тел восходит к публикации [4], в которой предложен оригинальный подход, опирающийся на эффективное использование симметрий в распределении масс при изучении стационарных движений в задачах динамики твердого тела (см. также [5–10]). Другое направление исследований динамики тетраэдральных тел, обусловленное потребностями механики космического полета, связано с предположением о наличии в них роторов [11–13].

2. Постановка задачи и основные обозначения. Рассмотрим движение твердого тела $\mathcal{T}$ вокруг неподвижной точки O в поле сил ньютоновского притяжения с центром в точке N. Пусть $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – единичный вектор, направленный от N к O, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции тела относительно точки O, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости тела. Здесь и далее все векторы и тензорные величины задаются в подвижной системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, задаваемых собственными векторами тензора инерции $\mathbf{I}$.

Если $U_N = U_N(\boldsymbol{\gamma})$ – потенциал силового поля, то описывающие движение уравнения Эйлера–Пуассона можно записать в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

Помимо интеграла энергии $\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U_N(\boldsymbol{\gamma}) = h$ и интеграла площадей $\mathcal{J}_1 = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = p_\psi$, уравнения (2.1) допускают геометрический интеграл

$$\mathcal{J}_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1 = 0, \tag{2.2}$$

задающий в пространстве $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\gamma})$ т.н. сферу Пуассона $\mathcal{S}$.

Как известно (см., например, [14]), система (2.1) может обладать перманентными вращениями вокруг оси NO с постоянной по величине угловой скоростью ω. Положение оси перманентного вращения в теле согласно (2.1) задаются уравнениями

$$0 = \boldsymbol{\gamma} \times \left(\frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}} - \omega^2 \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}\right); \quad \omega = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Замечание. Согласно теории Рауса ([15, 16], см. также [17]) эти вращения могут быть найдены как критические точки приведенного (amended) потенциала

$$U_\psi = \frac{p_\psi^2}{2I(\boldsymbol{\gamma})} + U_N(\boldsymbol{\gamma}), \tag{2.4}$$

рассмотренного как функция на сфере (2.2). Здесь $I(\boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ – момент инерции тела относительно оси вращения. При этом постоянная интеграла площадей p_ψ и величина угловой скорости оказываются связанными соотношением $p_\psi = I(\boldsymbol{\gamma})\omega$.

Хорошо известно, что при описании движения твердого тела в центральном поле ньютоновского притяжения, как правило, достаточно воспользоваться разложением до слагаемых первого или второго порядка малости по параметру, характеризующему отношение размеров тела к его расстоянию до притягивающего центра. Однако, в случае, когда тензор инерции тела близок к шаровому, такие приближения, вообще говоря, оказываются недостаточными. В дальнейшем в качестве примера рассмотрим движение твердого тела $\mathcal{T}$ в виде равногранного тетраэдра с равными массами в вершинах.

3. Равногранный тетраэдр. Согласно [18], тетраэдр называется равногранным, если все грани – равные между собой треугольники. Как известно, у равногранного тетраэдра бимедианы попарно перпендикулярны и являются общими серединными перпендикулярами соответствующих скрещивающихся ребер. Пусть $\mathcal{T}$ – тело в форме равногранного тетраэдра с равными массами m в вершинах. Будем считать, что оно совершает вращение вокруг неподвижной точки O, совпадающей с точкой пересечения бимедиан. Зададим жестко связанную с тетраэдром правую систему отсчета $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и осями, направленными вдоль бимедиан. Если длины бимедиан равны $2ra_1$, $2ra_2$, $2ra_3$ соответственно, то вершины A, B, C и D тетраэдра $\mathcal{T}$ в этой системе отсчета задаются радиус-векторами

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{OA} = r(a_1, -a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_A, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{OB} = r(-a_1, -a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_B$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{OC} = r(-a_1, a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_C, \quad \mathbf{r}_D = \mathbf{OD} = r(a_1, a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_D,$$

причем длины этих векторов равны

$$|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = |\mathbf{OC}| = |\mathbf{OD}| = r$$

и имеет место связь

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{3.1}$$

Оси $Ox_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции тела $\mathcal{T}$, в них главные центральные моменты $\mathcal{T}$ записываются как

$$I_k = 4mr^2 I_k', \quad k = 1,2,3, \quad I_1' = a_2^2 + a_3^2, \quad I_2' = a_1^2 + a_3^2, \quad I_3' = a_1^2 + a_2^2 \tag{3.2}$$

4. Приближенное представление потенциала поля притяжения. Пусть N – притягивающий центр, в котором сосредоточена масса M, $|\mathbf{NO}| = d$. Пусть единицы размерности выбраны так, что гравитационная постоянная, масса M, а также величина $r_\star = \sqrt{d^2 + r^2}$ равны единице (ср. [19]). Тогда потенциал притяжения имеет вид

$$U_N = -\sum_{(A,B,C,D)} \rho_A^{-1}, \quad \rho_A = (1 + \varepsilon(\gamma, \mathbf{e}_A))^{1/2}, \quad \varepsilon = 2dr, \tag{4.1}$$

где (A,B,C,D) – циклическая перестановка индексов. Его разложение с точностью до членов четвертого порядка по параметру ε принимает вид

$$U_N = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \varepsilon^4 U_4 + \cdots$$

$$U_0 = -4 \quad U_1 = 0, \quad U_2 = -\frac{3}{2}\left(a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2\right), \quad U_3 = \frac{15}{2} a_1 a_2 a_3 \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{4.2}$$

$$U_4 = -\frac{35}{32}\left(a_1^4\gamma_1^4 + a_2^4\gamma_2^4 + a_3^4\gamma_3^4 + 6\left(a_1^2a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2 + a_1^2a_3^2\gamma_1^2\gamma_3^2 + a_2^2a_3^2\gamma_2^2\gamma_3^2\right)\right)$$

Постоянная U_0 несущественная, она не играет роли в дальнейшем рассмотрении.

