

УДК 539.4.011:678

**ВАРИАНТЫ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ
ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ПО УСЛОВИЮ РАЗРУШЕНИЯ
СВЯЗУЮЩЕГО ПРИ НАЛИЧИИ СЖАТИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВОЛОКНАМ**© 2022 г. А. И. Олейников^{1,2,*,**}¹ *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия*² *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия***e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru****e-mail: a.i.oleinikov@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.

После доработки 09.11.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

При анализе прочности конструкций из слоистых волокнистых полимерных композиционных материалов используются критерии разрушения монослоя — однонаправленно армированного композита. В однонаправленном композите площадка скалывания матрицы составляет с плоскостью волокон двугранный угол, который возрастает с увеличением отношения поперечных сжимающих и сдвиговых напряжений. Этот вид разрушения связующего наиболее опасен и приводит к полному разрушению структуры композита. Формулируются линейный и квадратичный варианты критерия прочности по условию прочности связующего, учитывающих влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу, соответствующее асимметричному закону трения. Выводится формула, определяющая угол наклона площадки возможного разрушения. Рассматриваются виды установочных испытаний и осуществляется экспериментальная проверка предложенных критериев.

Ключевые слова: однонаправленный композит, полимерная матрица, прочность, разрушение связующего, анизотропное трение

DOI: 10.31857/S0032823522020102

1. Введение. Расчеты конструкций из слоистых композитов обычно проводятся по критериям прочности их одномерно армированных волокнистых монослоев. К настоящему времени предложено довольно много таких критериев. Однако задача построения новых и совершенствования существующих критериев остается по-прежнему актуальной. Коэффициент запаса прочности, учитывающий неточность применяемых критериев, для многих несущих конструкций все еще назначается очень большим. Поэтому могут продолжаться попытки построения новых, а также модификации и специализации существующих критериев. Настоящая работа также посвящена исследованию и построению вариантов одного критерия прочности монослоя по условию разрушения связующего при наличии сжатия нормально волокнам [1]. Нагрузки с таким сжатием, например, могут испытывать в полете монослои композитных панелей обшивки планера самолета [2]. Компонентами этого вида нагрузки наряду с поперечным сжатием могут являться сдвиг в плоскости волокон и растяжение или сжатие вдоль волокон. Соотношения данных компонент в различных участках панели различно. Однородное напряженное состояние с фиксированным соотношением компонент с высокой точностью реализуется, например, в экспериментах по осевому

сжатия с кручением и внутренним или внешним давлением композитных трубчатых образцов, намотанными послойно по окружности [3, 4]. В принципе такие состояния можно получать и в плоских крестообразных образцах, вырезанных из однонаправленного листа.

Обзор работ по теориям прочности композитов приведены, например, в [5, 6]. Здесь кратко отметим только два подхода к построению наиболее известных критериев. Их общий вид таков:

$$f(\sigma_{ij}, k_l) = 1 \quad (1.1)$$

Функция f определяет некоторое соотношение между компонентами σ_{ij} тензора напряжений, k_l – постоянные композита.

Первый подход основывается на общих тензорных и инвариантно-полиномиальных формулировках функции f . Они широко используются при образовании критериев прочности анизотропных материалов (композитов), например, в [7–11]. Предполагается, что искомый критерий является инвариантным относительно группы ортогональных преобразований, соответствующих классу симметрии структуры материала. Достоинства и недостатки этого подхода отмечались в [12–14]. Нарушение таких условий прочности означает либо разрушение (обрыв, локальное выпучивание) в основном волокон, либо разрушение (скол, расщепление) в основной матрицы, однако без явного указания какой именно из этих видов (мод, механизмов) разрушения в основном произошел [7, 8, 10]. При расчетах конструкций из слоистых композитов идентификация механизма разрушения монослоя необходима. Считается, что первый механизм приводит к полной потере несущей способности слоя, а второй – только лишь к изменению некоторых его характеристик упругости. Хотя эти механизмы и можно условно отделить по доминирующим слагаемым в выражениях данных критериев [15], тем не менее, начиная с работы [9] критерии прочности по механизмам разрушения волокон и связующего, как правило, формулируются отдельно [11]. Разложение критерия по этим механизмам основывалось на рассмотрении проекций напряжений на плоскости перпендикулярные и параллельные волокнам [9]. Кроме того, каждый из полученных таким образом критериев еще подразделялся на два случая наличия растягивающих или сжимающих нормальных напряжений на данных плоскостях [9].

