

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):
ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ИНДЕНТИРОВАНИИ И СИЛА ТРЕНИЯ**

© 2022 г. И. А. Солдатенков^{1,*}

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 31.12.2021 г.

После доработки 31.03.2022 г.

Принята к публикации 05.04.2022 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. С привлечением первого начала термодинамики решена задача по определению диссипации энергии в вязкоупругом слое при заданном законе подвода/отвода индентора. На основе этого решения произведен расчет силы трения при скольжении шероховатого контртела по вязкоупругому слою. Результаты расчетов свидетельствуют о существенном влиянии скачкообразного изменения контактного зазора во времени на диссипацию энергии и силу трения.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругий слой, межмолекулярное взаимодействие, диссипация энергии, трение

DOI: 10.31857/S0032823522030109

При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора l между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [13–15]) и объемным (уточненная постановка [16–20]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров. Впервые подобное изменение было теоретически описано применительно к подпружиненному контакту твердых тел при наличии сил Лондона–Ван-дер-Ваальса [21]. В дальнейшем скачкообразное изменение параметров адгезионного контакта упругих тел рассматривалось во многих исследованиях, среди которых отметим работы [12–14, 22], использующие самосогласованный подход при постановке задачи.

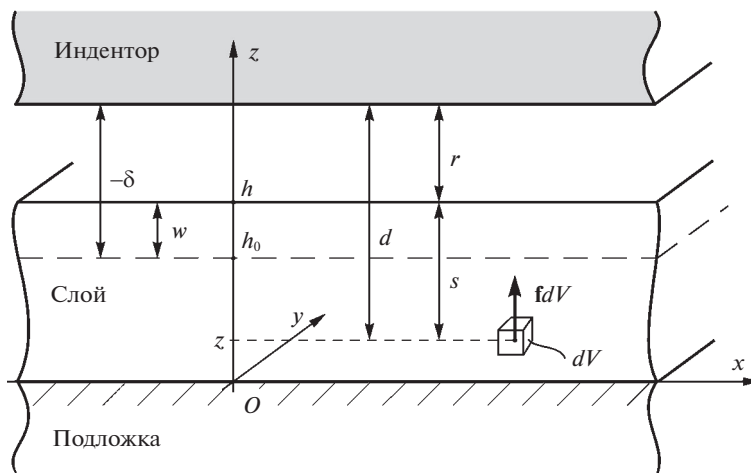


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой.

Аналогичная самосогласованному подходу концепция используется в теории бесконтактного трения, допускающей существование контактного зазора между трущимися поверхностями [23–27]. Были рассмотрены различные механизмы такого трения, например, эмиссия фононов, джоулева диссипация, эффекты сил Ван-дер-Ваальса.

Ранее был выполнен расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) и диссипации энергии в вязкоупругом слое при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи) при заданном контактном зазоре $r(t)$ [28], а также был выполнен расчет зазора $r(t)$ при заданном законе внедрения $\delta(t)$ индентора [29].

В данной работе, на основе полученных ранее результатов [28, 29], определяется диссипация энергии в вязкоупругом слое в режиме подвода/отвода индентора при заданном законе его внедрения. На основе решения этой задачи произведен расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения. Изучается влияние скачкообразного изменения контактного зазора во времени на диссипацию энергии и силу трения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим контактное взаимодействие бесконечно протяженного плоского индентора и основания, состоящего из вязкоупругого слоя, связанного с подложкой, причем индентор и подложка являются абсолютно жесткими (рис. 1). Считается, что индентор и слой разделены контактными зазором r , обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход) [12]. Свяжем с основанием систему координат $Oxyz$, совместив ее плоскость Oxy с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты z и времени t . Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через h_0 , а в деформированном – через h .

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы та-

кой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннард-Джонса [30]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, m, n – параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7, n = 13$.

При определенных допущениях [14, 31] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу \mathbf{f} , обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси z и зависит от расстояния $d = r + s = r + h - z$ между точкой ее приложения и индентором (рис. 1), причем толщину h слоя здесь можно заменить постоянным значением h_0 , что допустимо при малых деформациях. Таким образом, если обозначить через $f_i, i = 1, 2, 3$ компоненты объемной силы в системе координат $Oxyz$, то

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z) \quad (1.2)$$

Суммирование парных взаимодействий молекул позволяет также определить полную силу p воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = \Phi(r(t)), \quad \Phi(r) = -\int_0^{\infty} f(r+s)ds, \quad (1.3)$$

которая в рамках самосогласованного подхода интерпретируется как контактное давление [12–14, 19]. Кроме того, исключив из контактного давления p силу воздействия индентора на подложку, можно определить фиктивное контактное давление p_c , обусловленное межмолекулярным воздействием индентора только на слой:

$$p_c(t) = \Phi_c(r(t)), \quad \Phi_c(r) = -\int_0^{h_0} f(r+s)ds \quad (1.4)$$

Выражения для функций $f(d)$ и $\Phi(r)$ в случае закона Леннард-Джонса приведены в [28, 29], тогда как функция $\Phi_c(r)$ имеет вид

$$\Phi_c(r) = -\frac{A_{lc}}{r_{ec}^k} \left\{ \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^k \right] - \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^l \right] \right\}, \quad (1.5)$$

где $k = m - 4, l = n - 4, H = h_0 + r$, величины A_{lc}, r_{ec} выражаются известным образом через параметры закона (1.1) [28, 29].

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.3) контактное давление прикладывается к поверхности слоя, в результате чего он деформируется [12–15]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (1.2), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–20]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает зазор r , однозначно определяющий объемную силу f_i по формуле (1.2) и контактное давление p по формуле (1.3).

Замечание 1. В работах [28, 29] расчет НДС слоя при традиционной постановке задачи выполнялся в предположении, что к его поверхности прикладывается контактное давление p . Однако это давление, согласно выражению (1.3), определяется межмолекулярным воздействием индентора не только на слой, но и на недеформируемую подложку. В связи с этим, представляется более корректным выполнять расчет НДС

слоя, полагая, что он нагружается фиктивным контактным давлением p_c вида (1.4), обусловленным межмолекулярным воздействием индентора только на слой.

Деформационные свойства слоя описываются линейным законом наследственного типа [32–34]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(z, t) &= \delta_{ij}\lambda\theta(z, t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(z, t) - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau)\theta(z, \tau)d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t - \tau)\varepsilon_{ij}(z, \tau)d\tau \equiv \\ &\equiv \delta_{ij}\lambda\theta(z, t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(z, t) + \sigma_{ij}^v(z, t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений, $\theta = \varepsilon_{kk}$, причем здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. Величины λ и μ представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции Λ, M характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой R_1 и объемной R_2 релаксации:

$$\Lambda(t) = KR_2(t) - \frac{2}{3}\mu R_1(t), \quad M(t) = \mu R_1(t), \quad (1.7)$$

причем $K = \lambda + 2\mu/3$ – мгновенный модуль объемной упругости.

