

УДК 531.36

О ПЛОСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА С ШАРОВЫМ ДЕМПФЕРОМ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

© 2022 г. Н. И. Амелькин^{1,*}¹ Московский физико-технический институт, Москва, Россия*e-mail: namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 02.12.2021 г.

После доработки 11.02.2022 г.

Принята к публикации 15.02.2022 г.

В рамках модели М.А. Лаврентьева изучается влияние внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутника на эллиптической орбите. Получены эволюционные уравнения, описывающие плоские нерезонансные вращения спутника. Определены условия существования и устойчивости плоских резонансных вращений спутника. Получено аналитическое решение, описывающее плоские -периодические резонансные вращения спутника на эллиптической орбите.

Ключевые слова: спутник с шаровым демпфером, эллиптическая орбита, эволюционные уравнения, плоские резонансные вращения, устойчивость

DOI: 10.31857/S003282352203002X

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Вращательное движение спутника, моделируемого одним твердым телом, в центральном гравитационном поле к настоящему времени хорошо изучено. В работах В.В. Белецкого, Ф.Л. Черноушко, А.П. Маркеева [1–6] и других авторов проведен подробный анализ вращений спутника на круговой и эллиптической орбите, изучены плоские и пространственные резонансные вращения спутника.

Влияние внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле исследовалось в работах [7–11]. Здесь для описания диссипативных сил использовалась модель М.А. Лаврентьева [12]. В этой модели спутник (планета) моделируется системой из двух твердых тел – оболочки и шарового демпфера (ядра), при относительных перемещениях которого возникает диссипативный момент. В указанных работах проведено подробное исследование эволюции вращательного движения спутника на круговой орбите.

В настоящей работе изучается вращательное движение спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите.

В рамках используемой модели М.А. Лаврентьева спутник является гироскопом, т.е. его тензор инерции в базисе, связанном с оболочкой, остается неизменным. Пусть O – центр масс всего спутника, а $Oe_1e_2e_3$ – ортонормированный базис с началом в точке O и осями e_1, e_2, e_3 , связанными с оболочкой. Обозначим через \mathbf{J} тензор инерции всего спутника в этом базисе, а через $\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - I\mathbf{E}$ – тензор инерции вспомогательного тела, образованного оболочкой и точечной массой, равной массе демпфера и расположенной в центре масс демпфера. Здесь I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси, \mathbf{E} – единичная матрица.

Ниже будем полагать, что диссипативный момент пропорционален относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой

$$\mathbf{M}_d = -\check{\mu}I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости оболочки, $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости демпфера, $\check{\mu}$ – коэффициент демпфирования.

Действующий на спутник гравитационный момент определяется формулой [1]

$$\mathbf{M}_g = 3k\mathbf{R} \times \mathbf{J}\mathbf{R}/R^5, \quad (1.2)$$

где $k = \gamma M$ – постоянная тяготения, γ – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела (Солнца), \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения с центром масс спутника.

Динамические уравнения вращательного движения спутника записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^*\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}_g + \check{\mu}I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \\ I(\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) &= -\check{\mu}I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первое из этих уравнений представляет собой теорему об изменении кинетического момента вспомогательного тела, а второе – теорему об изменении кинетического момента демпфера. Все векторы в этих уравнениях заданы проекциями на оси базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Уравнения (1.3) дополняются до замкнутой системы кинематическими уравнениями вращательного движения оболочки спутника, записанными в тех или иных переменных. Для целей численного интегрирования целесообразно использовать уравнения Пуассона в кватернионах

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega} \quad (1.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}$ – кватернион единичной нормы, задающий положение базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Для аналитического исследования могут быть использованы кинематические уравнения в углах Эйлера.

Оси базиса Кенига выберем так, чтобы ось \mathbf{i}_3 совпадала с нормалью \mathbf{n} к плоскости орбиты, а ось \mathbf{i}_1 – с направлением на перигелий орбиты. Обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{R}/R$ единичный вектор, сонаправленный с радиус-вектором центра масс спутника, а через ν – истинную аномалию – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{i}_1 . Угловая скорость орбитального базиса, образованного векторами \mathbf{r} , $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ и \mathbf{n} , направлена по \mathbf{n} и определяется выражением $\dot{\nu} = c/R^2$, где c – константа интеграла площадей $R^2\dot{\nu} = c$.

В качестве безразмерного времени будем использовать среднюю аномалию $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 – средняя угловая скорость орбитального базиса, определяемая формулой

$$\omega_0 = (k/a^3)^{1/2} = \frac{c}{(pa^3)^{1/2}} = \frac{c}{p^2}(1-e^2)^{3/2}, \quad p = \frac{c^2}{k} \quad (1.5)$$

Здесь a – большая полуось орбиты спутника, p – параметр, e – эксцентриситет.

Введем безразмерные переменные \mathbf{U} и \mathbf{V} согласно формулам

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega}/\omega_0, \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}/\omega_0 \quad (1.6)$$

В этих переменных уравнения (1.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^*\mathbf{U}' + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} &= \mu I(\mathbf{V} - \mathbf{U}) + \mathbf{m}_g \\ \mathbf{V}' + \mathbf{U} \times \mathbf{V} &= -\mu(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, $\mu = \dot{\mu}/\omega_0$ – безразмерный коэффициент демпфирования, а безразмерный гравитационный момент \mathbf{m}_g выражается формулой

$$\mathbf{m}_g = \frac{\mathbf{M}_g}{\omega_0^2} = \frac{3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}}{(1 - e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 \quad (1.8)$$

Закон изменения истинной аномалии описывается уравнением

$$v' = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

Компоненты вектора $3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}$ в базисе главных центральных осей инерции спутника $Oe_1e_2e_3$ выражаются в виде

$$3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r} = 3[(C - B)r_2r_3, (A - C)r_3r_1, (B - A)r_1r_2], \quad (1.10)$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, а r_k – компоненты единичного вектора \mathbf{r} в осях e_k .