Если не связывать построение критерия с симметрично-инвариантными ограничениями, то эти два вида критериев можно сразу отдельно формулировать на соответствующих площадках. В этом состоит второй подход, которого мы здесь придерживаемся. Тогда в соотношении (1.1) функция $f \equiv f(\tau_n, \sigma_n, k_l)$, где соответственно τ_n и σ_n касательное и нормальное напряжения на площадке с нормалью n . При плоском напряженном состоянии композита критериальная функция f по механизму разрушения связующего применялась в форме квадратичной зависимости между τ_n и σ_n [16, 17]. Ориентация этой площадки полагалась одной и той же для всех напряженных состояний. Ее положение было зафиксировано перпендикулярно плоскости волокон в их направлении, так что $\tau_n \equiv \tau_{nl}$ – касательное напряжение вдоль волокон. В некоторых случаях вполне удовлетворительные результаты получались при линейной функции f на той же площадке [18]. Однако, с изменением напряжений ориентация данной площадки n может изменяться. Для каждого напряженного состояния ее положение соответствует максимуму функции $f(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, k_l)$, где τ_{nt} – касательное напряжение поперек волокон [9]. Эта площадка составляет с плоскостью волокон некоторый двугранный угол $\pi/2 - \alpha$, ребро которого параллельно направлению волокон [1, 9, 19]. На данной площадке критерии прочности по механизму разрушения связующего при наличии сжатия перпендикулярно направлению волокон предлагались в виде [1]:

$$f_1(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \left(\frac{\tau_{nt}}{S_t - \eta_t \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{S_l - \eta_l \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad (1.2)$$

$$f_2(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \frac{\tau_{nt}^2}{S_t^2 - 2\eta_t S_t \sigma_n} + \frac{\tau_{nl}^2}{S_l^2 - 2\eta_l S_l \sigma_n} = 1, \quad (1.3)$$

а также в форме [19]

$$f_3(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \left(\frac{\langle |\tau_{nt}| + \eta_t \sigma_n \rangle}{S_t} \right)^2 + \left(\frac{\langle |\tau_{nl}| + \eta_l \sigma_n \rangle}{S_l} \right)^2 = 1 \quad (1.4)$$

Очевидно, что (1.3) следует из (1.2), если допустить, что $\eta_t^2 \sigma_n^2 = 0$ и $\eta_l^2 \sigma_n^2 = 0$ [1]. В (1.2)–(1.4) приняты следующие обозначения: S_t и S_l – сопротивление сдвигу матрицы при действии соответственно напряжения τ_{nt} или τ_{nl} , η_t и η_l – угловые коэффициенты касательных к предельным кривым $\sigma_n - \tau_{nt}$ и $\sigma_n - \tau_{nl}$ в точке $\sigma_n = 0$, соответственно; угловая скобка в (1.4) означает, что для любого x , $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$.

Согласно аналогии, между сопротивлением сдвигу и предельной силой трения (покоя) выражения (1.2)–(1.4) учитывают на площадке n влияние нормального напряжения сжатия на сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному закону трения [20, 21]. Критические замечания по критериям (1.2), (1.3) приводились в [11].

Ключевым элементом в применении (1.2)–(1.4) для данного напряженного состояния τ_{nt} , τ_{nl} , σ_n на площадке n является решение задачи об определении угла $\alpha = \alpha_*$, доставляющего максимум функции $f \equiv f(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, k_l)$ [9]. К настоящему времени точное решение найдено только для (1.3) [1]. Для исходного общего критерия (1.2) точное решение еще не получено. Это сдерживает возможно более широкое его приложение.

В природных волокнистых композитах наблюдаются асимметричные законы внутреннего трения, при котором сопротивление сдвигу зависит от сочетания знаков касательных напряжений вдоль и поперек волокон [21]. Применительно к таким материалам необходимо иметь, например, обобщение (1.2) на случай влияния нормального напряжения сжатия на сопротивление сдвигу, соответствующее асимметричному закону трения. Такое обобщение также еще не построено.

Квадратичные условия прочности композитов наиболее широко употребительные. Тем не менее их линейная аппроксимация в некоторых случаях может давать вполне удовлетворительные результаты [18]. Кроме того, линейное условие может быть использовано при кусочно-линейном приближении нелинейных критериев и эффективно при решении обратных задач по определению характеристик монослоев из свойств пакета [22]. Линейный аналог данных условий прочности к настоящему времени также не сформулирован.

В качестве параметров в критерии (1.2)–(1.4) входят угловые коэффициенты η_t и η_l касательных к соответствующим предельным кривым. Эти кривые вообще являются искомыми и для новых композитов или технологий заранее неизвестны. Для их определения нужен некоторый массив опытных данных в окрестности чистого продольного сдвига. Поэтому также актуальным является вопрос определения параметров данных критериев по результатам стандартных испытаний.

Целью настоящей работы является, применительно к случаю наличия поперечного сжатия:

- формулировка линейного и квадратичного вариантов общего условия прочности (1.2), учитывающих влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу на площадке n , соответствующее ортотропному асимметричному закону трения;

- вывод уравнения для определения ориентации площадки n , на которой реализуется максимум линейного критерия;
- вывод формулы для определения угла наклона площадки n , соответствующего максимуму квадратичного критерия;
- определение видов установочных испытаний для нахождения параметров данных критериев прочности;
- экспериментальная проверка предложенных критериев при двухкомпонентном нагружении комбинациями поперечного сжатия и продольного сдвига.