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (1.6) следует дополнить формулой Коши и уравнением равновесия [32, 33]:

$$\varepsilon_{ij}(z, t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(z, t) + u_{j,i}(z, t)), \quad \sigma_{ij,j}(z, t) + f_i(z, t) = 0$$

в которых u_i – компоненты вектора перемещений, объемная сила f_i обусловлена межмолекулярным взаимодействием и определяется равенствами (1.2). Здесь и далее для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

Для дальнейших выкладок потребуется конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (1.6). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [34]: $R_1(t) = R_0e^{-\alpha t}$, $R_2(t) \equiv 0$, так что, в силу соотношений (1.7):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0e^{-\alpha t}, \quad M(t) = M_0e^{-\alpha t}, \quad (1.8)$$

где α, R_0 – заданные параметры, причем $\alpha = 1/t_r$, t_r – время релаксации, $\Lambda_0 = -2\mu R_0/3$, $M_0 = \mu R_0$. Кроме того, введем в рассмотрение длительные (равновесные) модули упругости $\lambda^\infty, \mu^\infty$, а также мгновенный B и длительный B^∞ коэффициенты упругой податливости слоя:

$$B = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad B^\infty = \frac{1}{\lambda^\infty + 2\mu^\infty} = \frac{\alpha}{\beta} B,$$

причем $\beta = \alpha - BN_0 > 0$, $N_0 = 4\mu R_0/3$ [28].

В качестве контактной характеристики будем использовать внедрение δ индентора в слой, отсчитываемое от поверхности слоя в недеформированном состоянии, т.е. от уровня $z = h_0$ (рис. 1). Отметим, что внедрение δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем последний случай изображен на рис. 1. Имеет место условие контакта

$$r(t) + w(t) = -\delta(t), \quad (1.9)$$

связывающее внедрение δ с зазором r и перемещением $w = h - h_0$ поверхности слоя вдоль оси z .

Считается, что до момента времени $t = 0$ взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением δ^s и зазором r^s , т.е.

$$\delta(t) = \delta^s, \quad r(t) = r^s; \quad t \leq 0 \quad (1.10)$$

Далее будет рассматриваться непрерывная зависимость $\delta(t)$, отвечающая переходу слоя из начального стационарного состояния (1.10) в другое стационарное состояние с конечным внедрением δ_m индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C(-\infty, \infty); \quad \delta(t) = \delta^s, \quad t \leq 0; \quad \delta(t) = \delta_m, \quad t \geq t_m, \quad (1.11)$$

где t_m – время перемещения индентора, $0 < t_m$. Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s < \delta_m \quad (1.12)$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s > \delta_m \quad (1.13)$$

Здесь и далее точкой над символом функции обозначается ее производная по времени.

Подобный характер изменения внедрения $\delta(t)$ позволяет допустить асимптотическое поведение функции $r(t)$ на бесконечности:

$$r(t) \rightarrow r_m, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где r_m – значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением δ_m .

Начальное r^s и конечное r_m значения зазора, отвечающие начальному δ^s и конечному δ_m внедрению, находятся из уравнения [29]

$$B^\infty h_0 Z \left(\begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} \right) - \begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Здесь и далее функция $Z(r)$ определяется по правилу

$$Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi_c(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix},$$

причем верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи.

Изменение зазора r во времени описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{\delta}(t) - \beta \left[B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t) \right]}{B h_0 Z'(r(t)) - 1}, \quad (1.16)$$

в котором штрих у символа функции обозначает ее производную по аргументу.

Уравнение (1.16), как и прежде [29], получается путем дифференцирования по t условия контакта (1.9), в котором граничное перемещение w , как компонента НДС слоя, известным образом выражается через функцию $r(t)$. Однако здесь для расчета НДС при традиционной постановке задачи используется фиктивное контактное давление p_c (Замечание 1), поэтому в уравнении (1.16) присутствует функция $\Phi_c(r)$, тогда как прежде использовалась функция $\Phi(r)$.

Далее будет допускаться возможность существования у функции $r(t)$ нескольких точек разрывов первого рода [35], что, в свою очередь, обусловлено тем, что знамена-

тель в правой части дифференциального уравнения (1.16) может принимать нулевые значения [29]. Решение такого уравнения может быть построено при помощи известных численных методов (например, метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности [36]) с привлечением специальной процедуры учета разрывов функции [29].

Как указывалось выше, при рассматриваемом плоскопараллельном контакте индентора и слоя (рис. 1), компоненты $\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ НДС слоя зависят только от координаты z и времени t , поэтому все они равны нулю, кроме $\epsilon_{33}, \sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$ [28]. Для этих компонент ранее были получены формулы [28], которые без труда переносятся на рассматриваемый случай функции $r(t)$ с несколькими точками разрыва первого рода:

$$\epsilon_{33}(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w_{,z}^s(z) e^{-\beta t} + \tilde{w}_{,z}(z, t) \tag{1.17}$$

$$\sigma_{11}(z, t) = \sigma_{22}(z, t) = 2\mu_* \frac{\beta}{\alpha} w_{,z}^s(z) e^{-\beta t} + \tilde{\sigma}(z, t), \quad \sigma_{33}(z, t) = -X_{,z}(z, t), \tag{1.18}$$

где $\mu_* = [1 - (\alpha - R_0)/\beta]\mu$, $w^s(z) = -B^\infty X^s(z)$,

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z, t) &= -B \left[X(z, t) + BN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X(z, \tau) d\tau \right] \\ \tilde{\sigma}(z, t) &= -B \left[\lambda X_{,z}(z, t) + \frac{3}{2} KBN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X_{,z}(z, \tau) d\tau \right] \\ X(z, t) &= \begin{pmatrix} p_c(t)z \\ \mathcal{R}(f_3)(z, t) \end{pmatrix}, \quad X^s(z) = \begin{pmatrix} p_c^s z \\ \mathcal{R}(f^s)(z) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.19}$$

В равенствах (1.19), как и прежде, верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, причем записи верхнего варианта предполагают, что НДС слоя обусловлено фиктивным контактным давлением p_c , согласно Замечанию 1. Присутствующие в равенствах (1.19) функции $f_3(z, t)$ и $p_c(t)$ определяются по формулам (1.2) и (1.4), $f^s(z) = f(r^s + h_0 - z)$, $p_c^s = \Phi_c(r^s)$. Оператор \mathcal{R} был определен ранее [28], здесь же только отметим, что он действует на функцию по аргументу z .

Из определения (1.6) величины σ_{ij}^v и формул (1.17), (1.18) вытекает соотношение

$$\epsilon_{33}(z, t) = -B[X_{,z}(z, t) + \sigma_{33}^v(z, t)], \tag{1.20}$$

которое будет использоваться в следующем разделе.