Если вместо переменной \mathbf{V} ввести переменную $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$ (относительную угловую скорость демпфера), то уравнения (1.7) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} - I\mathbf{E})\mathbf{U}' + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} &= \mu\mathbf{W} + \mathbf{m}_g \\ (\mathbf{J} - I\mathbf{E})(\mathbf{W}' + \mathbf{U} \times \mathbf{W}) &= -\mu\mathbf{J}\mathbf{W} + \mathbf{U} \times \mathbf{J}\mathbf{U} - \mathbf{m}_g \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Плоские вращения спутника. В данной работе ограничимся анализом плоских вращений спутника с демпфером на эллиптической орбите. Такие вращения допускаются уравнениями (1.11) и представляют собой вращения вокруг одной из главных осей инерции спутника, сонаправленной с нормалью к плоскости орбиты. Не ограничивая общности, будем считать, что осью вращения является главная ось Oe_3 . Такие вращения описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_3' &= \mu\gamma W_3 + \varepsilon f_3 \\ W_3' &= -\mu(1 + \gamma)W_3 - \varepsilon f_3 \\ \varphi' &= U_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v' = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Здесь использованы обозначения

$$\gamma = \frac{I}{C - I}, \quad \varepsilon = \frac{3(B - A)}{2(C - I)}, \quad f_3 = \frac{(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} \sin 2(v - \varphi), \quad (2.2)$$

а φ – угол поворота оболочки спутника вокруг нормали к плоскости орбиты.

Отметим, что функцию f_3 можно записать в виде

$$f_3 = \frac{\partial F}{\partial \varphi}; \quad F = \frac{(1 + e \cos v)^3 \cos 2(v - \varphi)}{2(1 - e^2)^3}, \quad (2.3)$$

где F с точностью до постоянного множителя есть силовая функция гравитационного поля в рассматриваемой плоской задаче.

Поскольку истинная аномалия v является периодической по τ функцией с периодом 2π , то этим же свойством обладает и функция F (2.3). Поэтому ее можно представить рядом Фурье

$$F(\tau, \varphi) = F_0(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\tau - 2\varphi) + B_k \cos(k\tau - 2\varphi) \quad (2.4)$$

Коэффициенты этого разложения определяются формулами

$$F_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\tau = \frac{1}{4\pi(1-e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v) \cos 2(v - \varphi) dv = 0 \quad (2.5)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin(k\tau - 2\varphi) d\tau = -\frac{1}{2} \Phi_{-k} \sin 4\varphi \quad (2.6)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cos(k\tau - 2\varphi) d\tau = \frac{\Phi_k(e)}{2} + \frac{\Phi_{-k}(e) \cos 4\varphi}{2} \quad (2.7)$$

Здесь $\Phi_k(e)$ и $\Phi_{-k}(e)$ – интегралы Ф.Л. Черноушко [4], определяемые формулами

$$\Phi_k(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos v)^3 \cos(k\tau - 2v)}{(1 - e^2)^3} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos v) \cos(k\tau - 2v)}{(1 - e^2)^{3/2}} dv \quad (2.8)$$

$$\Phi_{-k}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos v)^3 \cos(k\tau + 2v)}{(1 - e^2)^3} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos v) \cos(k\tau + 2v)}{(1 - e^2)^{3/2}} dv \quad (2.9)$$

Явные выражения для этих функций в виде рядов по эксцентриситету можно найти в книге А.П. Маркеева [5]. Ниже выписаны первые члены этих разложений

$$\begin{aligned} \Phi_1 = -\frac{1}{2}e, \quad \Phi_2 = 1 - \frac{5}{2}e^2, \quad \Phi_3 = \frac{7}{2}e, \quad \Phi_4 = \frac{17}{2}e^2, \quad \Phi_5 = \frac{845}{48}e^3, \quad \Phi_6 = \frac{533}{16}e^4, \dots \\ \Phi_0 = 0, \quad \Phi_{-1} = \frac{1}{48}e^3, \quad \Phi_{-2} = \frac{1}{24}e^4, \quad \Phi_{-3} = \frac{81}{1280}e^5, \quad \Phi_{-4} = \frac{4}{45}e^6, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из таблицы (2.10) следует, что при $e \ll 1$ функции $\Phi_k(e)$ ($k \neq 0$) являются величинами порядка $e^{|k-2|}$, а отношение между разными функциями можно описать неравенствами

$$\Phi_k^2 < (ae)^{2(k-s)} \Phi_s^2; \quad k > s \geq 2, \quad \Phi_{2+k}^2 < (ae)^{2(k-1)} \Phi_1^2; \quad k \geq 2 \quad (2.11)$$

$$\Phi_s^2 < (ae)^{2(k-s)} \Phi_k^2; \quad s < k, \quad 1 \geq k \neq 0 \quad (2.12)$$

$$\Phi_{n+s+1}^2 < (ae)^2 \Phi_{n-s}^2; \quad n \geq 2, \quad 0 \leq s \neq n \quad (2.13)$$

$$\Phi_{n-s}^2 < (ae)^2 \Phi_{n+s+1}^2; \quad n \leq 1, \quad 0 \leq s \neq -(n+1) \quad (2.14)$$

Здесь $a > 0$ – ограниченная величина, зависящая от k , s и n .

После подстановки выражений (2.5)–(2.7) в формулу (2.4) получим

$$F(\tau, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k(e) \cos(k\tau - 2\varphi) + \Phi_{-k}(e) \cos(k\tau + 2\varphi)] \quad (2.15)$$

Очевидно, что эту формулу можно переписать в виде

$$F(\tau, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k(e) \cos(k\tau - 2\varphi), \quad (2.16)$$

где суммирование ведется по всем целым положительным и отрицательным k .