2. Линейное и квадратичное условия прочности. Линейный F_1 и квадратичный F_2 критерии прочности по условию разрушения связующего, которые учитывают влияние нормального напряжения сжатия на предельное сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному асимметричному закону трения на площадке n , записываются соответственно в виде:

$$F_1(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, Y_t, Y_l, m_t, m_l) \equiv \left| \frac{m_t \tau_{nt}}{Y_t - \sigma_n} \right| + \left| \frac{m_l \tau_{nl}}{Y_l - \sigma_n} \right| - 1 = 0 \quad (2.1)$$

$$F_2(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, Y_t, Y_l, m_t, m_l) \equiv \left(\frac{m_t \tau_{nt}}{Y_t - \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{m_l \tau_{nl}}{Y_l - \sigma_n} \right)^2 - 1 = 0, \quad (2.2)$$

где величина постоянных m_t , m_l в зависимости от знаков касательных напряжений вдоль τ_{nl} и поперек τ_{nt} волокон может быть различной [21]:

$$(m_t, m_l) = \begin{cases} (m_t^+, m_l^+) & \text{при } \tau_{nt} \geq 0, \quad \tau_{nl} \geq 0 \\ (m_t^-, m_l^+) & \text{при } \tau_{nt} < 0, \quad \tau_{nl} \geq 0 \\ (m_t^-, m_l^-) & \text{при } \tau_{nt} < 0, \quad \tau_{nl} < 0 \\ (m_t^+, m_l^-) & \text{при } \tau_{nt} \geq 0, \quad \tau_{nl} < 0 \end{cases}$$

На плоскости (τ_{nl}, τ_{nt}) критерий (2.2) является выпуклой замкнутой гладкой кривой, составленной из дуг четырех эллипсов с общим центром и различными полуосями, как показано на схеме рис. 1а (сплошная линия). Полуоси четвертой соответствующих эллипсов в вершинах смежных дуг одинаковы,

$$OA = -\left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_t^-} \right|, \quad OB = \left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_t^+} \right|, \quad OC = \left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_l^+} \right|, \quad OD = -\left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_l^-} \right|$$

Симметричный изотропный случай $m_t^+ = m_t^- = m_l^+ = m_l^- = m_t$, $Y_l = Y_t$ критерия (2.2) на рис. 1а представляется окружностью (пунктирная линия). Симметричные ортотропные случаи $m_t^+ = m_t^-$, $m_l^+ = m_l^-$ критериев (2.2) и (2.1) являются соответственно эллипсом и вписанным в этот эллипс ромбом (рис. 1б). В последнем случае (2.2) совпадает с критерием (1.2) после переопределения констант $m_t = 1/\eta_t$, $m_l = 1/\eta_l$, $Y_t = S_t/\eta_t$, $Y_l = S_l/\eta_l$.

При плоском напряженном состоянии в системе координат x_1, x_2, x_3 напряжения на площадке n , наклоненной к оси x_3 под углом α , (оси x_1, x_2 лежат в плоскости волокон в направлении армирования и перпендикулярно ему, соответственно; ось x_3 — перпендикулярна плоскости волокон) записываются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{nl} &= \sigma_{12} \cos \alpha \cos 0 = \sigma_{12} \cos \alpha \\ \sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

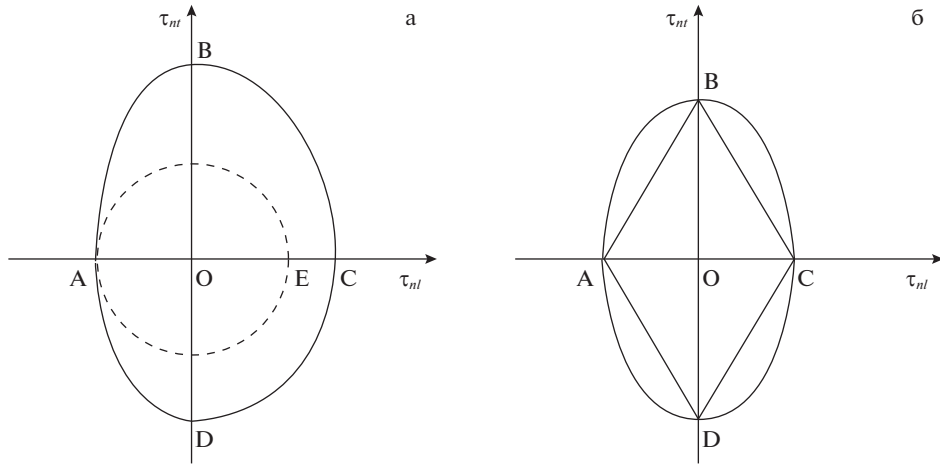


Рис. 1.

В данной системе координат единичная нормаль к площадке $n = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$. Относительно плоскости x_1, x_2 площадка n повернута вокруг оси параллельной x_1 , поэтому в средней формуле (2.3) содержится только косинус в первой степени.

Согласно (2.3) напряжение σ_{11} в направлении волокон не фигурирует в условиях (2.1), (2.2) и напрямую не взаимодействует с напряжениями τ_{nl} , τ_{nt} и σ_n на площадке n . Это известный недостаток всех критериев сформулированных на площадках параллельных направлению волокон [1, 16–19]. Заметим, что и в тензорно-инвариантных теориях критерии прочности по механизму разрушения матрицы также не содержат σ_{11} [9, 11]. Ошибка, связанная с пренебрежением вклада σ_{11} в напряжения в матрице обычно не слишком велика. Это обусловлено главным образом обычно очень большим превышением модуля упругости волокна над модулем упругости связующего. Кроме того, при наличии σ_{11} прежде данных критериев возможно нарушение условия прочности по механизму разрушения волокон. Это условие здесь не рассматривается.