Важной особенностью формул (1.17), (1.18) является то, что их правые части и, следовательно, компоненты НДС слоя, выражаются через функцию $X(z, t)$. Согласно равенствам (1.2), (1.4) и (1.19), эта функция целиком определяется функцией $r(t)$, которая, будучи решением дифференциального уравнения (1.16), находится по известному внедрению $\delta(t)$ индентора. Указанные обстоятельства позволят нам в дальнейшем на основе формул (1.17), (1.18) рассчитать диссипацию энергии в вязкоупругом слое при заданном внедрении $\delta(t)$, ввиду того, что диссипация энергии целиком определяется эволюцией во времени НДС слоя [28]. В свою очередь, это позволит найти гистерезисные потери при подводе—отводе индентора и силу трения скольжения шероховатого индентора о вязкоупругий слой.

2. Расчет диссипации энергии. При деформировании некоторого объема $V = Sh_0$ вязкоупругого слоя площадью S на промежутке времени $[t_1, t_2]$ происходит диссипация

энергии $D_{[t_1, t_2]}$, определяемая как теплота, выделенная объемом V за это время. Согласно первому началу термодинамики [33]:

$$D_{[t_1, t_2]} = \int_V W_{[t_1, t_2]} dV - [U(t_2) - U(t_1)], \quad (2.1)$$

где U – внутренняя энергия, которая является функцией состояния слоя и при неизменной температуре определяется эволюцией его НДС,

$$W_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (2.2)$$

– удельная работа деформации на промежутке $[t_1, t_2]$. Здесь для простоты опускается аргумент z у функций, интеграл (2.2) понимается в смысле Стильбеса [35].

В дальнейшем также будет использоваться удельная потенциальная энергия Π упругой деформации. Она определяется через компоненты ε_{ij} по известной формуле [37], которая для рассматриваемого случая НДС имеет вид [28]

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2B} \varepsilon_{33}^2, \quad \Pi^\infty(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2B^\infty} \varepsilon_{33}^2, \quad (2.3)$$

причем последнее выражение определяет потенциальную энергию с длительными модулями упругости λ^∞ и μ^∞ , которая отвечает стационарному состоянию слоя.

Как указывалось в предыдущем разделе, функция $r(t)$ может иметь разрывы первого рода. Учитывая это, допустим, что функции $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ тоже имеют точку разрыва $\hat{t} \in [t_1, t_2]$ первого рода, являясь кусочно-гладкими.

Отметим, что при наличии у функций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ разрывов в одной и той же точке \hat{t} , интеграл Стильбеса (2.2), представляющий работу деформации, не существует [35]. Однако, исходя из физического смысла работы, можно выполнить регуляризацию этого интеграла. Для этого следует заменить скачкообразное изменение функции $r(t)$ в произвольно малой окрестности ($\hat{t} - \mu, \hat{t} + \mu$) точки \hat{t} некоторым непрерывным изменением и вычислить соответствующие функции $\varepsilon_{ij}(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ и интеграл (2.2). После этого для полученного интеграла необходимо выполнить предельный переход $\mu \rightarrow 0$, приводящий к исходным разрывам функций $r(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ в точке \hat{t} . В результате, как и прежде [28], выражение (2.2) для удельной работы деформации можно представить в следующем виде

$$W_{[t_1, t_2]} = \Pi(\varepsilon_{ij}^+(\hat{t})) - \Pi(\varepsilon_{ij}^-(\hat{t})) + \sigma_{ij}^v(\hat{t}) [\varepsilon_{ij}^+(\hat{t}) - \varepsilon_{ij}^-(\hat{t})] + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_{ij}^\pm(\hat{t}) = \lim_{t \rightarrow \hat{t} \pm 0} \varepsilon_{ij}(t)$, функция $\sigma_{ij}^v(t)$ определена в соотношении (1.6), а интеграл понимается в смысле Римана и берется отдельно по полуинтервалам $[t_1, \hat{t})$ и $(\hat{t}, t_2]$ непрерывности подынтегрального выражения. Выражение (2.4) без труда обобщается на случай нескольких точек разрыва первого рода функций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$ – в этом случае в правой части равенства (2.4) следует выполнить суммирование по всем точкам разрыва.

В соответствии с допущениями (1.11) и (1.14), далее будет рассматриваться процесс деформирования слоя из стационарного состояния $\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^s$, $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^s$, $t \leq 0$, отвечающего $\delta(t) = \delta^s$, $r(t) = r^s$, в асимптотически стационарное состояние $\varepsilon_{ij}(t) \rightarrow \varepsilon_{ij}^\infty$,

$\sigma_{ij}(t) \rightarrow \sigma_{ij}^\infty$, $t \rightarrow \infty$, отвечающее $\delta(t) = \delta_m$, $r(t) = r_m$. Для каждого такого состояния внутренняя энергия U вязкоупругого слоя определяется по формуле [28]

$$U = \int_V \Pi^\infty(\epsilon_{ij}) dV \quad (2.5)$$

Подстановка выражения (2.5) в равенство (2.1) позволяет получить следующее выражение для удельной диссипации энергии d^∞ за время рассматриваемого процесса деформирования слоя:

$$d^\infty \equiv \frac{1}{S} \lim_{t \rightarrow \infty} D_{[0,t]} = \int_0^{h_0} \left\{ W^\infty(z) - \left[\Pi^\infty(\epsilon_{ij}^\infty(z)) - \Pi^\infty(\epsilon_{ij}^s(z)) \right] \right\} dz, \quad (2.6)$$

причем $W^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} W_{[0,t]}$. При выводе этого выражения интегрирование по объему $V = Sh_0$ слоя было сведено к интегрированию по его толщине ввиду того, что компоненты ϵ_{ij} , σ_{ij} НДС слоя зависят только от координаты z и времени t .

В силу соотношений (2.3), (2.4), правая часть равенства (2.6) определяется эволюцией во времени компонент ϵ_{ij} , σ_{ij} НДС слоя. Заменим в (2.6) эти компоненты их выражениями (1.18) и (1.20), отметив, что выражение (1.20) содержит непрерывную по z функцию $\sigma_{33}^V(z, t)$ и, поэтому, позволяет эффективно определять скачки функций в правой части равенства (2.4). В результате можно установить, что

$$d^\infty = \frac{BN_0}{\alpha} B^\infty [\beta I^\infty - (K^\infty - K^s)/2], \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} I^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} I(t), \quad K^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, t), \quad K^s = K(0, 0) \\ I(t) &= \int_0^t [K(\tau, \tau) - e^{-\beta\tau} K(0, \tau) - \beta \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-s)} K(\tau, s) ds] d\tau \\ K(t, \tau) &= \int_0^{h_0} \left(\frac{p_c(t)p_c(\tau)}{\mathcal{R}(f_3)_{,z}(z, t) \mathcal{R}(f_3)_{,z}(z, \tau)} \right) dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

Формула (2.7) позволяет рассчитать диссипацию энергии в вязкоупругом слое при заданном внедрении $\delta(t)$. Действительно, правая часть равенства (2.7) целиком определяется функцией $r(t)$, т.к. через эту функцию, согласно формулам (1.2) и (1.4), определяются функции $f_3(z, t)$ и $p_c(t)$. В свою очередь, функция $r(t)$ находится из дифференциального уравнения (1.16) по заданному внедрению $\delta(t)$.