Для функции f_3 на основании (2.3) будем иметь

$$f_3(\tau, \varphi) = \sum_k \Phi_k(e) \sin(k\tau - 2\varphi) \quad (2.17)$$

Резонансные вращения спутника определяются условиями

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = U = \frac{n}{2}; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.18)$$

Здесь через U обозначено среднее значение U_3 . Положительным значениям n отвечают “прямые” вращения, а отрицательным – “обратные” вращения.

Условие отсутствия резонансов записывается в виде

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = U \neq \frac{n}{2}; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.19)$$

3. Нерезонансные плоские вращения спутника. Так как четвертое из уравнений (2.1) уже учтено при выводе формулы (2.12) для $f_3(\tau, \varphi)$, то плоские вращения спутника с демпфером можно описать следующей замкнутой системой из трех уравнений:

$$\begin{aligned} U_3' &= \mu\gamma W_3 + \varepsilon f_3(\tau, \varphi) \\ W_3' &= -mW_3 - \varepsilon f_3(\tau, \varphi) \\ \varphi' &= U_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь и далее используются обозначения

$$m = \mu(1 + \gamma), \quad \sigma_k = k\tau - 2\varphi \quad (3.2)$$

Ниже будем полагать, что $0 < \varepsilon \ll 1$ (малый параметр), т.е. спутник близок к сферически симметричному.

Для анализа нерезонансных вращений используем метод осреднения [13, 14]. Сделаем замену переменных

$$U_3 = U + S, \quad W_3 = W + R, \quad (3.3)$$

в которой функции S и R найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial S}{\partial \sigma_k} (k - 2U) &= \mu\gamma R + \varepsilon f_3 \\ \sum_k \frac{\partial R}{\partial \sigma_k} (k - 2U) &= -mR + \varepsilon f_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решения этой системы записываются гармоническими по переменным σ_k функциями вида

$$S = \sum_k a_k \sin \sigma_k + b_k \cos \sigma_k, \quad R = \sum_k p_k \sin \sigma_k + q_k \cos \sigma_k \quad (3.5)$$

Коэффициенты при гармониках выражаются формулами

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(k - 2U)\varepsilon\Phi_k}{(k - 2U)^2 + m^2}, \quad p_k = -\frac{m\varepsilon\Phi_k}{(k - 2U)^2 + m^2} \\ a_k &= \frac{\mu\gamma\varepsilon\Phi_k}{(k - 2U)^2 + m^2}, \quad b_k = -\frac{\mu m + (k - 2U)^2}{(k - 2U)[(k - 2U)^2 + m^2]} \varepsilon\Phi_k \end{aligned} \quad (3.6)$$

После подстановки решений (3.5) в уравнения (3.1) получим

$$\begin{aligned} U' \left(1 + \frac{\partial S}{\partial U} \right) - 2S \sum_k \frac{\partial S}{\partial \sigma_k} &= \mu \gamma W \\ W' \left(1 + \frac{\partial R}{\partial U} \right) - 2S \sum_k \frac{\partial R}{\partial \sigma_k} &= -m W \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из формул (3.5) и (3.6) следует, что в рассматриваемом нерезонансном случае функции S и R являются ограниченными функциями малого параметра ϵ . Этим же свойством обладают и фигурирующие в уравнениях (3.7) производные от этих функций. Обозначив среднее по времени угловыми скобками, получим

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial U} \right\rangle = O(\epsilon^2), \quad \left\langle \frac{\partial R}{\partial U} \right\rangle = O(\epsilon^2), \quad \left\langle 2S \sum_k \frac{\partial S}{\partial \sigma_k} \right\rangle = O(\epsilon^3) \quad (3.8)$$

$$\left\langle 2S \sum_k \frac{\partial R}{\partial \sigma_k} \right\rangle = \sum_k (p_k b_k - q_k a_k) = \sum_k \frac{\mu \epsilon^2 \Phi_k^2}{(k - 2U)[(k - 2U)^2 + m^2]} + O(\epsilon^3) \quad (3.9)$$

При учете этих формул осредненные с точностью до $O(\epsilon^3)$ уравнения (3.7) примут вид

$$U' = \mu \gamma W, \quad W' - \sum_k \frac{\mu \epsilon^2 \Phi_k^2}{(k - 2U)[(k - 2U)^2 + m^2]} = -m W \quad (3.10)$$

Из этих уравнений следует, что в установившемся режиме медленной эволюции средняя относительная угловая скорость демпфера выражается формулой

$$W = \sum_k \frac{\mu \epsilon^2 \Phi_k^2}{m(k - 2U)[(k - 2U)^2 + m^2]}, \quad (3.11)$$

а средняя угловая скорость оболочки спутника меняется согласно уравнению

$$U' = \frac{\mu \gamma \epsilon^2}{(1 + \gamma)} \sum_k \frac{\Phi_k^2}{(k - 2U)[(k - 2U)^2 + m^2]} \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) описывает эволюцию плоского нерезонансного вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите. Для круговой орбиты уравнение (3.12) принимает вид

$$U' = \frac{\mu \gamma \epsilon^2}{2(1 + \gamma)(1 - U)[4(1 - U)^2 + m^2]} \quad (3.13)$$

Это уравнение было получено ранее [10]. Из него следует, что в случае круговой орбиты средняя угловая скорость оболочки спутника монотонно стремится к значению $U = 1$, т.е. спутник эволюционирует к положению относительного равновесия.