Замечание. Параметр разложения ε, предложенный ранее [19], удобно применять и в настоящем исследовании, поскольку он позволяет одновременно описывать случаи, когда тетраэдр располагается очень далеко от притягивающего центра N, и когда, наоборот, центр масс тетраэдра очень близок к притягивающему центру N.

5. Существование равновесий. Прежде всего, рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости равновесий $(p_\psi = 0)$. Если ограничиться приближением потенциала (3.2) с точностью до членов третьего порядка с потенциалом $U' = -\frac{1}{2}((a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2) - 5\varepsilon a_1a_2a_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, то уравнения равновесий после преобразований примут вид

$$\begin{aligned} \gamma_2\gamma_3(b_3 - b_2) + \gamma_1\left(\gamma_3^2 - \gamma_2^2\right) &= 0 \\ \gamma_3\gamma_1(b_1 - b_3) + \gamma_2\left(\gamma_1^2 - \gamma_3^2\right) &= 0 \\ \gamma_1\gamma_2(b_2 - b_1) + \gamma_3\left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right) &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$b_1 = \frac{2}{5}\frac{a_1}{a_2a_3\varepsilon} \quad (1,2,3) \tag{5.2}$$

и имеют место ограничения вида

$$b_1 > 0 \quad (1,2,3) \tag{5.3}$$

Соотношение (3.1) в параметрах b_i, $i = 1,2,3$, записывается как

$$\frac{1}{b_1b_2} + \frac{1}{b_2b_3} + \frac{1}{b_3b_1} = \frac{25\varepsilon^2}{4} \tag{5.4}$$

Уравнения (5.1) вместе с уравнением (2.2), выражающим единичность вектора $\boldsymbol{\gamma}$, станут основным предметом дальнейшего рассмотрения.

Эти уравнения всегда обладают решениями

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1\colon \gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0 \\
&\mathcal{I}_2\colon \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \gamma_3 = 0 \\
&\mathcal{I}_3\colon \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Этим шести решениям отвечают перманентные вращения, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр серединой одного из своих ребер.

Пусть все b_k различны (случай, когда две из трех величин b_k равны, рассмотрен ранее [20]). Если на искомом решении $\gamma_1 = 0$, тогда в силу первого уравнения (5.1) либо $\gamma_2 = 0$, либо $\gamma_3 = 0$, т.е. имеют место, либо решения $\mathcal{I}_3$, либо решения $\mathcal{I}_2$.

Далее, в предположении, что все $\gamma_k \neq 0$, систему (5.1) можно представить в виде

$$b_3 - b_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3}\left(\gamma_2^2 - \gamma_3^2\right) \quad (1,2,3)$$

или в виде

$$b_3 - b_2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\left(\gamma_3^{-2} - \gamma_2^{-2}\right) \quad (1,2,3) \tag{5.6}$$

На соотношения (5.6) можно смотреть как на уравнения относительно b_k. В этом случае говорят об *обратной задаче*. С другой стороны, на эти же соотношения можно смотреть как на уравнения относительно γ_k. В этом случае говорят о *прямой задаче*.

5.1. Решение обратной задачи. Если рассмотреть соотношения (5.6) как уравнения относительно b_k, то их решение запишется как

$$b_k = \gamma_k^{-2}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \nu'; \quad \nu' \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

или в векторном виде, причем значение вещественного параметра ν' должно быть таким, чтобы правые части всех трех соотношений (5.7) одновременно были неотрицательны. Иными словами, параметр ν' должен отвечать той части прямой

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-2}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_2^{-2}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_3^{-2}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{pmatrix} + \nu'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которая расположена в первом октанте пространства (b_1, b_2, b_3) или на его границах. Это соотношение определяет однопараметрическое семейство рассматриваемых тел, для которых существует данное, наперед заданное равновесие.

5.2. Решение прямой задачи. Если рассмотреть соотношения (4.6) как уравнения относительно γ_k, то их удобно представить как

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1^2(b_1 + \nu) \quad (1,2,3); \quad \nu \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

Прежде всего заметим, что если, например, $\nu = -b_1$, то правая часть первого из уравнений (5.8) обращается в нуль, и должны обратиться в нуль левые части всех трех уравнений. В рамках сделанного предположения первое уравнение выполнено тождественно, а оставшиеся два уравнения примут вид

$$0 = \gamma_2^2(b_2 - b_1) = \gamma_3^2(b_3 - b_1) \tag{5.9}$$

Но тогда, принимая во внимание предположение о том, что все b_k различны, из соотношения (5.9) также имеем $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, и в силу геометрического интеграла (2.2) имеет место единственное решение вида $\mathcal{I}_1$.

В дальнейшем будем считать, что $\nu \notin \{-b_1, -b_2, -b_3\}$. Перемножая левые и правые части равенств (5.8), имеем

$$\gamma_1^3\gamma_2^3\gamma_3^3 = \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2(b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu),$$

откуда находим

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = (b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu)$$

Подстановка найденного произведения в (5.8) позволяет представить ответ задачи в виде:

$$\gamma_k^2 = (b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu)(b_k+\nu)^{-1}; \quad k = 1,2,3, \tag{5.10}$$

причем, знаки γ_k, $k = 1,2,3$ при извлечении квадратных корней должны удовлетворять области определения системы (5.8), то есть знаки выражений $(b_1+\nu)$, $(b_2+\nu)$, $(b_3+\nu)$ и $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ должны быть одинаковыми.

