УДК 532.23

К 120-летию Л.Н. Сретенского

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СЕЙШ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

С. В. Нестеров[1,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail:bayd@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.
После доработки 15.03.2022 г.
Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассмотрены стоячие волны (сейши) в прямоугольном канале переменной глубины в случае, когда глубина канала монотонно меняется от нулевого значения. Для решения задачи использован модифицированный метод укоренной сходимости. Найдены формы сейш в зависимости от ширины канала для различных профилей дна. Проанализировано поведение собственных частот для различных отношений между глубиной и шириной канала.

Ключевые слова: канал, стоячая волна, сейши, собственные частоты, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S0032823522030080

1. Введение. Волновые движения в прямоугольном канале заданной длины, постоянной ширины и глубины изменяющейся вдоль канала рассмотрены в классических монографиях [1, 2]. В рамках рассмотренных постановок были изучены волновые движения жидкости в частных случаях, когда профиль дна стремится к нулю таким образом, что решение задачи нахождения собственных частот и форм (сейш) колебаний можно найти аналитически. Сейшевые колебания в замкнутом водоеме, состоящем из длинного узкого канала постоянного сечения и широкого бассейна, соединенного с каналом без перемычки, изучались [3] численно и аналитически в рамках одно- и двумерной постановок. Результаты, полученные для одномерной модели хорошо согласуются с экспериментальными измерениями частот сейш низших мод.

Сравнение экспериментальных измерений сейш в сосуде наличием резких градиентов в профиле дна (модель озера Байкал) [4] с данными численных расчетов показало возможность использования линейной модели (теории длинных волн) для расчета собственных частот и форм колебаний. Было показано, что наличие резких неоднородностей в профиле дна слабо влияющее на собственные формы, становится заметным в профилях их пространственных производных даже в том случае, когда эта неоднородность существует на большой глубине от поверхности.

Волновые движения в канале переменной глубины – традиционный предмет изучения в океанологии и геофизики. Так, например, задачи о собственных колебаниях в озерах и других замкнутых водоемах оказываются важными с точки зрения возникновения катастрофических явлений (сели, волны большой амплитуды). Численному

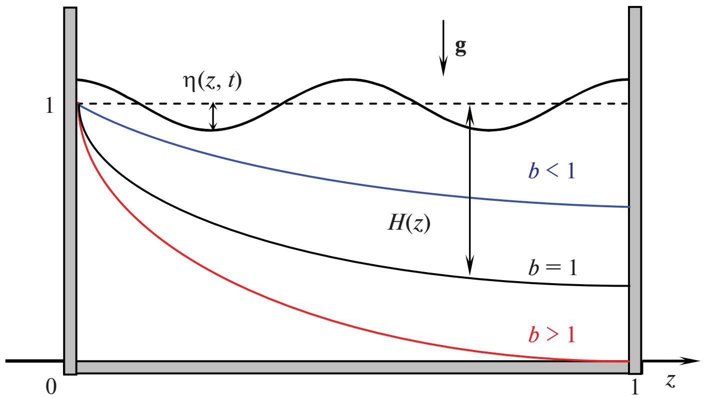

Рис. 1. Изменение глубины канала по его длине $0 \le z \le 1$.

расчету собственных частот колебаний озер Швейцарии выполненному в рамках гидродинамического моделирования посвящена работа [5].

Аналитические также широко используются для решения качественных задач. В частности распространение волн в полузакрытом канале с линейным выходом профиля глубины на постоянную величину проанализирована аналитически [6]. В то же время вопрос о собственных формах сейш и их спектральных свойствах в канале конечной ширины и гладким профилем дна остался не исследованным. Ниже предложена модификация метода ускоренной сходимости [7] для анализа задач на собственные значения сейш, в каналах с такими профилями дна, когда аналитическое решение оказывается невозможным.

2. Постановка задачи. Обозначим через $\eta(x,t)$ возвышение свободной поверхности жидкости, заполняющей канал; $h(x)$ – глубина жидкости, l – длина канала, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести (рис. 1). Показано, что возвышение свободной поверхности $\eta(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [1, 2]

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \tag{2.2}$$

Полагая $h(x) = h_0 H(z)$, где $z = x/l$, будем искать периодические по времени решения уравнения (1.1) в виде

$$\eta = u(z)\exp(i\omega t) \tag{2.3}$$

Подставляя представление (2.3) в уравнение (2.1) и граничные условия (2.2), приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\left(H(z)\frac{du}{dz}\right) + \lambda u = 0\\ \frac{du}{dz}(0) = \frac{du}{dz}(1) = 0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\lambda = \omega^2 l^2/(gh_0)$ – собственное число задачи Штурма–Лиувилля, формулируемая следующим образом: требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи (2.4). Искомые значения параметра λ называются собственными числами задачи, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями или формами колебаний (сейши).