Исследуем поведение средней угловой скорости оболочки спутника в нерезонансном вращении для случая эллиптической орбиты. Рассмотрим вращение, для которого величина $2U$ лежит между резонансными значениями n и $n + 1$, где $n \neq 0$ — целое число, которое может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положим

$$2U = n + V, \quad \Delta < V < 1 - \Delta \quad (3.14)$$

Здесь $0 < \Delta \ll 1$ — величина, характеризующая удаленность рассматриваемых движений от резонансных вращений. Оценки для значений этой величины будут приведены ниже.

Обозначим через Σ сумму в правой части уравнения (3.12). Ее можно записать в виде

$$\Sigma = \sum_{s=0}^{\infty} \Sigma_s = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\Phi_{n+s+1}^2}{(s+1-V)[(s+1-V)^2 + m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+V)[(s+V)^2 + m^2]} \right) \quad (3.15)$$

Определим знак каждого слагаемого Σ_s в сумме (3.15). Рассмотрим сначала случай $n \geq 2$ (вращения с угловой скоростью $U > 1$). Учитывая правое из неравенств (3.14), получим

$$\begin{aligned} \Sigma_s &< \frac{\Phi_{n+s+1}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2 + m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+1)[(s+1)^2 + m^2]} < \\ &< \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2 + m^2]} \left(\frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3} \Phi_{n+1+s}^2 - \Phi_{n-s}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

При учете неравенств (2.13) будем иметь

$$\Sigma_s < \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2 + m^2]} \left(\frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3} (ae)^2 - 1 \right) \Phi_{n-s}^2; \quad 0 \leq s \neq n \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что при $e \ll 1$ для значений V из интервала (3.14), где

$$\Delta = (2a^2 e^2)^{1/3} \ll 1 \quad (3.18)$$

будут выполняться неравенства

$$\Sigma_s < -\frac{1}{2(s+1)[(s+1)^2 + m^2]} \Phi_{n-s}^2 < 0; \quad 0 \leq s \neq n \quad (3.19)$$

Для $s = n$ имеем

$$\Sigma_s = \Sigma_n < \frac{\Phi_{2n+1}^2}{(\Delta+n)[(\Delta+n)^2 + m^2]} > 0 \quad (3.20)$$

При этом для члена $\Sigma_{s-1} = \Sigma_{n-1}$ в силу (3.19) выполняется неравенство

$$\Sigma_{n-1} < -\frac{1}{2n(n^2 + m^2)} \Phi_1^2 \quad (3.21)$$

В рассматриваемом случае $n \geq 2$. Поэтому на основании неравенства (2.11) имеем

$$\Phi_{2n+1}^2 < (ae^2)^2 \Phi_1^2,$$

а при учете формулы (3.18) получим

$$\Sigma_n + \Sigma_{n-1} < \left(\frac{\Delta^6}{4(\Delta+n)[(\Delta+n)^2 + m^2]} - \frac{1}{2n(n^2 + m^2)} \right) \Phi_1^2 < 0 \quad (3.22)$$

Из неравенств (3.19) и (3.22) следует $\Sigma < 0$. Это означает, что на нерезонансных вращениях с угловой скоростью $U > 1$ производная $U' < 0$, т.е. средняя угловая скорость спутника убывает.

Рассмотрим теперь случай $n \leq 1$ (вращения с угловой скоростью $U < 1$). Здесь n может принимать значения $+1, -1, -2, -3, \dots$. Учитывая левое из неравенств (3.14), получим из (3.15)

$$\begin{aligned} \Sigma_s &> \frac{\Phi_{n+1+s}^2}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} - \frac{\Phi_{n-s}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]} > \\ &> \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} \left(\Phi_{n+1+s}^2 - \frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3} \Phi_{n-s}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

При учете неравенства (2.14) будем иметь

$$\Sigma_s > \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} \left(1 - \frac{(s+1)^3}{(s+\Delta)^3} ae^2 \right) \Phi_{n+1+s}^2; \quad 0 \leq s \neq -(n+1) \quad (3.24)$$

Отсюда следует, что при $e \ll 1$ для значений V из интервала (3.14), где Δ определяется формулой (3.18), будут выполняться неравенства

$$\Sigma_s > \frac{1}{(s+1)[(s+1)^2+m^2]} \left(1 - \frac{(s+1)^3}{2(s+\Delta)^3} \Delta^3 \right) \Phi_{n+1+s}^2 > 0; \quad 0 \leq s \neq -(n+1) \quad (3.25)$$

Для $s = -(n+1)$ из (3.23) имеем

$$\Sigma_s > -\frac{\Phi_{2n+1}^2}{(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]}, \quad (3.26)$$

а следующий член в сумме (3.15) в силу (3.25) удовлетворяет неравенству

$$\Sigma_{s+1} > \frac{1}{(s+2)[(s+2)^2+m^2]} \left(1 - \frac{(s+2)^3}{2(s+1+\Delta)^3} \Delta^3 \right) \Phi_1^2 \quad (3.27)$$

Так как в формуле (3.15) $s \geq 0$, то случай $s = -(n+1)$ возможен только при $n \leq -1$. Для таких значений n согласно (2.12) и (3.18) имеем

$$\Phi_{2n+1}^2 < (ae)^4 \Phi_1^2 = \Delta^6 \Phi_1^2 / 4; \quad n \leq -1, \quad (3.28)$$

а для суммы членов Σ_s и Σ_{s+1} при $s = -(n+1)$ получим

$$\Sigma_s + \Sigma_{s+1} > \left(\frac{1}{2(s+2)[(s+2)^2+m^2]} - \frac{\Delta^6}{4(s+\Delta)[(s+\Delta)^2+m^2]} \right) \Phi_1^2 > 0 \quad (3.29)$$

Из неравенств (3.25) и (3.29) следует $\Sigma > 0$. Это означает, что на нерезонансных вращениях с угловой скоростью $U < 1$ производная $U' > 0$, т.е. средняя угловая скорость спутника возрастает.