В силу (2.2) с учетом сделанных предположений относительно параметра ν он должен удовлетворять уравнению

$$\begin{gathered}(b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu)(b_1+\nu)^{-1} + \\ +(b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu)(b_2+\nu)^{-1} + \\ +(b_1+\nu)(b_2+\nu)(b_3+\nu)(b_3+\nu)^{-1} = 1,\end{gathered} \tag{5.11}$$

эквивалентному квадратному относительно ν уравнению

$$(b_1+\nu)(b_2+\nu)+(b_2+\nu)(b_3+\nu)+(b_3+\nu)(b_1+\nu)-1=0,$$

представимому в виде

$$3\nu^2 + 2\nu(b_1+b_2+b_3) + b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - 1 = 0 \tag{5.12}$$

Дискриминант D многочлена в (5.12) всегда строго положителен:

$$\begin{gathered}D/4 = (b_1+b_2+b_3)^2 - 3(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3-1) = \\ = \frac{1}{2}\left((b_1-b_2)^2+(b_1-b_3)^2+(b_2-b_3)^2\right)+3>0\end{gathered}$$

Таким образом, уравнение (5.11) имеет два вещественных корня

$$\nu_\pm = -\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3\pm b); \quad b = \sqrt{D}/2$$

Подставляя эти значения в (5.10), в итоге имеем

$$\gamma_{1\pm}^2 = \frac{1}{9}\left(2b_2-(b_1+b_3\pm b)\right)\left(2b_3-(b_1+b_2\pm b)\right) \quad (1,2,3) \tag{5.13}$$

Эти равновесия в дальнейшем обозначаются $\mathcal{I}\mathcal{I}_\pm$.

Замечание. Общее решение прямой задачи о перманентных вращениях также имеет вид (5.13) с той лишь разницей, что в нем

$$b_1 = \frac{2}{5}\frac{a_1}{a_2a_3\varepsilon}\left(1-\frac{4}{3}\frac{r^2}{\varepsilon^2}\omega^2\right) \quad (1,2,3) \tag{5.14}$$

В этом случае наличие дополнительного параметра делает параметрическое исследование решений (5.13) гораздо более сложным. Такое исследование, равно как и исследование устойчивости перманентных вращений, в работе не осуществляется.

Для определения множества значений параметров, при которых решения (5.13) существуют, выполним переход к новым параметрам

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(b_1 + b_2 + b_3), \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(2b_1 - b_2 - b_3), \quad \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(b_2 - b_3) \tag{5.15}$$

Замечание. Переход от параметров b_i, $i = 1,2,3$, к параметрам δ_i, $i = 1,2,3$, инспирирован следующими обстоятельствами. Поверхность, задаваемая соотношением (4.4) в пространстве $\mathbb{R}^3\,(b_1, b_2, b_3)$ с ограничением (5.3), обладает осью симметрии с направляющим вектором $(1,1,1)^T$. В параметрах δ_i, $i = 1,2,3$ ось симметрии рассматриваемой поверхности будет иметь направляющий вектор $(0,0,1)^T$, а ограничение (5.3) примет простейший вид $\delta_1 > 0$. Кроме того, множества значений параметров, при которых решения (5.13) существуют, будет описываться лишь в терминах δ_2 и δ_3, что позволяет иллюстрировать эти множества на плоскости $\mathbb{R}^2\,(\delta_2, \delta_3)$.

Во введенных параметрах $b = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}$, и соотношение (5.13) принимает вид

$$\begin{gathered}
\gamma_{1\pm}^2 = \frac{1}{3}\delta_2^2 - \frac{1}{3}\delta_3^2 \pm \frac{1}{3}\delta_2\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3} \\
\gamma_{2\pm}^2 = -\frac{1}{6}\delta_2^2 + \frac{1}{6}\delta_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\delta_2\delta_3 \mp \frac{1}{6}\left(\delta_2 - \sqrt{3}\delta_3\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3} \\
\gamma_{3\pm}^2 = -\frac{1}{6}\delta_2^2 + \frac{1}{6}\delta_3^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\delta_2\delta_3 \mp \frac{1}{6}\left(\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3}
\end{gathered} \tag{5.16}$$

Для решения $\mathcal{I}\mathcal{I}_-$ правые части соотношений (5.16) неотрицательны, если выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\left(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3\right)\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right) \le 2, \quad \delta_2 \le 0 \\
\delta_3\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right) \le 1, \quad \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 \ge 0 \\
\delta_3\left(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3\right) \ge -1, \quad \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3 \ge 0
\end{gathered} \tag{5.17}$$

Параметр δ_1 не входит в эти условия, в то время как на плоскости параметров $\Delta = R^2\,(\delta_2, \delta_3)$ условия (5.17) выполняются в области $\mathcal{N}_-$, изображенной слева на рис. 1.