3. Выбор функции $H(z)$. При изучении сейш в каналах наиболее часто используется модель с вертикальными стенками (дно с обрывом), которые часто встречаются в искусственных сооружениях. В природных условиях, а также иногда и гидротехнических конструкциях и водохранилищах, в профиль дна обычно таков, что глубина канала плавно уменьшается до нуля при приближении к берегу. Учитывая приведенные соображения, а также предполагая монотонный характер профиля дна, выберем зависимость безразмерной глубины канала в виде

$$H(z) = 1 - \exp(-bz) \tag{3.1}$$

В точке $z = 0$, $H(0) = 0$, параметр b описывает быстроту увеличения глубины при удалении от береговой линии. Значениям $b < 1$ соответствует пологий профиль дна, а $b > 1$ – крутой (см. рис. 1).

4. Метод решения. Задача (2.4) относится к классу задач, детально описанных в [7], однако применить метод ускоренной сходимости напрямую нельзя, поскольку $H(z)|_{z=0} = 0$. Поступим следующим образом. Рассмотрим наряду с задачей (2.4) задачу вида

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\left[(1 - \exp(-b(x + a)))\frac{du}{dz}\right] + \lambda u = 0\\ \frac{du}{dz}(0) = \frac{du}{dz}(1) = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь “регуляризирующий” параметр $a > 0$.

Учитывая, что $\forall z \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$1 - \exp(-bz) < 1 - \exp(-b(z + a)), \tag{4.2}$$

все собственные числа краевой задачи (4.1) будут больше, чем числа исходной задачи (2.4).

Будем решать методом ускоренной сходимости задачу Штурма–Лиувилля (4.1) для набора последовательно уменьшающихся параметров $a_k = 10^{-(k+2)}$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда набор найденных собственных значений задачи (4.1) $\tilde{\lambda}_n(a_k)$ при $a_k \to 0$ будет образовывать монотонно убывающую последовательность собственных чисел, сходящуюся сверху к искомым собственным числам задачи (2.4). Ограничивая проведение такой процедуры значением параметра $a = 10^{-7}$, получаем значения пяти первых собственных чисел с относительной точностью 10^{-6}. Построенные зависимости собственных частот $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ (рис. 2) показывают их монотонно возрастающую зависимость от параметра пологости дна с выходом на предельное значение. Проведенные вычисления для больших $b = 10$–30 показали, что предельная собственная частота, отвечающая случаю вертикальной стенке на левой границе канала, оказывается равной $\omega_\perp = \pi n$.

На рис. 3 изображены первая, вторая и третья собственные формы сейш для случая $b = 3$. Графики представляют собой знакопеременные функции с числом нулей, определяемых номером моды.

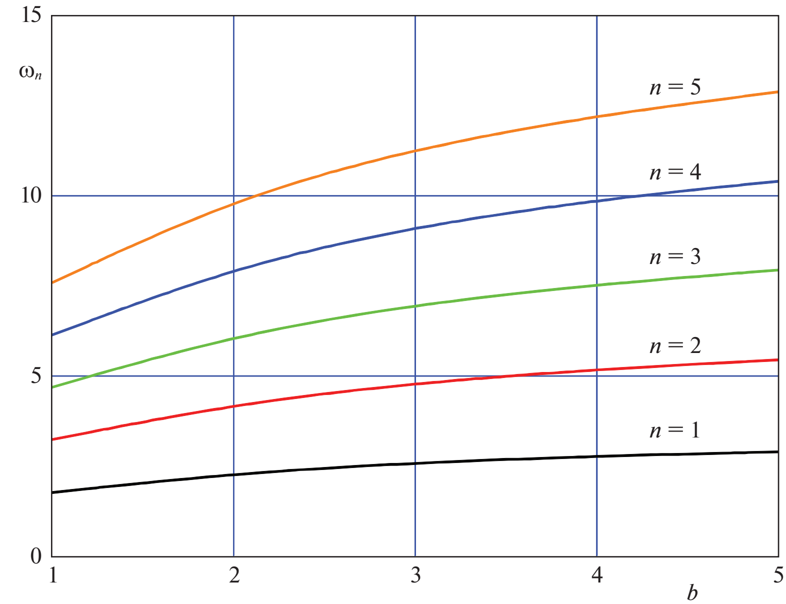

Рис. 2. Зависимость собственных частот сейш ω_n от параметра пологости дна b.