В качестве примера были выполнены расчеты диссипации энергии при линейном изменении внедрения δ индентора за время t_m от начального δ^s до конечного δ_m значений:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta^s, & t \leq 0 \\ \delta^s + \dot{\delta}t, & t \in (0, t_m), \\ \delta_m, & t \geq t_m \end{cases} \quad (2.9)$$

где $\dot{\delta}$ – постоянная скорость внедрения. Целью расчетов было построение зависимости диссипации энергии d^∞ от конечного внедрения δ_m при неизменном значении δ^s .

Время t_m перемещения индентора определялось по формуле $t_m = (\delta_m - \delta^s)/\dot{\delta}$, что обеспечивало одинаковую скорость $\dot{\delta}$ внедрения для каждого значения δ_m . Для определенности рассматривался режим подвода (1.12).

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $m = 7$, $n = 13$, $r_{ec} = 1$ нм, $r_{eb} = 0.5 r_{ec}$, $h_0 = 5$ нм, $\delta^s = -4 r_{ec}$, $\dot{\delta} = 2.625$ мкм/с, $\lambda = 2.08$ МПа, $\mu = 3.13$ МПа, $R_0 = 0.8 \times 10^3$ с⁻¹, $t_r = 10^{-3}$ с, при этом значения мгновенного и длительного коэффициентов упругой податливости слоя составляли $B = 0.12$ МПа⁻¹ и $B^\infty = 0.2$ МПа⁻¹, соответственно. Кроме того, полагалось, что $A_{1c} = (6\pi)^{-1} A_H$ [12] и $A_{1b} = 10 A_{1c}$, где A_H – постоянная Гамакера, $A_H = 10^{-19}$ Дж.

Для графического представления результатов расчетов здесь и далее будут использоваться безразмерные величины: $\tilde{t} = t/t_r$, $\tilde{r} = r/r_{ec}$, $\tilde{r}_m = r_m/r_{ec}$, $\tilde{\delta}_m = \delta_m/h_0$, $\tilde{d}^\infty = d^\infty/d_*$, где $d_* = (B^\infty - B)h_0 p_*^2$, $p_* = A_{1c}/r_{ec}^{m-4}$. Сплошная/штриховая линия на графиках отвечает уточненной/традиционной постановке задачи. Для обеспечения условия малости деформаций, при расчетах значения внедрения $\delta(t)$ полагались существенно меньшими толщины h_0 слоя.

Отметим, что величина p_* может быть использована в качестве оценки контактного давления, определяемого по формуле (1.3), причем p_* выражается через постоянную Гамакера [12] или поверхностную энергию [14]. Величина d_* совпадает с удвоенным значением диссипации энергии d^∞ в случае ступенчатого изменения контактного давления от 0 до p_* при традиционной постановке задачи [28]. Для выбранных параметров задачи $p_* = 5.305$ МПа, $d_* = 1.126 \times 10^{-2}$ Дж/м².

На рис. 2 показаны расчетные зависимости диссипации энергии d^∞ от конечного внедрения δ_m при уточненной и традиционной постановках задачи.

Представленные зависимости имеют особенности в виде разрывов и изломов, которые вызваны резкими изменениями вида функции $r(t)$ с ростом внедрения δ_m . В свою очередь, эти изменения обусловлены немонотонным характером функции $Z(r)$ и могут быть объяснены с помощью графического описания эволюции контактного зазора r в процессе подвода/отвода индентора [29]. Таким образом можно установить, что разрыв зависимости $d^\infty(\delta_m)$ происходит при $\delta_m = \delta_+^\infty$, причем величина δ_+^∞ известным образом определяется видом функции $Z(r)$ и ее значения в безразмерном виде $\tilde{\delta}_+^\infty = \delta_+^\infty/h_0$ показаны на рис. 2. Сам разрыв обусловлен появлением скачка у функции $r(t)$ с резким изменением ее конечного значения r_m , тогда как излом зависимости $d^\infty(\delta_m)$ связан с возникновением ситуации, когда скачок функции $r(t)$ происходит в период $(0, t_m)$ изменения внедрения $\delta(t)$.

Подобные изменения вида функции $r(t)$ иллюстрируются рис. 3, на котором эта функция показана для точек А ($\tilde{\delta}_m = -0.52$), В ($\tilde{\delta}_m = -0.464$) и С ($\tilde{\delta}_m = -0.44$), расположенных на графике $d^\infty(\delta_m)$ до и после разрыва/излома (рис. 2). Для определенности используется уточненная постановка задачи.

Согласно вышеизложенному, и это подтверждается расчетами, зависимость $d^\infty(\delta_m)$ представляется гладкой линией без разрыва и излома, если для каждого значения δ_m

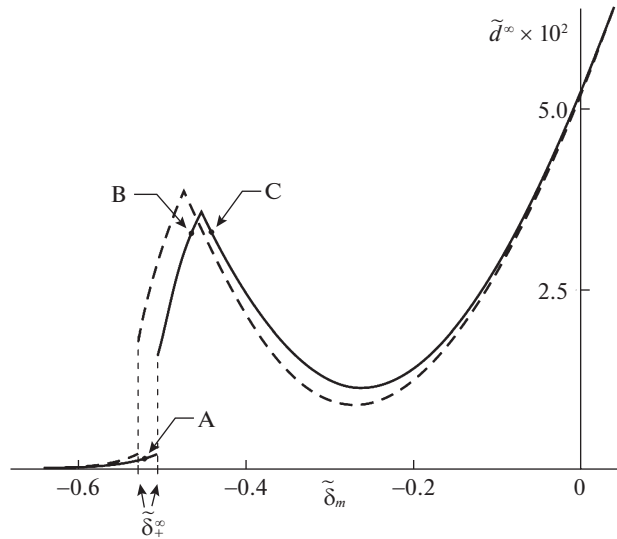


Рис. 2. Зависимости диссипации энергии d^∞ от конечного внедрения δ_m . Точки А, В и С соответствуют значениям $\delta_m = -0.52, -0.464$ и -0.44 . Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

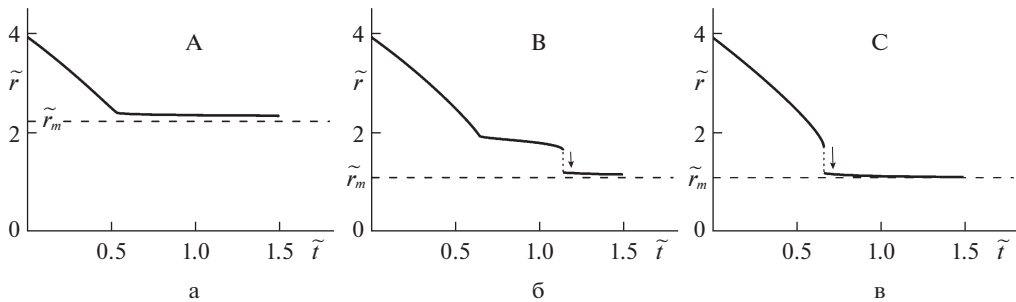


Рис. 3. Зависимости контактного зазора r от времени t в режиме подвода индентора для точек А, В и С на рис. 2.