Таким образом, и в случае эллиптической орбиты на нерезонансных вращениях при $U < 1$ средняя угловая скорость спутника возрастает, а при $U > 1$ — убывает. Но в отличие от случая круговой орбиты здесь в финале эволюции необязательно будет значение $U = 1$, поскольку возможны захваты в устойчивые резонансные вращения $2U = n$, где $n \neq 2$.

4. Плоские резонансные вращения спутника. Для изучения резонансных вращений спутника (2.18) положим

$$\varphi = \frac{n}{2} \tau + X; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.1)$$

Вращение будет резонансным, если X будет периодической функцией τ . Функцию X представим в виде двух составляющих

$$X = Y + \tilde{X}, \quad (4.2)$$

где Y и \tilde{X} эволюционная и осцилляционная составляющие, соответственно.

При анализе резонансных вращений также, как и в разд. 3, будем пользоваться методом осреднения. Введем обозначение

$$\sigma_k = (k - n)\tau - 2Y \quad (4.3)$$

Тогда система уравнений (3.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} U_3' &= \mu\gamma W + \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k \sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \varepsilon \Phi_n \sin 2(Y + \tilde{X}) \\ W_3' &= -mW - \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k \sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) + \varepsilon \Phi_n \sin 2(Y + \tilde{X}) \\ \tilde{X}' &= U_3 - n/2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

По аналогии с разд. 3 сделаем замену переменных

$$U_3 = U + S, \quad W_3 = W + R, \quad (4.5)$$

в которой функции S и R определим из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq n} \frac{\partial S}{\partial \sigma_k} (k - n) &= \mu\gamma R + \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k \sin \sigma_k \\ \sum_{k \neq n} \frac{\partial R}{\partial \sigma_k} (k - n) &= -mR - \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k \sin \sigma_k \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решения этой системы записываются гармоническими функциями вида

$$S = \sum_{k \neq n} (a_k \sin \sigma_k + b_k \cos \sigma_k), \quad R = \sum_{k \neq n} (p_k \sin \sigma_k + q_k \cos \sigma_k) \quad (4.7)$$

Коэффициенты при гармониках выражаются формулами (3.6), в которых вместо $2U$ следует положить n , т.е.

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(k - n)\varepsilon\Phi_k}{(k - n)^2 + m^2}, \quad p_k = -\frac{m\varepsilon\Phi_k}{(k - n)^2 + m^2} \\ a_k &= \frac{\mu\gamma\varepsilon\Phi_k}{(k - n)^2 + m^2}, \quad b_k = -\frac{\mu m + (k - n)^2}{(k - n)[(k - n)^2 + m^2]} \varepsilon\Phi_k; \quad k \neq n \end{aligned} \quad (4.8)$$

После подстановки этих решений в уравнения (4.4) получим систему

$$\begin{aligned} U' + \frac{\partial S}{\partial Y} Y' &= \mu\gamma W + \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k [\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin \sigma_k] - \varepsilon \Phi_n \sin 2(Y + \tilde{X}) \\ W' + \frac{\partial R}{\partial Y} Y' &= -mW - \varepsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k [\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin \sigma_k] + \varepsilon \Phi_n \sin 2(Y + \tilde{X}) \\ Y' &= U - n/2, \quad \tilde{X}' = S \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь, записав третье уравнение системы (4.4) в виде двух уравнений, мы конкретизировали разделение переменной X на эволюционную Y и осцилляционную \tilde{X} состав-

ляющие. При таком разделении выражение для осцилляционной составляющей запишется в виде

$$\tilde{X}_n = \int S d\tau = \sum_{k \neq n} \frac{(b_k \sin \sigma_k - a_k \cos \sigma_k)}{k - n} \quad (4.10)$$

Используя известные тригонометрические формулы и учитывая, что S и R являются ограниченными функциями малого параметра ϵ , получим после осреднения с точностью до $O(\epsilon^3)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} U' + \frac{\partial S}{\partial Y} Y' &= \mu\gamma W + \mu\gamma\epsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} - \epsilon\Phi_n \sin 2Y \\ W' + \frac{\partial R}{\partial Y} Y' &= -mW - \mu\gamma\epsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} + \epsilon\Phi_n \sin 2Y \\ Y' &= U - n/2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь вторые члены в правых частях первых двух уравнений есть среднее от функций

$$\left\langle \epsilon \sum_{k \neq n} \Phi_k [\sin(\sigma_k - 2\tilde{X}) - \sin \sigma_k] \right\rangle = \epsilon \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k a_k}{k - n} = \mu\gamma\epsilon^2 \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]},$$

вычисленное на основании формул (4.8) и (4.10).

Положения равновесия осредненной системы (4.11) соответствуют резонансным вращениям исходной системы (4.4) и определяются уравнениями

$$U = \frac{n}{2}, \quad W = 0, \quad \sin 2Y = Z_n = \frac{\mu\gamma\epsilon}{\Phi_n} \sum_{k \neq n} \frac{\Phi_k^2}{(k-n)[(k-n)^2 + m^2]} \quad (4.12)$$

Очевидно, что для существования резонансного вращения $2U = n$ должно выполняться условие $|Z_n| \leq 1$. Величина $|Z_n|$ зависит от ϵ (линейно), e , n , а также от значений параметров μ и γ . Зависимость от последних входит в выражение (4.12) через функции

$$g_{nk} = \frac{\mu\gamma}{(k-n)^2 + m^2} \quad (4.13)$$

Для этих функций при учете формулы (3.2) имеем

$$g_{nk} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu\gamma \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mu\gamma \rightarrow \infty, \quad g_{nk} < \frac{m}{(k-n)^2 + m^2} \leq \frac{1}{2|k-n|} \quad (4.14)$$

Из формулы (4.12) и таблицы (2.10) следует, что при $e \ll 1$ величина $|Z_n|$ обратно пропорциональна $e^{|n-2|}$. Поэтому для каждого фиксированного набора значений параметров ϵ , μ и γ при достаточно больших значениях $|n-2|$ резонансных вращений $2U = n$ не существует. Сравнительный анализ функций $\Phi_n(e)$ для прямых и обратных вращений показывает, что с ростом $|n-2|$ существенно быстрее “заканчиваются” обратные резонансные вращения. Число резонансных вращений уменьшается также по мере уменьшения эксцентриситета e , а при $e = 0$ (для круговой орбиты) имеется только резонансное вращение 1:1 ($n = 2$), соответствующее положениям равновесия спутника относительно орбитального базиса.