Граница области $\mathcal{N}_-$ представима в виде $\partial\mathcal{N}_- = \partial\mathcal{N}^1 \cup \partial\mathcal{N}_-^2 \cup \partial\mathcal{N}_-^3$. В этой области произведение $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ положительно и тройке $\left(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2\right)$ отвечают четыре решения $(\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)$, $(-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$, $(-\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Аналогично для решения $\mathcal{I}\mathcal{I}_+$ правые части соотношений (5.16) неотрицательны, если параметры δ_k, $k = 1,2,3$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}
\left(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3\right)\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right) \le 2, \quad \delta_2 \ge 0 \\
\delta_3\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right) \le 1, \quad \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 \le 0 \\
\delta_3\left(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3\right) \ge -1, \quad \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3 \le 0
\end{gathered} \tag{5.18}$$

На том же рис. 1 область $\mathcal{N}_+$ изображена справа. Граница области $\mathcal{N}_+$ представима в виде $\partial\mathcal{N}_+ = \partial\mathcal{N}^1 \cup \partial\mathcal{N}_+^2 \cup \partial\mathcal{N}_+^3$. В этой области $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 0$ и тройке $\left(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2\right)$ отвечают четыре решения $(-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3)$, $(\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$, $(-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)$.

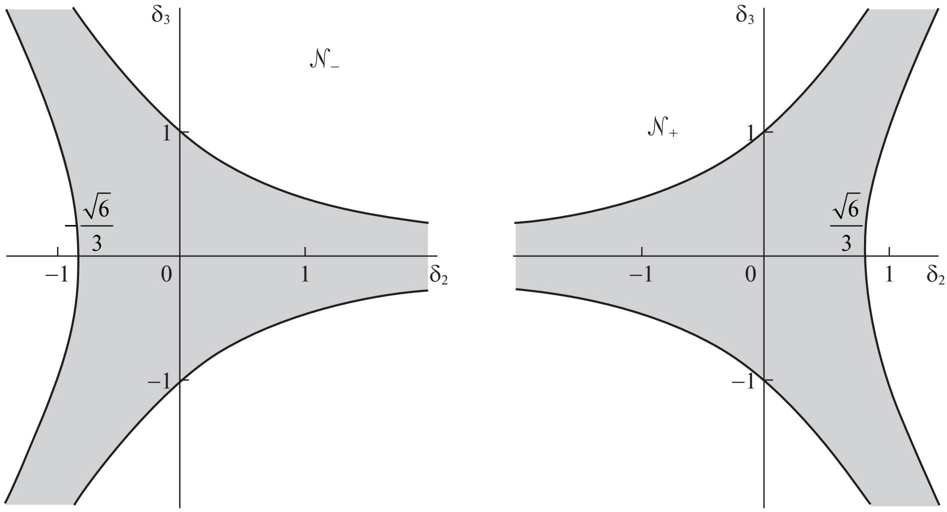

Рис. 1.

Замечание. Отметим, что границы области (5.17) переходят друг в друга при повороте на 120° около точки (0, 0). Это же верно и для границ области (5.18). Сами же области (5.17) и (5.18) переходят друг в друга при отражении координат относительно оси $\delta_2 = 0$.

6. Устойчивость равновесий. Для исследования достаточных условий устойчивости равновесий, следуя методу Рауса ([15, 16], см. также [17]), выпишем функцию

$$W = \sqrt{3}\delta_1 U' + \frac{\lambda}{2}\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1\right) \tag{6.1}$$

и исследуем знакоопределенность ограничения ее второй вариации

$$2\delta^2 W = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2}\delta\gamma, \delta\gamma\right); \quad \delta\gamma = (\delta\gamma_1, \delta\gamma_2, \delta\gamma_3)^T \tag{6.2}$$

на линейное многообразие

$$\gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3 = 0 \tag{6.3}$$

Неопределенный множитель Лагранжа λ в общем случае имеет вид

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2\right)\gamma_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3\right)\gamma_2^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3\right)\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

Вторые производные

$$W_{ij} = W_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_i \partial\gamma_j}$$

имеют вид

$$W_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2\right) + \lambda, \quad W_{22} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3\right) + \lambda$$

$$W_{33} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3\right) + \lambda$$
$$W_{12} = \gamma_3 \quad (1,2,3)$$

6.1. Тривиальные решения. Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесий $\mathcal{I}_{\mathbf{k}}$ из (5.5).

На равновесии $\mathcal{I}_1$ неопределенный множитель $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2\right)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_1 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W\Big|_{\mathcal{I}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3\right)\delta\gamma_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right)\delta\gamma_3^2 \pm 2\delta\gamma_2\delta\gamma_3 \tag{6.4}$$

Если $\delta_2 > 0$ и $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 > 0$, то квадратичная форма (5.4) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие $\mathcal{I}_1$ устойчиво. Если $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 < 0$, то квадратичная форма (6.4) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $\delta_2 < 0$ и $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 > 0$, то квадратичная форма (6.4) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие $\mathcal{I}_1$ неустойчиво.

На равновесии $\mathcal{I}_2$ неопределенный множитель $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{6}\,(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_2 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W\Big|_{\mathcal{I}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right)\delta\gamma_1^2 + \sqrt{2}\delta_3\delta\gamma_3^2 \pm 2\delta\gamma_1\delta\gamma_3 \tag{6.5}$$

Если $-\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 > 0$ и $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.5) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие $\mathcal{I}_2$ устойчиво. Если $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 < 1$, то квадратичная форма (5.5) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $-\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 < 0$ и $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.5) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие $\mathcal{I}_2$ неустойчиво.

На равновесии $\mathcal{I}_3$ неопределенный множитель $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_3 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W\Big|_{\mathcal{I}_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3\right)\delta\gamma_1^2 - \sqrt{2}\delta_3\delta\gamma_2^2 \pm 2\delta\gamma_1\delta\gamma_2 \tag{6.6}$$

Если $\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 < 0$ и $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.6) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие $\mathcal{I}_3$ устойчиво. Если $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 < 1$, то квадратичная форма (6.6) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 > 0$ и $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.6) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие $\mathcal{I}_3$ неустойчиво.