Однако, по причине указанного превышения модуля упругости волокна и статистической природы его прочности в связующем происходит накопление микротрещин с ростом продольного напряжения. Такое увеличение трещиноватости связующего обусловлено концентрацией и сингулярностью для напряжений у рассеянных локальных разрушений волокон. Это растрескивание уменьшает эффективную площадь связующего, воспринимающую напряжения. Достаточно высокий уровень трещиноватости оказывает существенный разупрочняющий эффект. Его можно учитывать с помощью введения в критерий параметра разупрочнения q_w . За меру такой разупрочненности может быть принята просто относительная величина продольного напряжения $q_w = \sigma_{11}/S_{11}$ [1], где S_{11} – прочность композита при одноосном нагружении в направлении волокон. Согласно опытным данным существенное влияние этого разупрочнения наблюдается только при высоких продольных напряжениях $|\sigma_{11}| \geq 0.7|S_{11}|$ [1]. Далее здесь это разупрочнение не рассматривается.

Что касается определения угла α^* наклона площадки возможного разрушения, или кратко – угла разрушения, примем, что при α^* реализуется максимум функции

$F_2(\tau_{nl}, \tau_{nl}, \sigma_n)$ или $F_1(\tau_{nl}, \tau_{nl}, \sigma_n)$ для данных σ_{22}, σ_{12} . Согласно этому предположению и (2.3) угол α^* является решением системы

$$F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

Система (2.4) определяет также искомую поверхность прочности $f_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}) = 0$, которая является огибающей для α -семейства условий $F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$.

Известно множество волокнистых растительных материалов с асимметричным внутренним трением [21]. Для конструкционных композитов влияние асимметрии трения в сравнении с их анизотропией незначительно. Далее ограничимся рассмотрением симметричного анизотропного случая, когда m_i и m_l не изменяются при перемене знаков касательного напряжения,

$$m_t^+ = m_t^- = m_t, \quad m_l^+ = m_l^- = m_l \quad (2.5)$$

При выполнении равенств (2.5) критерии (2.2) и (2.1) на плоскости (τ_{nl}, τ_{nl}) представляют собой соответственно эллипс и вписанный в этот эллипс ромб (рис. 1б).

3. Линейный критерий. Обозначим выражения под знаком модуля в (2.1) через $T(\tau_{nl}, \sigma_n)$ и $L(\tau_{nl}, \sigma_n)$. При плоском напряженном состоянии

$$T(\sigma_{22}, \alpha) = \frac{-m_t \sigma_{22} \cos \alpha \sin \alpha}{Y_t - \sigma_{22} \cos^2 \alpha}, \quad L(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = \frac{m_l \sigma_{12} \cos \alpha}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \quad (3.1)$$

и (2.1) записывается в виде

$$F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv |T(\sigma_{22}, \alpha)| + |L(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha)| - 1 = 0 \quad (3.2)$$

Используя (3.1) из (3.2) получаем, согласно (2.4), уравнение для определения α^* :

$$\begin{aligned} & \frac{m_t \sigma_{22} \cos(2\alpha)}{Y_t - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \operatorname{sgn} T + \frac{m_l \sigma_{12} \sin \alpha}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \operatorname{sgn} L + \\ & + \frac{\sigma_{22} \sin(2\alpha)}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \left(1 + |T| \frac{Y_l - Y_t}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $\sigma_{12} = 0$ из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} m_t &= -\operatorname{tg}(2\alpha_{\perp}^*) \operatorname{sgn} T^*, \quad Y_t = S_{22} \left(\cos^2 \alpha_{\perp}^* - \frac{1}{2} m_t \sin 2\alpha_{\perp}^* \right) \\ & \left(T^* = \frac{-m_t S_{22} \cos \alpha_{\perp}^* \sin \alpha_{\perp}^*}{Y_t - S_{22} \cos^2 \alpha_{\perp}^*} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где α_{\perp}^* , S_{22} – соответственно угол разрушения и прочность композита при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон.

Также из (3.2), (3.3) при $\sigma_{22} = 0$ получаем, что

$$\alpha_0^* = 0, \quad m_l = \frac{Y_l}{S_{12}} \operatorname{sgn} L_0, \quad \left(L_0 = \frac{m_l S_{12}}{Y_l} \right), \quad (3.5)$$

где α_0^* , S_{12} – соответственно угол разрушения и сопротивление сдвигу композита при продольном сдвиге.