Из уравнений (4.11) следует, что условие асимптотической устойчивости положений равновесия (4.12), а, следовательно, и резонансных вращений спутника, выглядит следующим образом:

$$\mu\gamma\Phi_n \cos 2Y > 0 \quad (4.15)$$

Если $0 < |Z_n| < 1$, то на полуинтервале $[0, \pi)$ существует два положения равновесия (4.12), одно из которых асимптотически устойчиво, а другое неустойчиво. Отметим, что здесь речь идет об устойчивости по отношению к плоским возмущениям.

Колебательная составляющая \tilde{X}_n переменной $X_n = \varphi - n\tau/2$, определяемая рядом (4.10), для каждого n содержит гармоники с частотами 1, 2, 3, ... и поэтому является 2π -периодической функцией τ .

Для слабо эллиптических орбит ($e \ll 1$) при вычислении Z_n и \tilde{X}_n приемлемая точность достигается, если ограничиться членами наименьшего порядка по эксцентриситету e в рядах (4.12), (4.10) и функциях (2.10). Для $n = 2$ такими "старшими" будут члены с номерами $k = 3$ и $k = 1$, а для $n \neq 2$ — член с номером $k = 2$.

Для "главного" резонанса $U = 1$ (резонанс 1:1 типа "Луна", $n = 2$) старшие члены в рядах (4.12) и (4.10) записываются в виде

$$Z_2 = \frac{\mu\gamma\epsilon}{\Phi_2} \left(\frac{\Phi_3^2}{(1+m^2)} - \frac{\Phi_1^2}{(1+m^2)} \right) \approx \frac{12\mu\gamma\epsilon e^2}{(1+m^2)} < 6\epsilon e^2 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 = & \frac{7\epsilon e}{2(1+m^2)} ((\mu m + 1)\sin(\tau + 2Y) + \mu\gamma\cos(\tau + 2Y)) + \\ & + \frac{\epsilon e}{2(1+m^2)} ((\mu m + 1)\sin(\tau - 2Y) + \mu\gamma\cos(\tau - 2Y)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

В этом резонансном режиме спутник совершает 2π -периодические колебания в окрестности относительного положения равновесия. Амплитуда этих колебаний пропорциональна произведению ϵe .

Для резонансов $2U = n$, где $n \neq 2$, старшие члены в выражениях (4.12) и (4.10) имеют вид

$$Z_n = \frac{\mu\gamma\epsilon\Phi_2^2}{\Phi_n(2-n)[(2-n)^2 + m^2]}, \quad |Z_n| < \frac{\epsilon}{2|\Phi_n|(2-n)^2} \quad (4.18)$$

$$\tilde{X}_n = -\frac{\epsilon\Phi_2}{(2-n)^2 + m^2} \left(\frac{\mu m + (2-n)^2}{(2-n)^2} \sin[(2-n)\tau - 2Y] + \frac{\mu\gamma}{2-n} \cos[(2-n)\tau - 2Y] \right) \quad (4.19)$$

Здесь амплитуда колебаний периодической составляющей пропорциональна ϵ .

В случаях, когда эксцентриситет e не слишком мал, например, $e \geq 0.1$, для вычисления функций Z_n и \tilde{X}_n с хорошей точностью в рядах (4.10), (4.12) и функциях (2.10) необходимо помимо старших членов учитывать и несколько членов более высокого порядка малости по эксцентриситету e .

Полученные выше аналитические выводы о резонансных вращениях спутника подтверждаются результатами численного интегрирования точных уравнений движения (2.1). Для разных значений параметров соответствующим подбором начальных условий установлено существование устойчивых резонансных вращений $2U = n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2$. При этом установлено, что если $e \leq 0.2$, то для вычисления значений Z_n и функций \tilde{X}_n с хорошей точностью достаточно в (4.12) и (4.10) учитывать не более четырех членов ряда. Соответствующий пример приведен на рис. 1 для резонансного вращения 3:1 ($n = 6$) для следующих значений параметров:

$$\epsilon = 0.1, \quad e = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad \mu = 1 \quad (4.20)$$

В левой части рисунка изображена фазовая траектория в плоскости X, φ' , где $X = \varphi - 3\tau$, установившегося резонансного вращения, полученная по результатам

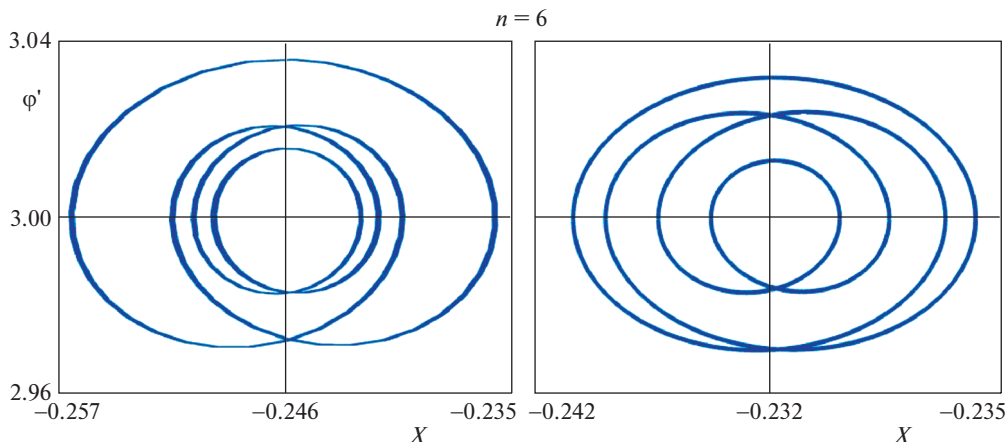


Рис. 1.