Замечание. Имеет место следующая связь между устойчивостью решений и порядком в неравенстве на моменты инерции тела. Если решение устойчиво, то момент инерции, соответствующий оси $O\gamma_i$ является наименьшим — или в терминах бимедиан — бимедиана a_i — наибольшая. Если решение неустойчиво со степенью неустойчи-

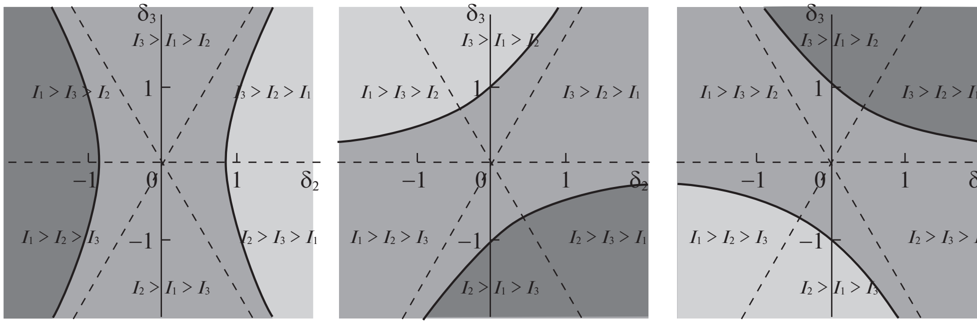

Рис. 2.

вости $\chi = 2$, то соответствующий момент инерции наибольший, и соответствующая бимедиана наименьшая. Обратное неверно, см. рис. 2, где плоскость $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ с областями различных свойств устойчивости решения $\mathcal{I}_1$ приведена слева; для решения $\mathcal{I}_2$ аналогичная плоскость приведена по центру; для решения $\mathcal{I}_3$ – справа. Белым цветом изображены области, соответствующие устойчивому решению, светло-серым – неустойчивому решению со степенью неустойчивости $\chi = 1$ и серым – неустойчивому решению со степенью неустойчивости $\chi = 2$. Пунктирные линии разделяют области с различным порядком моментов инерции I_k, $k = 1, 2, 3$.

Замечание. Отметим, что решения $\mathcal{I}\mathcal{I}_-$ и $\mathcal{I}\mathcal{I}_+$ существуют одновременно лишь для тех значений параметров, при которых все три решения $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, 3$, неустойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 1$.

6.2. Общий случай. В общем случае изучения достаточных условий устойчивости во избежание громоздкости воспользуемся восходящим к Вейерштрассу подходом, опирающимся на рассмотрение окаймленной матрицы (ср. [21–26])

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 W}{\partial\lambda\partial\gamma} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial\gamma\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial\gamma^2} \end{pmatrix}$$

Коэффициенты Пуанкаре σ_1 и σ_2, определяющие знакоопределенность ограничения второй вариации (6.2) функции Рауса (6.1) на линейное многообразие (6.3), находятся из уравнения

$$P_2(\sigma) = 0, \tag{6.7}$$

где

$$P_2(\sigma) = -\det\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & W_{11} - \sigma & W_{12} & W_{13} \\ \gamma_2 & W_{21} & W_{22} - \sigma & W_{23} \\ \gamma_3 & W_{31} & W_{32} & W_{33} - \sigma \end{pmatrix} = \sigma^2 + p_1\sigma + p_0$$

Выражения для $p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3)$ и $p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3)$ весьма громоздки и здесь не приводятся.

Оба корня многочлена (6.7) вещественны. При этом, если $p_0 > 0$, $p_1 < 0$, то эти корни положительны, степень неустойчивости равна нулю, и равновесие устойчиво по Ляпунову. Если $p_0 < 0$, то эти корни имеют разные знаки, степень неустойчивости равна единице, и равновесие неустойчиво. Наконец, если $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, то эти корни отрицательны, степень неустойчивости равна двум, и равновесие неустойчиво.

Для решения $\mathcal{I}\mathcal{I}_-$ коэффициенты многочлена $P_2(\sigma)$ имеют вид

$$p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3) = \frac{2}{3}\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \cdot \left(\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) - \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}\right)$$

$$p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) - \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 4\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}\right)$$

Покажем, что неравенство $p_0 > 0$ выполнено в области $\mathcal{N}_-$. Выражение в скобках, определяющее знак p_0, положительно тогда и только тогда, когда выполнена совокупность трех систем:

$$\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) - \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) \ge 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \end{cases} \\ 2.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) < 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \\ \left(1 - \delta_2^2 - \delta_3^2\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > \delta_2\left(3\delta_3^2 - \delta_2^2\right) \end{cases} \\ 3.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) \ge 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 \ge 0 \\ \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) > \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \end{cases} \end{array}\right.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ системы 1, 2, 3 выделяют области, изображенные на рис. 3 слева. Решениям первой системы отвечают светло-серые области, второй системы – серые и третьей системы – темно-серые области. Таким образом, совокупность систем выполнена для любых (δ_2, δ_3) из внутренних точек области $\mathcal{N}_-$. На границе области коэффициент p_0 обращается в нуль.