Согласно [1], также здесь и везде далее принимаем, что

$$Y_l = Y_t = Y \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) выражение (3.2) для F_1 и уравнение (3.3) для определения угла α_* приобретают простой вид

$$F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv \sigma_{22}(\cos^2 \alpha - m_t \sin \alpha \cos \alpha) + m_t \sigma_{12} \cos \alpha - Y = 0 \quad (3.7)$$

$$\sigma_{22}(m_t \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + m_t \sigma_{12} \sin \alpha = 0, \quad (3.8)$$

где

$$m_t = -\operatorname{tg} 2\alpha_{\perp}^*, \quad m_t = \frac{Y}{S_{12}}, \quad Y = \frac{1}{2} S_{22}(1 + 1/\cos 2\alpha_{\perp}^*) \quad (3.9)$$

Критерий (3.7) в общем случае является физически нелинейным из-за зависимости от угла α . Линейный случай [18] следует из (3.7), (3.8) при $\alpha = 0$ и $m_t = 0$. Согласно (3.7)–(3.9) в число характеристических констант композита, кроме S_{22} и S_{12} , в общем случае входит также угол α_{\perp}^* .

В случае одинакового сопротивления сдвигу поперек и вдоль волокон $m_t = m_l$ из (3.9) следует, что угол α_{\perp}^* не является независимой характеристической константой материала. Он определяется отношением прочностей S_{22} и S_{12} ,

$$\alpha_{\perp}^* = -\operatorname{arctg} \frac{S_{22}}{2S_{12}} \quad (3.10)$$

Например, для углепластика при $S_{22} = -200$ МПа и $S_{12} = 83.1$ МПа получаем $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$.

4. Квадратичный критерий. При плоском напряженном состоянии с учетом (2.5) и (3.6) критерий (2.2) принимает вид

$$F_2(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv (m_t \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (m_l \sigma_{12} \cos \alpha)^2 - (Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha)^2 = 0, \quad (4.1)$$

где параметры m_t , m_l и Y точно также как и в линейном случае определяются по формулам (3.9).

Используя (4.1) из (2.4) получаем уравнение относительно искомого угла α^* ,

$$\left(\frac{-m_t \sigma_{22} \cos \alpha^* \sin \alpha^*}{Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha^*} \right)^2 \operatorname{ctg} \alpha^* - \left(\frac{2\sigma_{22} \cos \alpha^* \sin \alpha^*}{Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha^*} + \operatorname{tg} \alpha^* \right) = 0$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \arccos \left(\frac{Y^2}{\sigma_{22}^2 (1 + m_t^2)} \right)^{1/4} \quad (4.2)$$

С учетом выражения для Y и m_t в (3.9) и согласно (4.2) получаем простую формулу для нахождения угла α^* наклона площадки возможного разрушения,

$$\alpha^*(\sigma_{22}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*} \geq 1 \\ \arccos \sqrt{\frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*}} & \text{при } \frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*} < 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

При $\sigma_{22} = S_{22}$ формула (4.3) тождественно дает $\alpha^*(S_{22}) = \alpha_{\perp}^*$, что и следовало ожидать.

В случае $m_t = m_l$ угол α_{\perp}^* также как и для критерия (2.1) не является независимой характеристикой постоянной материала. Он определяется квадратом отношения прочностей S_{22} и S_{12} :

$$\alpha_{\perp}^* = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4S_{12}^2/S_{22}^2 - 1}{4S_{12}^2/S_{22}^2 + 1} \right) \quad (4.4)$$

При $S_{22} = -200$ МПа и $S_{12} = 83.1$ МПа согласно (4.4) также получаем $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$.

5. Установочные испытания. Приведем возможные виды экспериментов, определяющие все материальные параметры данных критериев.

Вначале рассмотрим более простой случай, когда в (2.1) и (2.2) коэффициенты перед касательными напряжениями вдоль и поперек волокон равны, $m_t = m_l$. При таком равенстве на плоскости (τ_{nl}, τ_{nt}) условие (2.1) является квадратом вписанным в окружность условия (2.2) (рис. 1).

Из соотношений (3.6), (3.9), (3.10) и (4.4) следует, что в этом случае все параметры предложенных критериев $m_t, m_l, Y_t, Y_l, \alpha_{\perp}^*$ могут быть определены по результатам всего двух стандартизованных испытаний образцов на разрушение. А именно, по прочности S_{22} при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон и прочности S_{12} при продольном сдвиге в плоскости волокон. После определения прочностей S_{22} и S_{12} все параметры данных критериев вычисляются по формулам (3.9), а также (3.10) или (4.4).

В общем случае, когда $m_t \neq m_l$, кроме прочностей S_{22} и S_{12} надо еще определить угол α_{\perp}^* скалывания композита по матрице при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон. Судя по литературе к настоящему времени отсутствует общепринятый стандарт на испытания по определению этого угла. По результатам экспериментов на разрушение призматических и трубчатых образцов стекло- и углепластиков получали узкий диапазон изменения значений этого угла, $\alpha_{\perp}^* = 53^\circ \pm 3^\circ$ [23–25]. К настоящему времени в расчетах общепринято использование значения α_{\perp}^* из данного диапазона [26]. Тогда по приведенным формулам (3.9) определяются все параметры данных критериев.

6. Экспериментальная проверка предложенных критериев. Пример расчета кривых прочности при поперечном сжатии в комбинации со сдвигом. Обычно в качестве экспериментальной проверки критериев прочности приводятся примеры их применения при одноосном нагружении под различными углами к волокнам. Такая проверка условий (1.3) и [18] для стеклопластика, углепластика и боропластика приведена в [15]. При этом расчетные кривые прочности для данных критериев и критериев, [8, 9, 16–18], различаются несущественно [15].

