УДК 51-71+530.1

ШЕСТИМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ–НЬЮТОНА

В. Ф. Чуб[1,*]

[1] Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва, Королёв, Россия

**e-mail: post2@rsce.ru*

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.
После доработки 24.03.2022 г.
Принята к публикации 25.03.2022 г.

В работе приведено специальное (шестимерное) представление алгебры Ли нерелятивистского аналога конформной группы – 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона. В отличие от обычного (четырехмерного) представления найденный набор генераторов может быть расширен до представления алгебры Ли нерелятивистского аналога 16-параметрической расширенной конформной группы. В заключение сопоставляются основное положение эрлангенской концепции Клейна ("Дано многообразие и в нем группа преобразований") и тезис автора: "пространство–время – это метафизический призрак, который должен быть исключен из научного описания природы".

Ключевые слова: группа Галилея, расширение группы, группа Галилея–Ньютона, специальная теория относительности, группа Пуанкаре, конформная группа, генератор преобразования, алгебра Ли, эрлангенская программа Клейна

DOI: 10.31857/S0032823522030043

1. Введение. Согласно школьному учебнику "классическая механика представляет собой теорию движений тел, основанную на группе Галилея" ([1], с. 149). При теоретико-групповой формулировке задач, учитывающих гравитацию, 10-параметрическую группу Галилея приходится расширять до 13-параметрической группы Галилея–Ньютона [2]. Переход от классической механики к релятивистской связан с заменой группы Галилея на ее релятивистский аналог – группу Пуанкаре [3, 4] ("*специальная теория относительности – это такая физическая теория, группой симметрии которой является группа Пуанкаре*" ([1], с. 149)). При учете гравитации 10-параметрическую группу Пуанкаре приходится расширять до 15-параметрической конформной группы [5, 6]. Конформной группе и теоретико-групповому подходу в физике посвящена обширная литература [7–10]. Далее рассматривается нерелятивистский аналог конформной группы – 15-параметрическая расширенная группа Галилея–Ньютона (упомянутая в [6], см. дополнение к 3-му изданию).

2. Расширенная группа Галилея–Ньютона

2.1. Стандартное (четырехмерное) представление. Для записи генераторов в стандартном четырехмерном представлении ниже используются традиционные переменные t, x, y, z. Применяются сокращенные (по сравнению с обычно используемыми в механике [11]) обозначения: $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$ и так далее.

Нерелятивистский аналог конформной группы определяется следующими генераторами:

1) повороты: $\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z$, $\Theta_y = x\partial_z - z\partial_x$, $\Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$

2) нерелятивистские бусты: $V_x = t\partial_x$, $V_y = t\partial_y$, $V_z = t\partial_z$

3) пространственные переносы: $R_x = \partial_x$, $R_y = \partial_y$, $R_z = \partial_z$

4) временной перенос: $T = \partial_t$

5) масштабное преобразование: $\Gamma = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$

6) нерелятивистское w-преобразование: $W = \frac{1}{2}t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z$

7) нерелятивистские **g**-преобразования: $G_x = \frac{1}{2}t^2\partial_x$, $G_y = \frac{1}{2}t^2\partial_y$, $G_z = \frac{1}{2}t^2\partial_z$

Таблица коммутаторов выписанных генераторов приведена, например, [12].

2.2. Нестандартное (шестимерное) представление. Для записи генераторов в шестимерном представлении помимо использованных в предыдущем пункте четырех переменных t, x, y, z применяются еще ρ и τ.

Рассмотрим следующие генераторы:

1) повороты: $\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z$, $\Theta_y = x\partial_z - z\partial_x$, $\Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$

2) нерелятивистские бусты: $V_x = t\partial_x$, $V_y = t\partial_y$, $V_z = t\partial_z$

3) пространственные переносы: $R_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_x$, $R_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_y$, $R_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho + \tau)\partial_z$

4) временной перенос: $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_t + t\partial_\rho + \tau\partial_t - t\partial_\tau)$

5) масштабное преобразование: $\Gamma = -\tau\partial_\rho - \rho\partial_\tau$

6) нерелятивистское w-преобразование: $W = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_t + t\partial_\rho - \tau\partial_t + t\partial_\tau)$

7) нерелятивистские **g**-преобразования:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_x - \tau\partial_x), \quad G_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_y - \tau\partial_y), \quad G_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho\partial_z - \tau\partial_z)$$

Таблица коммутаторов перечисленных пятнадцати генераторов семи разных типов идентична таблице коммутаторов генераторов из предыдущего пункта.

Замечание. Рассмотренную систему генераторов можно дополнить линейно независимым и коммутирующим со всеми другими генератором $\Phi = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \rho\partial_\rho + \tau\partial_\tau$ (в традиционной геометрической интерпретации — масштабное преобразование 6-мерного пространства).

3. Обсуждение. Исходным пунктом для построения шестимерного представления расширенной группы Галилея—Ньютона (нерелятивистского аналога конформной группы) послужил известный факт (локального) изоморфизма конформной группы и шестимерной группы вращений ([4], с. 86; [8], с. 190).

Стандартная интерпретация этого факта состоит в следующем. Есть две различные группы: конформная группа 4-мерного пространства (точнее, пространства—времени с тремя пространственными и одним временным измерениями) и группа вращений 6-мерного пространства (пространства—времени с четырьмя пространственными и двумя временными измерениями), причем у них, что нетривиально, совпадают алгебры Ли. В этой интерпретации первично пространство (4-мерное или 6-мерное), а действующая в нем группа вторична.