функция $r(t)$ не имеет скачков и значение r_m , как решение уравнения (1.15), непрерывно зависит от δ_m . Для выполнения этих условий достаточно, чтобы [29]

$$B^\infty h_0 Z'(r) < 1; \quad r \in (0, \infty) \tag{2.10}$$

Нарушение условия (2.10) приводит к скачкообразному росту диссипации энергии d^∞ при достижении внедрением δ_m критического значения δ_+^∞ (рис. 2).

Представленные на рис. 2 графики демонстрируют близость значений диссипации энергии d^∞ для уточненной и традиционной постановок задачи при больших значениях δ_m . Такая близость объясняется тем, что при больших внедрениях индентора за-

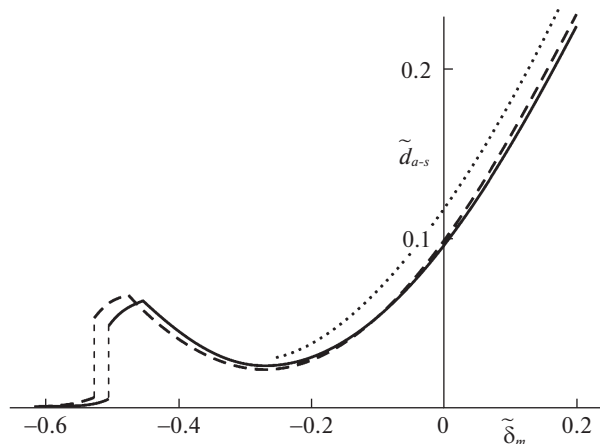


Рис. 4. Зависимости гистерезисных потерь d_{a-s} от конечного внедрения δ_m . Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи. Пунктирная линия отвечает традиционной постановке задачи при допущении, что слой нагружается контактным давлением p .

зор r становится малым и межмолекулярное взаимодействие обуславливается главным образом малыми значениями аргумента функции $f(r + s)$, присутствующей в равенствах (1.2)–(1.4). В свою очередь, это приводит к тому, что функции $K(t, \tau)$ и, следовательно, значения диссипации энергии d^∞ для уточненной и традиционной постановок задачи, определяемые по формулам (2.7), (2.8), становятся близкими друг к другу. Указанные обстоятельства подтверждают правомерность использования фиктивного контактного давления p_c для расчета НДС слоя при традиционной постановке задачи (Замечание 1).

Замечание 2. В режиме подвода (1.12)/отвода (1.13) индентора, приложенная к нему внешняя сила совершает работу

$$A^{\text{ext}} = \int_0^{t_m} p(t) d\delta(t),$$

причем, по закону сохранения энергии:

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta U + \Delta E,$$

где ΔU и ΔE – изменения внутренней энергии слоя и энергии поля межмолекулярного взаимодействия, приходящиеся на единицу площади слоя. Последнее равенство означает, что работа A^{ext} внешней силы не может служить мерой диссипации энергии в слое.

3. Гистерезисные потери при индентировании определяются как суммарная диссипация энергии d_{a-s} за цикл подвод–отвод индентора [38]:

$$d_{a-s} = d^\infty \Big|_{\text{app}} + d^\infty \Big|_{\text{ret}}, \quad (3.1)$$

где $d^\infty \Big|_{\text{app}}$ и $d^\infty \Big|_{\text{ret}}$ – величины диссипации энергии в режиме подвода (1.12) и отвода (1.13) индентора. Эти величины могут быть найдены на основе результатов предыдущего

раздела, однако, при этом следует учитывать определенную специфику цикла подвода—отвод индентора.

Действительно, этот цикл подразумевает, что после подвода и формирования стационарного состояния слоя (формула (1.14)), происходит отвод индентора в стационарное состояние, совпадающее с начальным для режима подвода состоянием. Другими словами, между начальными и конечными значениями внедрения и зазора, отвечающими режимам подвода и отвода индентора имеют место следующие соотношения:

$$\delta^s|_{\text{ret}} = \delta_m|_{\text{app}}, \quad \delta_m|_{\text{ret}} = \delta^s|_{\text{app}}, \quad r^s|_{\text{ret}} = r_m|_{\text{app}}, \quad r_m|_{\text{ret}} = r^s|_{\text{app}} \quad (3.2)$$

Таким образом, величины $d^{\infty}|_{\text{app}}$ и $d^{\infty}|_{\text{ret}}$ в выражении (3.1) для суммарной диссипации энергии находятся при помощи формулы (2.7) с учетом соотношений (3.2).

В качестве примера были выполнены расчеты гистерезисных потерь d_{a-s} при линейном законе (2.9) изменения внедрения $\delta(t)$ в режимах подвода и отвода индентора. Расчеты проводились при значениях параметров задачи, указанных в предыдущем разделе.

На рис. 4 показаны расчетные зависимости гистерезисных потерь d_{a-s} от конечного внедрения $\delta_m = \delta_m|_{\text{app}}$ с использованием безразмерной величины $\tilde{d}_{a-s} = d_{a-s}/d_*$. Как и следовало ожидать, имея ввиду результаты предыдущего раздела (рис. 2), при больших внедрениях δ_m уточненная и традиционная постановки задач дают близкие значения d_{a-s} .

Пунктирная линия на рис. 4 отвечает традиционной постановке задачи при допущении, что слой нагружается контактным давлением p , определяемым по формуле (1.3). Как видно, использование в качестве нагрузки фиктивного контактного давления p_c приводит к более корректным результатам расчетов (штриховая линия на рис. 2), что вполне согласуется с замечанием 1.

Обращает на себя внимание то, что зависимости $d_{a-s}(\delta_m)$ являются немонотонными и имеют локальные максимумы и минимумы. Кроме того, эти зависимости имеют особенности в виде разрывов и изломов, причины появления которых указаны в предыдущем разделе.

4. Трение скольжения. Рассмотрим межмолекулярное взаимодействие вязкоупругого слоя с шероховатым контртелом, скользящим по нему с постоянной скоростью V_s вдоль оси x (рис. 5). Предполагается, что шероховатость контртела образована множеством одинаковых неровностей трапецеидальной формы. Неровности считаются пологими, а горизонтальные части профиля контртела достаточно протяженными, так что

$$\rho \ll 1, \quad t_r \ll 2a_2/V_s, \quad t_r \ll L_0/V_s \quad (4.1)$$

Здесь и далее используются геометрические параметры неровностей, указанные на рис. 5.

Рассмотрим вначале взаимодействие со слоем единичной неровности контртела. Для этого выберем некоторый участок слоя произвольной ширины b (вдоль оси y) и длины Δx (вдоль оси x), причем $\Delta x \ll a_1 - a_2$, $\Delta x \ll 2a_2$. Принимая во внимание сделанные допущения, взаимодействие такого участка с проходящей над ним неровностью можно представить как равномерный подвод и последующий равномерный отвод поверхности контртела, которую можно считать расположенной параллельно подложке слоя (первое допущение (4.1)). Кроме того, можно считать, что после подвода/отвода поверхности контртела вязкоупругий материал слоя успевает релаксировать и прийти в стационарное состояние (второе и третье допущения (4.1)).