численного интегрирования уравнений (2.1), а в правой части – фазовая траектория, вычисленная по формулам (4.12), (4.10) при сохранении в этих рядах членов с номерами $k = 1, 2, 3$.

По результатам численного интегрирования уравнений (2.1) установлено также, что захват в существующие резонансные вращения $2U = n$, где $n \neq 2$, носит вероятностный характер. Т.е. для одних начальных значений $2U$ из интервала $(n, n + 1)$ захват в резонансное вращение $2U = n$ наблюдается, а для других происходит “проскакивание” мимо этого резонансного вращения и захват потом наблюдается в резонанс более низкого порядка. Соответствующий пример приведен на рис. 2, где приведены графики эволюции угловой скорости спутника для одной и той же комбинации значений параметров, но при разных начальных условиях. Здесь N – число оборотов спутника вокруг притягивающего центра.

Вероятностный характер захвата в существующие резонансные вращения может объясняться неавтономностью рассматриваемой системы. На основании результатов численного интегрирования уравнений (2.1), проведенного для большого числа разных значений параметров и начальных условий, можно высказать предположение, что вероятность захвата в резонансы $2U = n$, где $n \neq 2$, пропорциональна некоторой положительной степени $|\Phi_n|$. Для обратных вращений эта вероятность существенно меньше, чем для прямых вращений. Например, указанные выше устойчивые обратные резонансные вращения $U = -1/2$ и $U = -1$ удалась обнаружить только специальным подбором начальных условий.

Численное интегрирование уравнений (2.1) показало также, что помимо резонансных вращений, описываемых 2π -периодическими решениями (4.12), (4.10), возможны и другие, в которых решение $X = \varphi - n\tau/2$ содержит гармоники с дробными частотами. Этот факт обнаружен для резонанса 3:2 (резонанс типа “Меркурий”, $n = 3$) при интегрировании уравнений (2.1) для следующих значений параметров:

$$\varepsilon = 0.18, \quad e = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad \mu = 0.75$$

Установлено, что при задании начальных условий

$$\varphi(0) = 0.2, \quad \varphi'(0) = 1.5, \quad W_3(0) = 0, \quad v(0) = 0$$

наблюдается захват в резонансном вращении 3:2, для которого график переменной X приведен на рис. 3 слева. А на рис. 3 справа приведен график X для установившегося

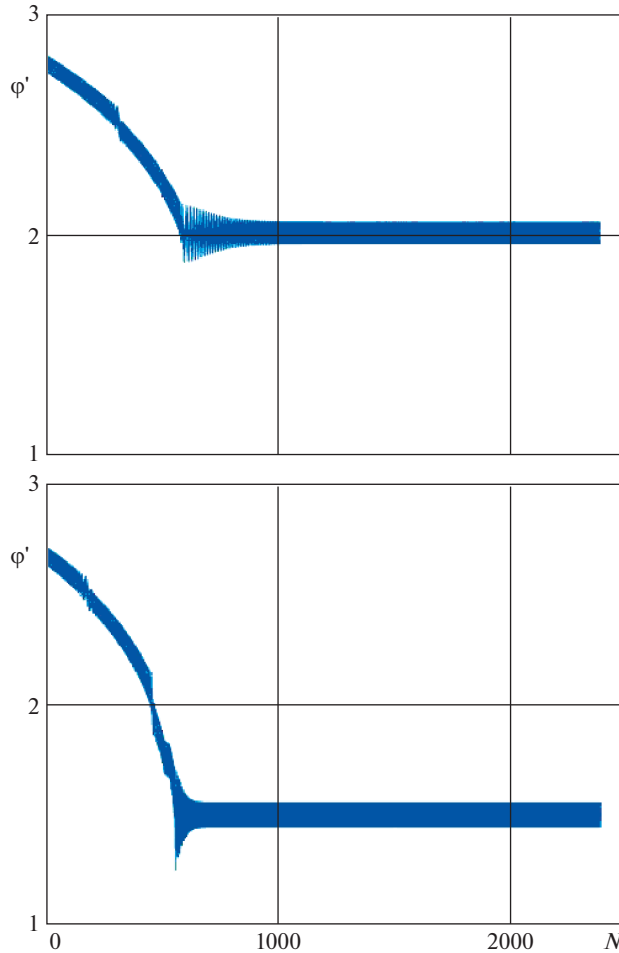


Рис. 2.

резонансного вращения 3:2, которое наблюдается, если начальные условия задать такими значениями фазовых переменных:

$$\varphi(0) = 0.3, \quad \varphi'(0) = 1.5, \quad W_3(0) = 0, \quad v(0) = 0$$

В обоих случаях наблюдается захват в резонансное вращение 3:2. Но в первом случае переменная X является 2π -периодической по τ , а во втором — 8π -периодической по τ . При этом амплитуда колебаний во втором случае отличается от амплитуды колебаний в первом случае более чем в четыре раза.