Для определения знака коэффициента p_1 заметим, что

$$p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{4}\,\frac{p_0(\delta_2, \delta_3) + 2\left(\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\right)}{\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}}$$

Из этого представления понятно, что $p_1(\delta_2, \delta_3) > 0$ для любых (δ_2, δ_3) из области $\mathcal{N}_-$.

Итак, внутри области $\mathcal{N}_-$ оба коэффициента p_0 и p_1 положительны, следовательно решение $\mathcal{I}\mathcal{I}_-$ при этих значениях параметров (δ_2, δ_3) неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 2$. Для граничных точек области $\mathcal{N}_-$ требуется дополнительное исследование устойчивости.

Для решения $\mathcal{I}\mathcal{I}_+$ коэффициенты многочлена $P_2(\sigma)$ имеют вид

$$p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3) = -\frac{2}{3}\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}\left(\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) + \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}\right)$$

$$p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) + \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 4\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}\right)$$

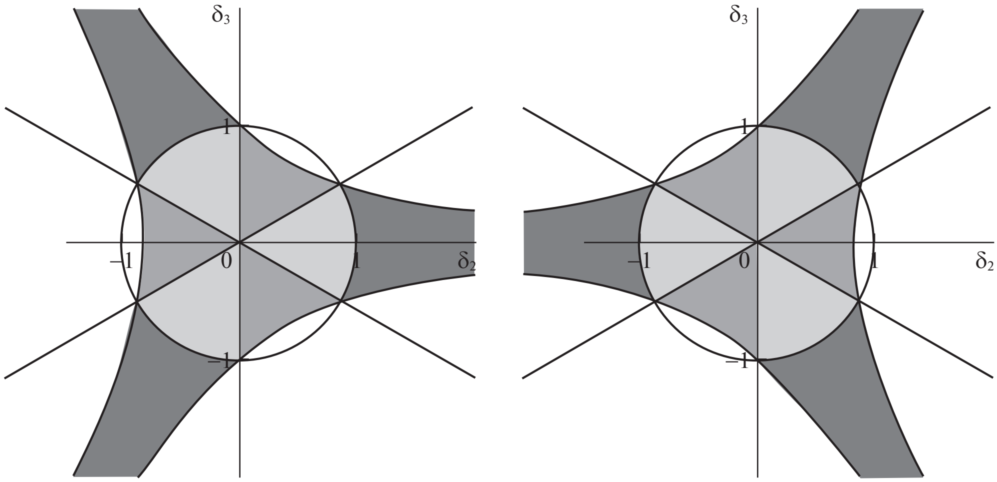

Рис. 3.

Покажем, что неравенство $p_0 > 0$ выполнено в области $\mathcal{N}_+$. Выражение в скобках, определяющее знак p_0, положительно, тогда и только тогда когда выполнена совокупность трех систем:

$$\delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) + \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) \le 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \end{cases} \\ 2.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) > 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \\ \left(1 - \delta_2^2 - \delta_3^2\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > \delta_2\left(3\delta_3^2 - \delta_2^2\right) \end{cases} \\ 3.\ \begin{cases} \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) \le 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 \ge 0 \\ \delta_2\left(\delta_2^2 - 3\delta_3^2\right) > \left(\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1\right)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \end{cases} \end{array}\right.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ системы 1, 2, 3 выделяют области, проиллюстрированные на рис. 3 справа. Решениям первой системы отвечают светло-серые области, второй системы – серые и третьей системы – темно-серые области. Таким образом, совокупность систем выполнена для любых (δ_2, δ_3) из внутренних точек области $\mathcal{N}_+$. На границе области коэффициент p_0 обращается в нуль.

Для определения знака коэффициента p_1 заметим, что

$$p_1(\delta_2, \delta_3) = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,\frac{p_0(\delta_2, \delta_3) + 2\left(\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2\right)}{\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}}$$

Из этого представления понятно, что $p_1(\delta_2, \delta_3) < 0$ для любых (δ_2, δ_3) из области $\mathcal{N}_+$.

Итак, внутри области $\mathcal{N}_+$ коэффициент p_0 положительный, а p_1 – отрицательный, следовательно решение $\mathcal{I}\mathcal{I}_+$ устойчиво при этих значениях параметров (δ_2, δ_3), степень неустойчивости $\chi = 0$. Для граничных точек области $\mathcal{N}_+$ требуется дополнительное исследование устойчивости.

Замечание. Общие методы, касающиеся распределения свойств устойчивости вдоль ветвей стационарного движения, а также устойчивости стационарных движений, отвечающих точкам бифуркации, разработаны в [27, 28].

Замечание. Задача о существовании равновесий и перманентных вращений решается единообразно. Этого нельзя сказать о задаче устойчивости, которая сводится к анализу второй вариации приведенного потенциала (2.4), рассмотренного как функция на сфере (2.2). Исключение составляют перманентные вращения $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, 3$, вокруг бимедиан из (6.5). В этом случае согласно теории, развитой в [29], рассуждение из разд. 6.1 остаются справедливыми и для перманентных вращений. При этом коэффициенты b_k в условиях устойчивости определяются соотношениями (5.14).