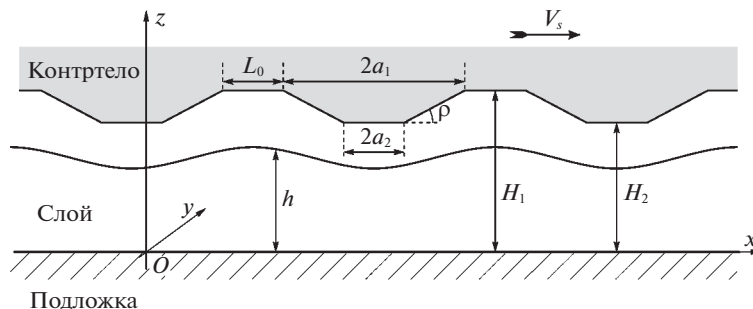


Рис. 5. Контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с шероховатым контртелом, скользящим по нему с постоянной скоростью V_s .

Подобный характер взаимодействия скользящей неровности с выбранным участком слоя вполне соответствует постановке рассмотренной выше задачи о плоскопараллельном контакте индентора с вязкоупругим слоем при наличии режимов подвода (1.12) и отвода (1.13) с линейным законом (2.9) изменения внедрения $\delta(t)$ индентора. Параметры этой задачи связаны с параметрами задачи о скольжении контртела следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \delta^s \Big|_{\text{app}} &= h_0 - H_1 \equiv \delta_1, & \delta_m \Big|_{\text{app}} &= h_0 - H_2 \equiv \delta_2 \\ \dot{\delta} &= V_s \operatorname{tg} \rho = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_m}, & t_m &= \frac{a_1 - a_2}{V_s}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где H_1, H_2 – зазоры между подложкой и горизонтальными частями профиля контртела, причем $g_m = H_1 - H_2 = \delta_2 - \delta_1$ – высота неровности (рис. 5).

С учетом вышесказанного, воспользуемся формулой (3.1) для определения диссипации энергии ΔD_1 на выбранном участке слоя при прохождении по нему единичной неровности, представив эту энергию в виде $\Delta D_1 = d_{a-s} b \Delta x$. Отсюда следует, что при прохождении неровностью пути l диссипация энергии в слое на этом пути составит

$$D_1 = d_{a-s} b l \quad (4.3)$$

Если ввести в рассмотрение силу F_1 трения неровности о слой, то по закону сохранения энергии, работа этой силы на пути l должна равняться диссипации энергии, т.е. $F_1 l = D_1$. Подстановка в это равенство выражения (4.3) позволяет установить, что

$$F_1 = b d_{a-s} \quad (4.4)$$

Аналогичное выражение для силы трения через диссипацию энергии было получено ранее для классического вязкоупругого контакта скольжения [39].

Вернемся теперь к рассмотрению контртела с множеством неровностей. Выделим некоторый участок контртела длиной $a \gg L \equiv L_0 + 2a_1$ и выбранной ранее шириной b , на котором располагается $N = a/L$ неровностей (рис. 5). В силу равенства (4.4), сила трения такого участка по слою составит $F = N F_1 = S L^{-1} d_{a-s}$, где $S = ab$ – площадь вы-

деленного участка контртела. В результате, можно найти силу трения $\bar{\tau}$, приходящуюся на единицу площади контакта (среднее напряжение трения):

$$\bar{\tau} = \frac{F}{S} = \frac{1}{L} d_{a-s} \quad (4.5)$$

Нагрузка на контртело, приходящаяся на единицу площади контакта (среднее контактное давление) определяется по формуле:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad (4.6)$$

где $T = L/V_s$ – период циклических воздействий неровностей контртела на слой, p – контактное давление, которое рассчитывается по известному зазору $r(t)$ с использованием формулы (1.3).

Располагая величинами $\bar{\tau}$ и \bar{p} , можно определить коэффициент трения скольжения [40]

$$\mu_s = \frac{\bar{\tau}}{\bar{p}}, \quad (4.7)$$

который имеет физический смысл при положительных значениях давления \bar{p} .

На основе равенств (4.5), (4.6) и решения задачи о плоскопараллельном контакте индентора с вязкоупругим слоем (разд. 2 и 3), были выполнены расчеты величин $\bar{\tau}$ и \bar{p} для различных значений максимального внедрения δ_2 контртела.

Расчеты проводились при $a_1 = 0.6$ мкм, $a_2 = 0.5$ мкм, $g_m = 5 \times 10^{-3}$ мкм, $L_0 = 1$ мкм, $V_s = 50$ мкм/с. Величина δ_1 определялась по формуле $\delta_1 = \delta_2 - g_m$ для каждого значения δ_2 . Значения остальных параметров принимались такими же, как в разд. 2.

На рис. 6а и б изображены зависимости силы трения $\bar{\tau}$ и давления \bar{p} от внедрения δ_2 при уточненной и традиционной постановках задачи с использованием безразмерной величины $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/h_0$. На рис. 6в показаны кривые зависимости силы трения $\bar{\tau}$ от давления \bar{p} , построенные на основе графиков рис. 6а и б. Каждой точке на такой кривой отвечает некоторое значение внедрения δ_2 из указанного на рис. 6а или б диапазона, причем стрелками обозначено направление роста величины δ_2 . Отметим, что неоднозначность зависимости $\bar{\tau}(\bar{p})$ обусловлена отсутствием монотонной зависимости давления \bar{p} от внедрения δ_2 (рис. 6б).

Показанные на рис. 6а зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ имеют особенности в виде разрывов и изломов, причины появления которых указаны в разд. 2. В частности, разрыв происходит при $\delta_2 = \delta_+^\infty$ и обусловлен появлением скачка у функции $r(t)$ с резким изменением ее конечного значения r_m . Аналогичное поведение функции $r(t)$ имеет место, когда значение δ_+^∞ принимает внедрение δ_1 . Однако, соответствующее внедрение $\delta_2 = \delta_1 + g_m = \delta_+^\infty + g_m$ оказывается сравнимым с толщиной h_0 слоя, что противоречит условию малости деформаций. По этой причине, на рис. 6а дополнительные особенности зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ не представлены.