Для критериев (2.1), (2.2) показательным является двухкомпонентное нагружение комбинациями сжатия перпендикулярно направлению волокон и продольного сдвига в плоскости волокон.

В качестве примера приложения критериев (2.1) и (2.2) на рис. 2 приведены кривые прочности (более толстые линии) углепластика при нагружении его нормальными и сдвиговыми напряжениями рассчитанные согласно (3.7)–(3.9), (рис. 2а) и (4.1), (4.3) (рис. 2б) при $S_{22} = -200$ МПа, $S_{12} = 83.1$ МПа, $\alpha_{\perp}^* = 55^\circ$, соответствующих испытаниям на поперечное сжатие в комбинации со сдвигом [24].

Для α -семейств (более тонкие сплошные линии) прямых $F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$, $\alpha = \text{const}$ (рис. 2а) и α -семейств эллипсов $F_2(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$, $\alpha = \text{const}$ (рис. 2б), соответствующие этим критериям кривые прочности являются внутренними огибающими. На этих рисунках видно, что кривая прочности соответствует критическим напряжениям имеющих радиус-вектор наименьшей длины. Штрихпунктирными линиями

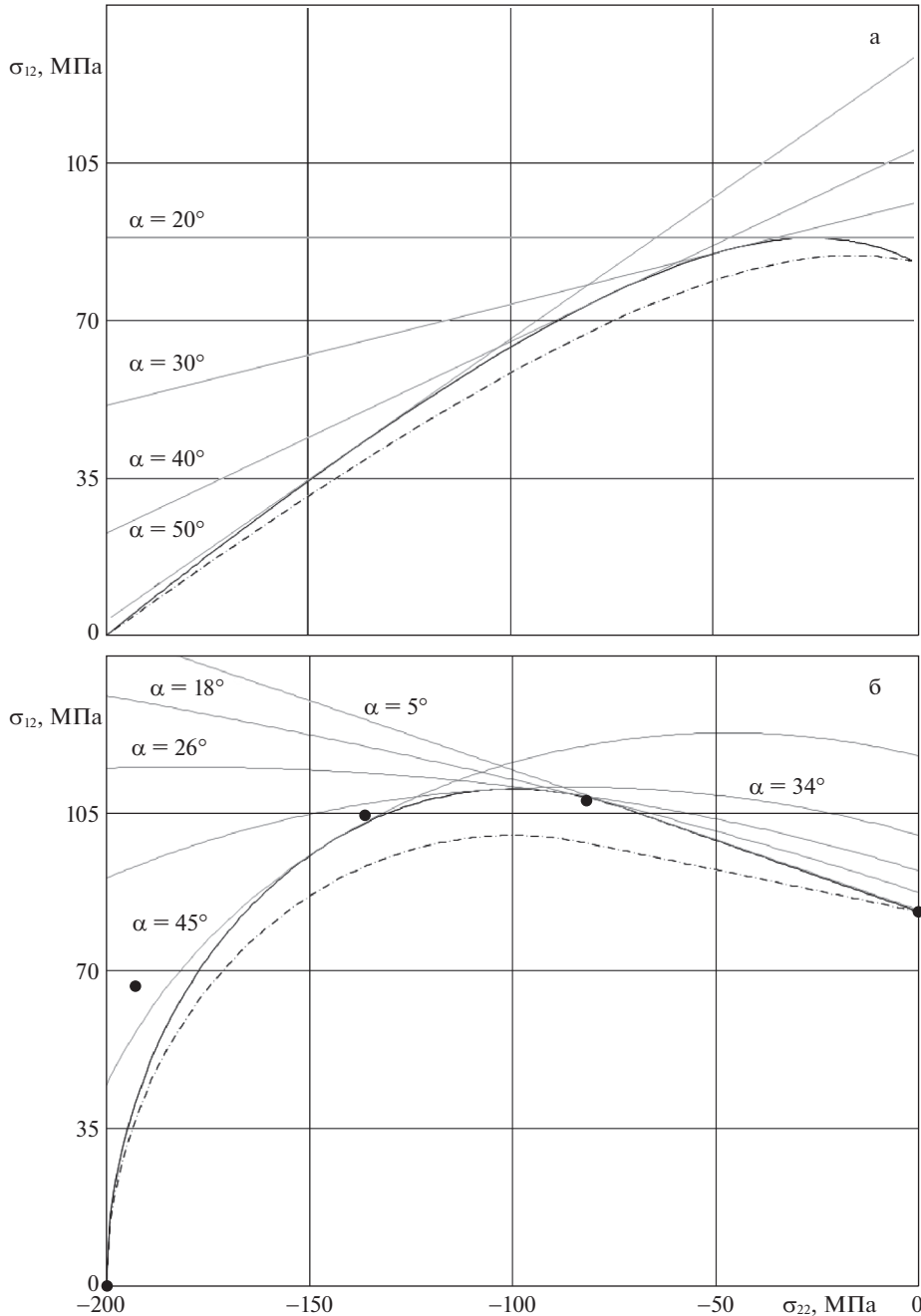


Рис. 2.