7. О чувствительности равновесий к степени приближения гравитационного потенциала. К отысканию равновесий можно подходить, опираясь на введение новых переменных (ср. [30, 31]). Так если в качестве таких переменных использовать величины

$$g_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad g_2 = a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2, \quad g_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{7.1}$$

“обязанные” своим происхождением геометрическому интегралу и первым двум нетривиальным слагаемым в разложении потенциала, то сам потенциал примет вид

$$U_N = \varepsilon^2 u_N, \quad u_N = -\frac{3}{2}g_2 + \frac{15}{2}\varepsilon a_1 a_2 a_3 g_3 - \frac{35}{32}\varepsilon^2 u_4(g_1, g_2, g_3) + \ldots \tag{7.2}$$

Пусть

$$w = u_N + \lambda(g_1 - 1)$$

Тогда уравнения равновесий примут вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial g_1} = \lambda + \frac{\partial u_4}{\partial g_1} + \ldots = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial g_2} = -\frac{3}{2}\left(1 - 5\varepsilon^2\frac{\partial u_4}{\partial g_2} + \ldots\right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial g_3} = \frac{15}{2}\varepsilon a_1 a_2 a_3\left(1 - \frac{7}{48}\varepsilon\frac{\partial u_4}{\partial g_3} + \ldots\right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \lambda} = g_1 - 1 = 0 \end{gathered} \tag{7.3}$$

Эти уравнения несовместны при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$, так как при выполнении этого условия уравнение (7.3) решения не имеет. Таким образом, равновесия имеют место лишь там, где замена $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \to (g_1, g_2, g_3)$ вырождена, т.е. в тех точках, для которых якобиан

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \equiv 4\mathcal{J}'$$

равен нулю, т.е. выполнено условие.

$$\mathcal{J}' = \gamma_1^2\left(\gamma_3^2 - \gamma_2^2\right)a_1^2 + \gamma_2^2\left(\gamma_1^2 - \gamma_3^2\right)a_2^2 + \gamma_3^2\left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)a_3^2 = 0 \tag{7.4}$$

Нетрудно убедиться, что все найденные выше решения удовлетворяют равенству (7.4), определяющему поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3(\gamma)$.

Замечание. При доказательстве данного утверждения явный вид зависимости $u_4 = u_4(g_1, g_2, g_3)$ не понадобился.

Выводы. Для твердого тела в форме равногранного тетраэдра, подвешенного в центре масс, выполнен параметрический анализ существования и устойчивости равновесий в центральном ньютоновском поле сил. Таким образом, прояснены вопросы, касающиеся установленных ранее [1, 2] свойств равновесий правильного тетраэдра, для которого равногранный тетраэдр является естественным обобщением, наследующим некоторые из дискретных симметрий. В дальнейшем естественно ставить вопрос о свойствах относительных равновесий равногранных тетраэдров на круговой орбите и о свойствах точек либрации равномерно вращающихся равногранных тетраэдров.

Выполнение аналогичного анализа равновесий для тетраэдров общего вида, вероятно, потребует разработки иных подходов, не опирающихся на использованные в работе свойства симметрии равногранных тетраэдров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суликашвили Р.С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57–66.
2. *Суликашвили Р.С.* Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
3. *Burov A.A., Sulikashvili R.S.* On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. № 17. P. 8.
4. *Карапетян А.В., Нараленкова И.И.* О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 12–21.
5. *Нараленкова И.И.* О ветвлении и устойчивости положений равновесия твердого тела в ньютоновском поле // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 53–60.
6. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.
7. *Абрарова Е.В.* Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 947–955.
8. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 14–18.
9. *Абрарова Е.В.* Об относительных равновесиях твердого тела в центральном поле // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1995. С. 3–28.
10. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 375–387.
11. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 594–609.
12. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. № 5. С. 738–744.
13. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* Dynamics of a Tetrahedral Satellite–Gyrostat // AIP Conf. Proc. 2010. V. 1281. P. 465.
14. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
15. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Univ. Press, 1877. 108 p.
16. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
17. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
18. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. “Библиотечка Квант”, Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.

19. *Vashkoviak M.A.* On the stability of circular 'asteroid' orbits in an N-planetary system // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 3. P. 313–324.
20. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Установившиеся движения симметричного равногранного тетраэдра в центральном поле сил // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 152–164.
21. *Hancock H.* Lectures on the Theory of Maxima and Minima of Functions of several Variables (Weierstrass Theory), McMicken Hall, Univ. Cincinnati, 1903.
22. *Mann H.B.* Quadratic forms with linear constraints // Am. Math. Monthly. 1943. V. 50. № 7. P. 430–433.
23. *Шостак Р.Я.* О признаке условной определенности квадратичной формы *n* переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функций *n* переменных // УМН. 1954. Т. 9 (60). № 2. С. 199–206.
24. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
25. *Степанов С.Я.* Симметризация критериев знакоопределенности симметричных квадратичных форм // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 979–987.
26. *Буров А.А.* О необходимых условиях устойчивости установившихся движений систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // ПММ. 2004. Т. 68. № 5. С. 870–877.
27. *Возлинский В.И.* О связи бифуркаций равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 418–427.
28. *Возлинский В.И.* Об устойчивости точек ветвления равновесий // ПММ. 1978. Т. 42. С. 259–267.
29. *Карапетян А.В., Степанов С.Я.* О стационарных движениях и относительных равновесиях механических систем с симметрией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 736–743.
30. *Burov A.A., Nikonov V. I.,* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // Russ. J. Nonlin. Dyn. 2016. V. 12. № 2. P. 179–196.
31. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Вращение равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил: конус Штауде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 5. С. 40–46.

On Stationary Motions of an Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Field of Forces

E. A. Nikonova[a,#]

[a] *FRC CSC RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

The existence, stability, and branching of steady motions of an isosceles tetrahedron (disphenoid) with a fixed point in the Central Newtonian field of forces are studied. The relation of stationary motions properties with the properties of stationary motions of a regular tetrahedron, the natural geometric generalization of which is an isosceles tetrahedron, is considered.