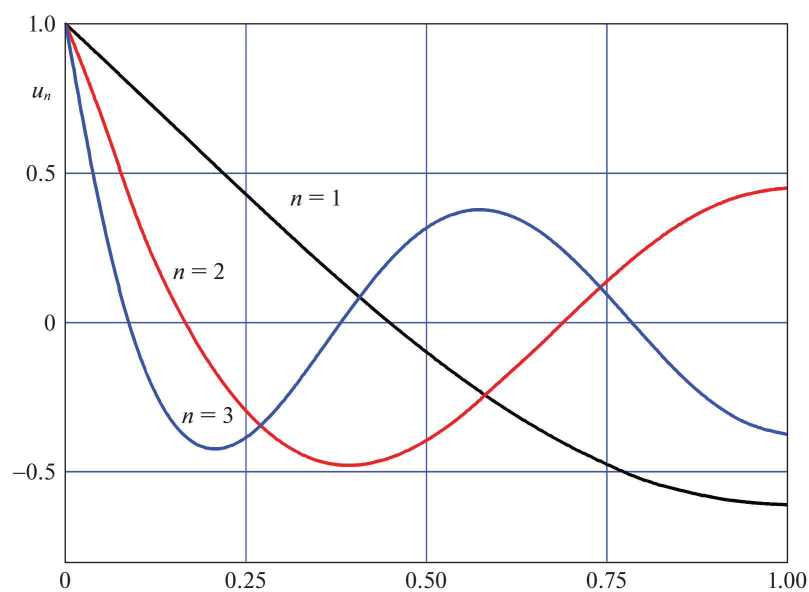

Рис. 3. Профили собственных форм сейш u_n для первых трех мод ($b = 3$).

Таким образом, был разработан алгоритм, позволяющий применять метод ускоренной сходимости для краевых задач, с регулярными особенностями ($H(z) = \mathrm{const} \cdot z + \underline{\underline{O}}(z^2)$) на одной из граничных точек задачи.

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. *Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В.* Сейшевые колебания в прямоугольном канале с резким расширением поперечного сечения // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 22–32.
4. *Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В.* Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С.
5. *Siegenthaler C.* Seiches and the slide/seiche dynamics; subcritical and supercritical subaquous mass fows and their deposits. Examples from Swiss lakes // Swiss J. Geosci. 2021. V. 114(17). https://doi.org/10.1186/s00015-021-00394-6
6. *Magdalena I., Karima N., Rif'atin H.Q.* Resonant periods of seiches in semi-closed basins with complex bottom topography // Fluids. 2021. V. 6(181). https://doi.org/10.3390/fluids6050181
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2005. 255 p.

Natural Frequencies and Seiche in the Channel of Variable Depth

S. V. Nesterov[a,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

Standing waves (seiches) in a rectangular channel of variable depth are considered in the case when the channel depth monotonically changes from zero. The modified accelerated convergence method was used to solve the problem. The dependences of seiche forms from channel width were obtained for different bottom profiles. The behavior of natural frequencies for channel depth profiles is analyzed.

Keywords: channel, standing wave, seiches, natural frequencies, accelerated convergence method

REFERENCES

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1993.
2. *Sretensky L.* The Theory of Wave Motion of Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 815 p. (in Russian)
3. *Bukreev V.I., Sturova I.V., Chebotnikov A.V.* Seiche oscillations in a rectangular channel with an abrupt expansion of the cross section // J. Appl. Mec.&Techn. Phys., 2013, vol. 54, no. 4, pp. 531–540.
4. *Akulenko L.D., Kalinichenko V.A., Nesterov S.V.* Seiches in a channel with a sharp variation in the bottom relief // Fluid Dyn., 2012, no. 3, pp. 387–394.
5. *Siegenthaler C.* Seiches and the slide/seiche dynamics; subcritical and supercritical subaquous mass fows and their deposits. Examples from Swiss Lakes // Swiss J. Geosci., 2021. vol. 114(17). https://doi.org/10.1186/s00015-021-00394-6
6. *Magdalena I., Karima N., Rif'atin H.Q.* Resonant periods of seiches in semi-closed basins with complex bottom topography // Fluids, 2021, vol. 6(181). https://doi.org/10.3390/fluids6050181
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 255 p.