изображены кривые прочности для случая $m_t = m_l$ когда угол $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$ для линейного критерия по формуле (3.10) и для квадратичного критерия согласно формуле (4.4).

Влияние нелинейности обусловленной зависимостью от угла α критерия (2.1) видно на рис. 2а. Характерным является образование максимума сопротивления разруше-

нию при переходе от случая нагружения чисто сдвиговыми напряжениями к случаям нагружения комбинацией сдвиговых и нормальных напряжений. На этом максимуме площадка разрушения составляет с нормалью к плоскости волокон угол равный 20° , локальный максимум σ_{12} реализуется при отношении σ_{22} к σ_{12} равному (-3.3) и превышает S_{12} на 6%. В случае $m_i = m_l$ такой максимум отсутствует.

Квадратичный критерий (2.2) при $m_i \neq m_l$ (рис. 2б, сплошная линия) дает максимум σ_{12} превышающий S_{12} на 33% при $\alpha^* \cong 31.7^\circ$ с отношением $\sigma_{22}/\sigma_{12} \cong -0.9$. При $m_i = m_l$ (рис. 2б, штрихпунктирная линия) также имеет место аналогичный максимум σ_{12} при $\alpha^* \cong 25.3^\circ$, $\sigma_{22}/\sigma_{12} \cong -1$, который больше S_{12} на 20%.

Круглые темные точки на рис. 2б соответствуют данным испытаний [24].

На рис. 2б видно, что квадратичный критерий прочности (4.1) при $m_i \neq m_l$ вполне удовлетворительно согласуется с данными эксперимента.

Заключение. Сформулированы линейный и квадратичный варианты условия прочности, учитывающие влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу на площадке n , соответствующее ортотропному асимметричному закону трения. Приведены уравнения для определения ориентации площадки n , на которой реализуется максимум линейного критерия. Получено точное решение в виде конечной формулы для расчета угла наклона площадки возможного разрушения по квадратичному критерию. Показано, что кривые прочности являются огибающей для семейства линий уровня данных критериев. Определены виды установочных испытаний для нахождения параметров предложенных критериев прочности. Приведены результаты экспериментальной проверки критериев на данных испытаний на разрушение углепластика при двухкомпонентном нагружении комбинациями поперечного сжатия и продольного сдвига. Установлено хорошее соответствие опыту варианта квадратичного критерия прочности, учитывающего влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному закону трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Puck A., Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Compos. Sci. Technol. 1998. V. 58. P. 1045–1067.
2. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединенных авиационных конструкций из композитов. М.: Физматлит, 2013. 272 с.
3. Hütter U., Schelling H., Krauss H. An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design. Munich: NATO. AGRAD. Conf. Proc. № 163. 1974. P. 13–19.
4. Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S. Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // Compos. Sci. Technol. 2002. V. 62. P. 1489–1514.
5. Paris F. A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials. NASA/CR–210661, 2001. 76 p.
6. Li S., Sitnikova E. A critical review on the rationality of popular failure criteria for composites // Compos. Commun. 2018. V. 8. P. 7–13.
7. Гольденблат И.И., Коннов В.А. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 70–78.
8. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. 1971. V. 5. P. 58–80.
9. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. 1980. V. 47. P. 329–334.
10. Зиновьев П.А., Цветков С.В. Инвариантнополиномиальный критерий прочности анизотропных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 140–147.
11. Christensen R.M. Failure criteria for fiber composite materials, the astonishing sixty years search, definitive usable results // Compos. Sci. Technol. 2019. V. 182. 107718. P. 1–7.

12. Гольденблат И.И., Коннов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
13. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 818 p.
14. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2016. 320 с.
15. Олейников А.И. Оценка статической прочности слоистых композитов // Уч. зап. ЦАГИ. 2019. Т. L. № 4. С. 53–66.
16. Hashin Z., Rotem A.A. Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.* 1973. V. 7. P. 448–464.
17. Полилов А.Н. Критерии разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 115–119.
18. Rabinov Yu.N., Polilov A.N. Strength criteria for fibre – reinforced plastics // *Fracture*. 1977. V. 3. P. 1059–1065.
19. Davila C.G., Camanho P.P., Rose C.A. Failure Criteria for FRP Laminates // *J. Compos. Mater.* 2005. V. 39. P. 323–345.
20. Горячева И.Г. Механика трения. М.: Наука, 2001. 478 с.
21. Zmitrowicz A. Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. P. 4407–4451.
22. Олейников А.И., Кузьмина Т.А. Определение упруго-прочностных характеристик монослоев в композиционном пакете // Уч. зап. ЦАГИ. 2020. Т. LI. № 4. С. 77–86.
23. Puck A. *Festigkeitsanalyse von Faser–Matrix–Laminaten: Modelle für die Praxis*. München Wien: Hanser, 1996. 212 s.
24. Cuntze R., Deska R., Szelinski B. et al. Neue bruchkriterien und festigkeitsnachweise für unidirektionalen faserkunststoffverbund unter mehrachsiger beanspruchung modellbildung und experimente. Düsseldorf: VDI, 1997. 262 s.
25. Kaiser C., Kuhnel E., Obst A. Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // in: *European Conf. on Spacecraft Struct. Mater. Mech. Testing*. ESA. 2005. P. 1–12.
26. Dávila C.G., Camanho P.P. *Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress*. Hampton: NASA Langley Research Center. NASA/TM-2003-212663, 2003. 28 p.