Следует отметить, что для подавляющего большинства начальных условий из окрестности резонанса 3:2 в процессе эволюции устанавливается резонансное вращение, для которого переменная $X = \varphi - 3\tau/2$ является 2π -периодической по τ , а обнаруженное 8π -периодическое решение отвечает достаточно узкому множеству начальных условий. Не исключено, что в рассматриваемой задаче существуют и резонансные вращения 3:2, для которых переменная X содержит гармоники с другими дробными частотами, например, является 4π -периодической по τ . Но для выявления таких резо-

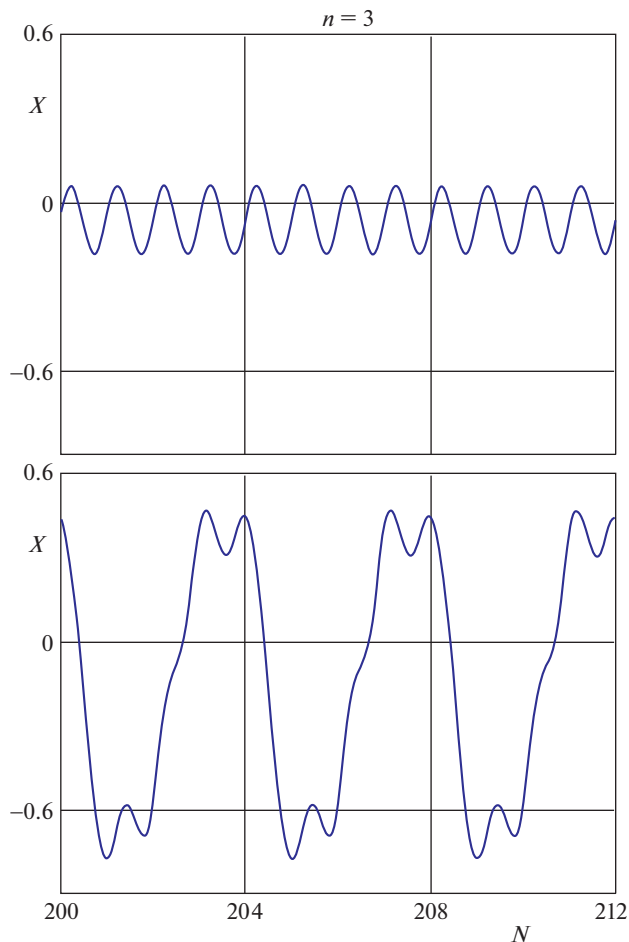


Рис. 3.

нансных вращений спутника требуется дополнительное исследование, которое выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение. В работе проведено исследование плоских вращений спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите. Получены эволюционные уравнения, описывающие нерезонансные вращения спутника. Определены условия существования и устойчивости резонансных вращений спутника. Получено аналитическое решение, описывающее плоские 2π -периодические резонансные вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите. Аналитические выводы работы подтверждаются результатами численного интегрирования уравнений вращательного движения спутника с демпфером на эллиптической орбите.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

2. *Белецкий В.В., Лавровский Э.К.* К теории резонансного вращения Меркурия // *Астрон. ж.* 1975. Т. 52. Вып. 6. С. 1299–1308.
3. *Черноушко Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // *ПММ.* 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 473–483.
4. *Черноушко Ф.Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // *ЖВММФ.* 1963. Т. 3. № 3. С. 528–538.
5. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 396 с.
6. *Маркеев А.П.* К задаче о плоских периодических вращениях спутника на эллиптической орбите // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 102–115.
7. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // *ПММ.* 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
8. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* О стационарных вращениях спутника при наличии внутренних упругих и диссипативных сил // *ПММ.* 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 627–641.
9. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // *ПММ.* 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15.
10. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // *ПММ.* 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 16–31.
11. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты на круговой орбите под влиянием внутренних упругих и диссипативных сил // *Изв. РАН. МТТ.* 2020. № 2. С. 96–111.
12. *Черноушко Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // *ПМТФ.* 1968. № 1. С. 73–79.
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
14. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

On the Flat Resonant Rotations of a Satellite with a Ball Damper in an Elliptical Orbit

N. I. Amel'kin^{a, #}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

[#] *e-mail: namelkin@mail.ru*

In the framework of M.A. Lavrent'evs model examines the influence of internal dissipative forces on rotational movement of a satellite in an elliptical orbit. Evolutionary equations describing flat non-resonant rotations of the satellite are obtained. The conditions of existence and stability of flat resonant rotations of the satellite are determined. An analytical solution describing the flat resonant rotations of the satellite in an elliptical orbit is obtained.

Keywords: satellite with damper, elliptical orbit, evolutionary equations, flat resonant rotations, stability

REFERENCES

1. *Beletskii V.V.* Motion of a Satellite with Respect to Center of Mass in Gravitational Field. Moscow: MSU, 1975. (in Russian)
2. *Beletskii V.V., Lavrovsky E.K.* To the theory of resonance rotation of Mercury // *Astron. J.*, 1975, vol. 52, no. 6, pp. 1299–1308.
3. *Chernous'ko F.L.* On the motion of a satellite about its center of mass under the action of gravitational moments // *JAMM*, 1963, vol. 27, no. 3, pp. 708–722.
4. *Chernous'ko F.L.* Resonance phenomena in the motion of the satellite relative to the center of mass // *J. Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 528–538.

5. *Markeev A.P.* Linear Hamiltonian Systems and Some Problems about the Stability of the Satellite Motion Relative to the Center of Mass. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2009.
6. *Markeev A.P.* To the problem of flat periodic rotations of the satellite in an elliptical orbit // *Mech. Solids*, 2008, no. 3, pp. 102–115.
7. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 85–94.
8. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Steady rotations of a satellite with internal elastic and dissipative forces // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 431–441.
9. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 179–189.
10. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 190–203.
11. *Amel'kin N.I.* The evolution of the rotary motion of a planet in a circular orbit under the influence of elastic and dissipative forces // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 234–247.
12. *Chernous'ko F.L.* Motion of a solid containing spherical damper // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 45–48.
13. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods for Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1974. (in Russian)
14. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Applied Methods for Oscillations Theory. Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)