Автор придерживается другой интерпретации: есть конформная группа (или, как в данной статье, расширенная группа Галилея—Ньютона) и ее можно представить различными математическими способами, с использованием того или иного "пространства представления". В этой интерпретации первична группа, а пространство, в котором она "действует", вторично.

Первая интерпретация следует "эрлангенскому" подходу к построению геометрии и физики, который в общем виде начинается с констатации: "*Дано многообразие и в нем группа преобразований*" ([4], с. 8). Суть второй интерпретации можно выразить радикально: "пространство—время — это метафизический призрак, который должен быть исключен из научного описания природы" ([6], с. 47) или в более мягкой форме: приведенным на той же странице напутствием О. Блюменталя (редактора вышедшего в 1910 году сборника работ Г. Минковского) "И пусть каждый по мере своих сил способствует осуществлению смелой мечты Минковского о том, чтобы в сознании человечества для будущих поколений пространство и время низвелись до роли теней, и живым осталось бы только *пространственно-временное преобразование*".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов С.В., Шаронова Н.В.* Физика. Механика. Теория относительности. Электродинамика. М.: Просвещение, 2007. 415 с.
2. *Чуб В.Ф.* Формулировка задачи двух тел в параметрах расширенной группы Галилея // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 16–20.
3. *Зайцев Г.А.* О связи теории относительности с теорией групп // в кн.: *Тоннел М.-А.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Иностр. лит., 1962. С. 447–475.
4. *Визгин В.П.* "Эрлангенская программа" и физика. М.: URSS, 2019. 120 с.
5. *Чуб В.Ф.* Применение конформной группы в теории инерциальной навигации // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3–17.
6. *Чуб В.Ф.* Основы инерциальной навигации. М.: URSS, 2021. 192 с.
7. *Мархашов Л.М.* О конформно-инвариантных движениях материальной точки // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 4–13.
8. *Визгин В.П.* Из истории конформной симметрии в физике (о некоторых особенностях взаимосвязи физики и математики в XX веке) // Историко-математ. исслед. 1974. Вып. XIX. С. 188–219.
9. *Мархашов Л.М.* О релятивистских аналогах динамики материальной точки // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 382–395.
10. *Мархашов Л.М.* О групповой концепции Клейна в механике материальной точки // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563–569.
11. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
12. *Чуб В.Ф.* Формулировка задачи *n* тел в параметрах расширенной группы Ньютона // Изв. РАН. МТТ. 2022. (В печати)

Six-Dimensional Representation of the Extended Galilean–Newton Group

V. F. Chub[a,#]

[a] *Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Russia*

[#] *e-mail: post2@rsce.ru*

The paper presents a special (six-dimensional) representation of the Lie algebra of the nonrelativistic analogue of the conformal group — 15-parametric extended Galilean–Newton group. In contrast to the usual (four-dimensional) representation, the found set of infinitesimal operators can be obviously extended to represent the Lie algebra of the nonrelativistic analogue of the 16-parameters extended conformal group. In conclusion, the main position of Klein's Erlangen concept ("Given a variety and in it a group of transformations") and the author's thesis "space-time is a metaphysical ghost that should be excluded from the scientific description of nature" are compared.

Keywords: Galilean group, group extension, Galilean–Newton group, special theory of relativity, Poincare group, conformal group, infinitesimal operator of transformation, Lie algebra, Klein Erlangen program

REFERENCES

1. *Gromov S.V., Sharonova N.V.* Physics. Mechanics. Relativity. Electrodynamics. Moscow: Prosveshchenie, 2007. 415 p. (in Russian)
2. *Chub V.F.* Statement of the two-body problem in the parameters of the extended Galilei group // Mech. Solids, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 385–389.
3. *Zaitsev G.A.* On the Relation between the Theory of Relativity and the Theory of Groups // in: *Tonnelat M.-A.* Foundations of Electromagnetism and Relativity. Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, pp. 447–475. (in Russian)
4. *Vizgin V.P.* Erlangen Program and Physics. Moscow: URSS, 2019. 120 p. (in Russian)
5. *Chub V.F.* Use of the conformal group in the theory of inertial navigation // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 5, pp. 1–12.
6. *Chub V.F.* Foundations of Inertial Navigation. Moscow: URSS, 2021. 192 p. (in Russian)
7. *Markhashov L.M.* On conformally-invariant motions of a material point // JAMM, 1966, vol. 30, iss. 1, pp. 1–12.
8. *Vizgin V.P.* From the history of conformal symmetry in physics (about some features of the relationship between physics and mathematics in the 20th centure // in: Historical and Mathematical Research, 1974, iss. 19. pp. 188–219. (in Russian)
9. *Markhashov L.M.* On relativistic analogues of particle dynamics // JAMM, 1989, vol. 53, iss. 3, pp. 289–300.
10. *Markhashov L.M.* Klein's group-theoretic conception in the mechanics of a material point // JAMM, 1992, vol. 56, iss. 4, pp. 469–475.
11. *Zhuravlev V.Ph.* Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008. 304 p. (in Russian)
12. *Chub V.F.* Statement of the N body problem in the parameters of the extended Newton group // Mech. Solids, 2022. (In press).