Keywords: rigid body with a fixed point body in a Central gravitational field, Routh theory, stability and branching of steady motions, isosceles tetrahedron

REFERENCES

1. *Sulikashvili R.S.* Stationary motions of tetrahedron and octahedron in the central gravitational field // in: Problems of Stability and Motion Stabilization. Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1987, pp. 57–66. (in Russian)
2. *Sulikashvili R.S.* On the stationary motions in a Newtonian field of force of a body that admits of regular polyhedron symmetry groups // JAMM, 1989, vol. 53, no. 4, pp. 452–456. https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90051-8

3. *Burov A.A., Sulikashvili R.S.* On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993, no. 17, pp. 8.
4. *Karapetyan A.V., Naralenkova I.I.* The bifurcation of the equilibria of mechanical systems with symmetrical potential // JAMM, 1998, vol. 62, no. 1, pp. 9–17. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00021-5
5. *Naralenkova I.I.* On the branching and stability of equilibrium positions of a rigid body in a Newtonian field // in: Problems of Stability and Motion Stabilization. Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1995. pp. 53–60. (in Russian)
6. *Abrarova Ye.V., Karapetyan A.V.* Steady motions of a rigid body in a central gravitational field // JAMM, 1994, vol. 58, no. 5, pp. 825–830. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90007-8
7. *Abrarova Ye.V.* The stability of the steady motions of a rigid body in a central field // JAMM, 1995, vol. 59, no. 6, pp. 903–910. https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00123-9
8. *Burov A.A., Karapetyan A.V.* On the motion of cruciform bodies // Mech. of Solids, 1995, no. 6, pp. 14–18. (in Russian)
9. *Abrarova Ye.V.* On the relative equilibria of a rigid body in the central field // in: Problems of Stability and Motion Stabilization. Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1995, pp. 3–28. (in Russian)
10. *Abrarova Ye.V., Karapetyan A.V.* Bifurcation and stability of the steady motions and relative equilibria of a rigid body in a central gravitational field // JAMM, 1996, vol. 60, no. 3, pp. 369–380. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00047-0
11. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* The orbital motion of a tetrahedral gyrostat // JAMM, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 425–435. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.008
12. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* The steady motions of gyrostats with equal moments of inertia in a central force field // JAMM, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 517–521. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.11.005
13. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* Dynamics of a tetrahedral satellite–gyrostat // AIP Conf. Proc., 2010, vol. 1281, pp. 465–468. https://doi.org/10.1063/1.3498509
14. *Rubanovskii V.N., Samsonov V.A.* The Stability of Steady Motions in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian)
15. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Univ. Press, 1877. 108 p.
16. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
17. *Karapetyan A.V.* Stability of Stationary Motions. Moscow: URSS, 1998. 168 p. (in Russian)
18. *Sharygin I.F.* Geometry problems. Stereometry // The Quantum Library. Iss. 31. Moscow: Nauka, 1984. 160 p. (in Russian)
19. *Vashkoviak M.A.* On the stability of circular 'asteroid' orbits in an N-planetary system // Celest. Mech., 1976, vol. 13, no. 3, pp. 313–324. https://doi.org/10.1007/BF01228649
20. *Burov A.A., Nikonova E.A.* Steady motions of a symmetric isosceles tetrahedron in a central force field // Mech. of Solids, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 737–747. http://doi.org/10.3103/S0025654421050071
21. *Hancock H.* Lectures on the Theory of Maxima and Minima of Functions of several Variables (Weierstrass Theory), McMicken Hall, Univ. Cincinnati, 1903. 114 p.
22. *Mann H.B.* Quadratic forms with linear constraints // Am. Math. Monthly, 1943, vol. 50, no. 7, pp. 430–433. https://doi.org/10.1080/00029890.1943.11991413
23. *Shostak R.Ya.* On a criterion of conditional definiteness of a quadratic form of variables, subject to linear relations, and on a sufficient condition for a conditional extremum of a function of variables // Uspekhi Mat. Nauk, 1954, vol. 9, no. 2 (60), pp. 199–206.
24. *Rubanovskii V.N., Stepanov S.Ia.* On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the liapunov function from the integrals of the equations of motion // JAMM, 1969, vol. 33, no 5,

pp. 882–890.
https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90096-3
25. *Stepanov S.Ya.* Symmetrization of the sign-definiteness criteria of symmetrical quadratic forms // JAMM, 2002, vol. 66, no. 6, pp. 933–941. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00135-1
26. *Burov A.A.* The necessary conditions for the stability of steady motions of systems with constraints produced by large potential forces // JAMM, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 777–784.
http://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.013
27. *Vozlinskii V.I.* On the relations between the bifurcation of the equilibria of conservative systems and the stability distribution on the equilibria curve // JAMM, 1967, vol. 31, no. 2, pp. 418–427.
https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90171-2
28. *Vozlinskii V.I.* On the stability of points of equilibrium branching // JAMM, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 270–279.
https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90143-0
29. *Karapetyan A.V., Stepanov S.Ya.* Steady motions and relative equilibria of mechanical systems with symmetry // JAMM, 1996, vol. 60, no. 5, pp. 729–735.
https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00092-5
30. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 179–196.
https://doi.org/10.20537/nd1602002
31. *Burov A.A., Nikonova E.A.* Rotation of isosceles tetrahedron in central newtonian force field: Staude cone // Moscow Univ. Mech. Bull., 2021, vol. 76, no. 4, pp. 123–129.
http://doi.org/10.3103/S0027133021050034