Разрывы и изломы кривых зависимости силы трения $\bar{\tau}$ от давления \bar{p} (рис. 6в) являются очевидным следствием наличия таких особенностей у соответствующих зависимостей $\bar{\tau}(\delta_2)$ (рис. 6а). Отметим, что ранее скачкообразное изменение силы трения

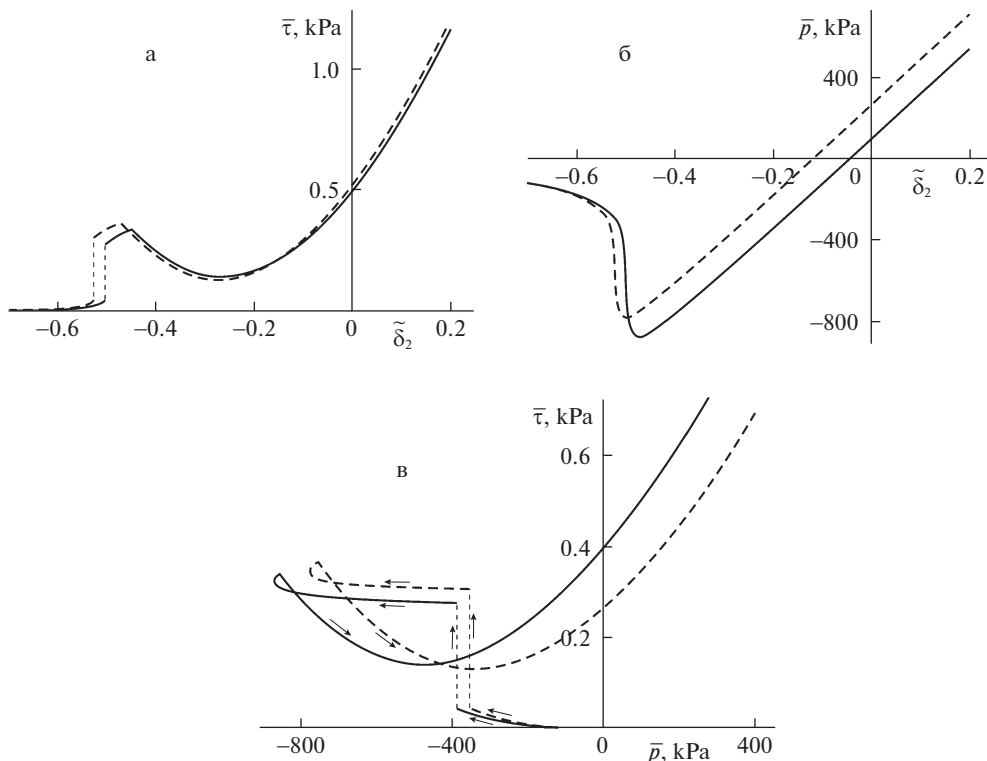


Рис. 6. Зависимости силы трения $\bar{\tau}$ (а) и давления \bar{p} (б) от внедрения δ_2 , а также силы трения $\bar{\tau}$ от давления \bar{p} (в) при $h_0 = 5$ нм. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

при изменении нормальной нагрузки наблюдалась экспериментально для зонда атомно-силового микроскопа [41].

Как и прежде, можно утверждать, что зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ и $\bar{\tau}(\bar{p})$ являются гладкими (без разрывов и изломов), если выполняется условие (2.10). Для проверки этого утверждения были выполнены расчеты при прежних значениях параметров задачи, но уменьшенной толщине слоя $h_0 = 2$ нм, когда имеет место неравенство (2.10). На рис. 7а и б изображены соответствующие зависимости $\bar{\tau}(\delta_2)$ и $\bar{p}(\delta_2)$, а на рис. 7в – зависимость $\bar{\tau}(\bar{p})$, которые, как и следовало ожидать, являются гладкими.

Сравнение рис. 6в и 7в указывает на то, что уменьшение толщины h_0 слоя приводит к существенному росту силы трения $\bar{\tau}$ в области больших (в частности, положительных) значений давления \bar{p} .

Располагая значениями силы трения $\bar{\tau}$ и давления \bar{p} (рис. 6 и 7), можно выполнить оценку коэффициента трения μ_s по формуле (4.7). В таблице 1 приводятся значения μ_s , полученные при давлении $\bar{p} = 1$ МПа. Как видно, коэффициент трения в рассматриваемом случае имеет достаточно низкие значения, что отвечает режиму сверхнизкого трения [42, 43]. Обращает на себя внимание, что увеличение толщины h_0 слоя приводит к не-

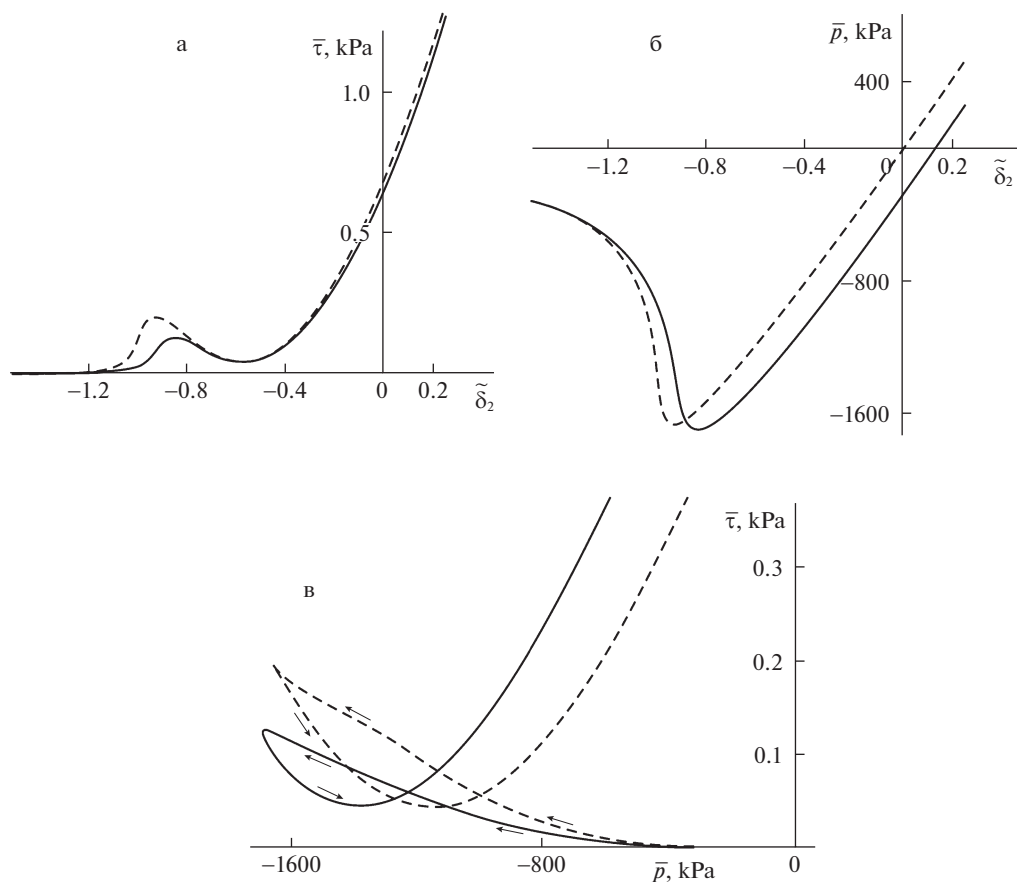


Рис. 7. Зависимости силы трения $\bar{\tau}$ (а) и давления \bar{p} (б) от внедрения δ_2 , а также силы трения $\bar{\tau}$ от давления \bar{p} (в) при $h_0 = 2$ нм. Сплошная/штриховая линия отвечает уточненной/традиционной постановке задачи.