Strength Criterion Variants of Polymeric Unidirectional Composites by Inter-Fibre Fracture Conditions with there is a Transverse Compression

A. I. Oleinikov^{a,b,#,##}

^a Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky (TsAGI), Zhukovsky, Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru

^{##}e-mail: a.i.oleinikov@mail.ru

When the analyzing strength of structural made of laminated polymer composite materials the fracture criterion of a unidirectional composite is used. A plane fracture in these composites makes a dihedral angle with a plane of fibers. The angle increases with increase in the relation of transverse compression and longitudinal shear. This fracture mode is most unsafe and leads to complete collapse of a composite. Are studied linear and quadratic strength criteria variants which effect of normal stress on ultimate tangential stress corresponds to the anisotropic law of a friction. The formula ruling a slope angle of an eventual failure plane is deduced. Test category for the whole set of criterion parameters are specified and experimental check of the offered criteria is executed.

Keywords: unidirectional composite, polymeric matrix, strength, inter-fibre fracture, anisotropic friction

REFERENCES

1. *Puck A., Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.*, 1998, vol. 58, pp. 1045–1067.
2. *Grishin V.I., Dzjuba A.S., Dudarkov Ju.I.* Prochnost i ustojchivost elementov i soedinenij aviatcionich konstrukcij iz kompozitov. Moscow: Fizmatlit, 2013. 272 p. (in Russian)
3. *Hütter U., Schelling H., Krauss H.* An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: *Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design*. Munich: NATO, AGRAD, Conf. Proc., no. 163, 1974, pp. 13–19.
4. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S.* Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // *Compos. Sci. Technol.*, 2002, vol. 62, pp. 1489–1514.
5. *Paris F.* A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials. NASA/CR–210661, 2001. 76 p.
6. *Li S., Sitnikova E.* A critical review on the rationality of popular failure criteria for composites // *Compos. Commun.*, 2018, vol. 8, pp. 7–13.
7. *Gol'denblat I.I., Kopnov V.A.* Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state // *Polymer Mech.*, 1966, vol. 1, pp. 54–59.
8. *Tsai S.W., Wu E.M.* A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.*, 1971, vol. 5, pp. 58–80.
9. *Hashin Z.* Failure criteria for unidirectional fiber composites // *J. Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, pp. 329–334.
10. *Zinoviev P.A., Tsvetkov S.V.* Invariant polynomial strength criterion for anisotropic materials // *Izv. RAN. MTT*, 1994, no. 4, pp. 140–147. (in Russian)
11. *Christensen R.M.* Failure criteria for fiber composite materials, the astonishing sixty years search, definitive usable results // *Compos. Sci. Technol.*, 2019, vol. 182, 107718, pp. 1–7.
12. *Gol'denblat I.I., Kopnov V.A.* Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionih materialov. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 192 p. (in Russian)
13. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 818 p.
14. *Polilov A.N.* Etjudi po mehanike kompozitov. Moscow: Fizmatlit, 2016. 320 p. (in Russian)
15. *Oleinikov A.I.* Assessment of static load strength of laminated composites // *TsAGI Sci. J.*, 2019, vol. 50, no 4, pp. 411–427.
16. *Hashin Z., Rotem A.A.* Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.*, 1973, vol. 7, pp. 448–464.
17. *Polilov A.N.* Kriterii razrushenija poverhnosti razdela v odnonapravlenih kompozitah // *Izv. AN SSSR, MTT*, 1978, no. 2, pp. 115–119. (in Russian)
18. *Rabotnov Yu., N., Polilov A.N.* Strength criteria for fibre – reinforced plastics // *Fracture*, 1977, vol. 3, pp. 1059–1065.
19. *Dávila C.G., Camanho P.P., Rose C.A.* Failure criteria for FRP laminates // *J. Compos. Mater.*, 2005, vol. 39, pp. 323–345.
20. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Friction Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
21. *Zmitrowicz A.* Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction // *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 4407–4451.
22. *Oleinikov A.I., Kuzmina T.A.* Identification of ply elasticity and strength in laminated composites // *TsAGI Sci. J.*, 2020, vol. 51, pp. 409–421.
23. *Puck A.* Festigkeitsanalyse von Faser–Matrix–Laminaten: Modelle für die Praxis. München Wien: Hanser, 1996. 212 s.
24. *Cuntze R., Deska R., Szelinski B. et al.* Neue bruchkriterien und festigkeitsnachweise für unidirektionalen faserkunststoffverbundunter mehrachsiger beanspruchung modellbildung und experimente. Düsseldorf: VDI, 1997. 262 s.
25. *Kaiser C., Kuhnel E., Obst A.* Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // in: *European Conf. on Spacecraft Struct., Mater. Mech. Testing*. Noordwijk: ESA, 2005, pp. 1–12.
26. *Dávila C.G., Camanho P.P.* Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress. Hampton: NASA Langley Research Center. NASA/TM-2003-212663, 2003. 28 p.