значительному уменьшению коэффициента трения μ_s . Использование традиционной постановки задачи вместо уточненной постановки приводит к существенному занижению оценки коэффициента трения.

Выводы

1. Выполнен расчет диссипации энергии в вязкоупругом слое в режиме подвода/отвода плоского индентора при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (само согласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи).

Таблица 1. Значения коэффициента трения

	Уточненная постановка задачи		Традиционная постановка задачи	
h_0 , нм	2	5	2	5
$\mu_s \times 10^3$	2.41	2.25	1.98	1.76

2. Выявлен эффект скачкообразного роста диссипации энергии d^∞ при достижении конечным внедрением δ_m индентора критического значения δ_+^∞ (рис. 2 и 4). Реализация этого эффекта зависит, в конечном счете, от упругой податливости слоя и характера межмолекулярного взаимодействия (условие (2.10)).

3. На основе решения задачи о подводе/отводе плоского индентора выполнен расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения. Продемонстрирована возможность скачкообразного роста силы трения при увеличении внедрения контртела.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ государственной регистрации АААА-А20-120011690132-4) и при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научно-проекта № 20-58-00007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1997. V. 30. № 12. P. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. № 9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.* 2006. V. 21. № 10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math. Mech. Solids*. 2018. V. 24. № 5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Philos. Mag. A*. 1981. V. 43. № 3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of Contact and Adhesion between Viscoelastic Spheres: An Analysis of Hysteresis during Loading and Unloading // *J. Polym. Sci. Pt. B: Polym. Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech. & Phys. Solids*. 2003. V. 51. № 1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1997. V. 453. № 1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 199. № 2. P. 187–196.

17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids.* 2013. V. 61. № 6. P. 1377–1390.
19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ.* 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Int. J. Nanomech. Sci.&Technol.* 2015. V. 6. № 2. P. 117–133.
21. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.* 1954. V. 18. P. 12–24.
22. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion.* 2010. V. 86. № 11. P. 1071–1085.
23. *Teodorovich E.V.* On the contribution of macroscopic van der Waals interactions to frictional force // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1978. V. 362. P. 71–77.
24. *Sokoloff J.B.* Theory of energy dissipation in sliding crystal surfaces // *Rhys. Rev. B.* 1990. V. 42. № 11. P. 760–765.
25. *Persson B.N.J., Zhang Z.* Theory of friction: Coulomb drag between two closely spaced solids // *Rhys. Rev. B.* 1998. V. 57. № 12. P. 7327–7334.
26. *Popov V.L.* Electronic and phononic friction of solids at low temperatures // *Tribol. Int.* 2001. V. 34. P. 277–286.
27. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* Радиационная передача тепла и бесконтактное трение между наноструктурами // *УФН.* 2007. Т. 177. № 9. С. 921–951.
28. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // *ПММ.* 2020. Т. 84. № 1. С. 102–121.
29. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 44–65.
30. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
31. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.
32. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
33. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. 528 с.
34. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
35. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2003. Т. 1. 680 с. Т. 3. 728 с.
36. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
37. *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
38. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 535 с.
39. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // *Трение и износ.* 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.
40. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
41. *Wang Y., Wang J.* Friction determination by atomic force microscopy in field of biochemical science // *Micromachines.* 2018. V. 9. № 7. 313.
42. *Deng Z., Smolyanitsky A., Li Q., Feng X.Q., Rachel J., Cannara R.J.* Adhesion-dependent negative friction coefficient on chemically modified graphite at the nanoscale // *Nature Mater.* 2012. V. 11. P. 1032–1037.

43. *Baykara M.Z., Vazirisereshk M.R., Martini A.* Emerging superlubricity: A review of the state of the art and perspectives on future research // *Appl. Phys. Rev.* 2018. V. 5. № 4. 041102.

**Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer
(Self-Consistent Approach): The Energy Dissipation in Indentation and Friction Force**

I. A. Soldatenkov^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces is considered. Using the first law of thermodynamics the problem on definition of the energy dissipation in the layer is solved for a given law of the indenter approach/retraction regime. The solution is used for calculation of the friction force in sliding of a rough counterbody on the viscoelastic layer. The calculation results testify the essential influence of the jump-like behavior of the contact gap in time on the energy dissipation and friction force.

Keywords: contact problem, viscoelastic layer, intermolecular interaction, energy dissipation, friction

REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*, 1934, Bd. 69, H. 2, S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.*, 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Philos. Mag. A*, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu. Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. Appl. Mech. & Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. of Solids*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.

12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.
15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.*, 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. vol. 71. no. 8. pp. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 1377–1390.
19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Nanomech. Sci.&Technol.*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 117–133.
21. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.*, 1954, vol. 18, pp. 12–24.
22. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion*, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.
23. *Teodorovich E.V.* On the contribution of macroscopic van der Waals interactions to frictional force // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1978, vol. 362, pp. 71–77.
24. *Sokoloff J.B.* Theory of energy dissipation in sliding crystal surfaces // *Rhys. Rev. B*, 1990, vol. 42, no. 11, pp. 760–765.
25. *Persson B.N.J., Zhang Z.* Theory of friction: Coulomb drag between two closely spaced solids // *Rhys. Rev. B*, 1998, vol. 57, no. 12, pp. 7327–7334.
26. *Popov V.L.* Electronic and phononic friction of solids at low temperatures // *Tribol. Int.*, 2001, vol. 34, pp. 277–286.
27. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Radiative heat transfer and noncontact friction between nanostructures // *Phys. Uspekhi*, 2007, vol. 50, no. 9, pp. 879 – 906.
28. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.
29. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interactions for a viscoelastic layer (self-consistent approach): feature analysis of the indenter approach/retract process // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1259–1276.
30. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
31. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. L.: Academic, 2011.
32. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Academic Press, 1971.
33. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: Moscow University Press, 1975. (in Russian)
34. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)
35. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1, 3. Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian)
36. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Saint Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. (in Russian)

37. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985.
38. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers. N.Y.: John Wiley&Sons, Inc., 1961.
39. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // *J. Friction&Wear*, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.
40. *Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Komalov V.S.* Friction and Wear: Calculation Methods. Oxford: Pergamon, 1982.
41. *Wang Y., Wang J.* Friction determination by atomic force microscopy in field of biochemical science // *Micromachines*, 2018, vol. 9, no. 7, p. 313.
42. *Deng Z., Smolyanitsky A., Li Q., Feng X.Q., Rachel J., Cannara R.J.* Adhesion-dependent negative friction coefficient on chemically modified graphite at the nanoscale // *Nature Mater.*, 2012, vol. 11, pp. 1032–1037.
43. *Baykara M.Z., Vazirisereshk M.R., Martini A.* Emerging superlubricity: A review of the state of the art and perspectives on future research // *Appl. Phys. Rev.*, 2018, vol. 5, no. 4, 041102.