ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 3, с. 299–312

УДК 531.36

ОБ АНАЛОГАХ СЛУЧАЯ БОБЫЛЕВА–СТЕКЛОВА ДЛЯ ГИРОСТАТА ПРИ ДЕЙСТВИИ МОМЕНТА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А. А. Косов[1,*]

[1] *Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*
**e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.
После доработки 15.04.2022 г.
Принята к публикации 15.04.2022 г.

В статье изучаются уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки при действии момента гироскопических сил. Получены аналоги случая Бобылева–Стеклова, показано, что в отличие от классического случая твердого тела подходы Бобылева и Стеклова не являются эквивалентными и могут давать взаимодополняющие результаты. Найдены условия, при которых построены параметрические семейства частных решений, выражаемых эллиптическими функциями. Выделены шесть типов стационарных решений и методом интегральных связок Четаева получены условия их устойчивости.

Ключевые слова: гиростат, случай Бобылева–Стеклова, параметрические семейства частных решений, стационарные решения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522030134

1. Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить параметрические семейства точных решений. Такой частично интегрируемый случай с трехпараметрическим семейством решений был установлен в 1893г. независимо Д.К. Бобылевым [1] и В.А. Стекловым [2]. Хотя предложенные [1, 2] подходы формально различны, но, по существу, они эквивалентны, поэтому в монографиях по динамике твердого тела обычно используется единый термин “случай Бобылева–Стеклова” и излагается только один из этих подходов, например: [3] – подход Стеклова, [4] – подход Бобылева, [5] – случай Бобылева–Стеклова изложен на основе подхода Бобылева с использованием гамильтониана.

Начатые [1, 2] исследования, успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [6] асимптотические движения тяжелого твердого тела, предельное движение которых описывается решением Бобылева–Стеклова. Исследовалась [7] задача об орбитальной устойчивости периодических решений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Бобылева–Стеклова, к которой был применен алгоритм Ковачича [8], что позволило установить при определенных условиях свойства решений периодической системы линейного приближения и получить на этой основе выводы об устойчивости.

Подход Бобылева был обобщен П.В. Харламовым [9] на гиростат, представленный твердым телом с полостями, заполненными идеальной жидкостью. При определенных условиях [9] можно получить семейство решений уравнений движения гиростата, выражаемое через эллиптические функции. Был получен [10] аналог случая Бобылева–Харламова для уравнений движения гиростата в псевдоевклидовом пространстве.

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата с неподвижной точкой при действии момента сил (потенциальных, гироскопических, циркулярно-гироскопических). Основные цели состоят в получении аналогов случая Бобылева–Стеклова для гиростата при действии момента гироскопических сил. В этом случае подходы Бобылева и Стеклова неэквивалентны, и дают взаимодополняющие результаты по построению параметрических семейств частных решений. Рассматриваются также вопросы построения стационарных решений и получения условий их устойчивости с помощью метода интегральных связок Четаева [11].

2. Уравнения движения, первые интегралы, постановка задачи

Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda)\times\omega + M \tag{2.1}$$

$$\dot{\gamma} = \gamma\times\omega \tag{2.2}$$

Здесь $\omega = \mathrm{col}(p,q,r)$ – вектор угловой скорости, $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $I = I^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{col}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, $M = M(t,\gamma,\omega)$ – вектор момента сил, действующих на гиростат. Будем, следуя [12–14], рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции

$$J_1 = J_1(\gamma,\omega) = \omega^T I\omega + 2U(\gamma) = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

$$J_2 = J_2(\gamma.\omega) = \gamma^T(I\omega+\lambda) + \frac{1}{2}\gamma^T S\gamma = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T\gamma = 1, \tag{2.5}$$

где $S = S^T$ – некоторая симметричная матрица.

Отметим, что геометрический интеграл (2.5) имеет место при любом выборе момента $M = M(t,\gamma,\omega)$. Но для того, чтобы у системы (2.1), (2.2) существовали интеграл энергии (2.3) и интеграл площадей (2.4), момент $M = M(t,\gamma,\omega)$ не может быть произвольным, а должен удовлетворять определенным условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением, доказанным в [15].

Утверждение 1. Для того, чтобы функции (2.3) и (2.4) были первыми интегралами для системы (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы момент M был представим в виде

$$M = \gamma\times\frac{\partial U}{\partial\gamma} - \omega\times S\gamma + L(t,\gamma,\omega)\,\omega\times\gamma, \tag{2.6}$$

где $L(t,\gamma,\omega)$ – произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (2.3) и (2.4) определяют момент M в правой части (2.1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей $L(t,\gamma,\omega)\,\omega\times\gamma$. Первые два слагаемых в формуле момента (2.6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил $\gamma\times\dfrac{\partial U}{\partial\gamma}$ с потенциалом $U(\gamma)$ и момент гироскопических сил $-\omega\times S\gamma$, определяемый матрицей S.

Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $I = \mathrm{diag}(A,B,C)$, потенциал линейным $U = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$ (это соответствует тяжелому твердому телу), и задающую момент гироскопических сил матрицу также диагональной $S = \mathrm{diag}(k_1, k_2, k_3)$. Запишем систему (2.1), (2.2) в координатной форме

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + c\gamma_2 - b\gamma_3 + k_2\gamma_2 r - k_3\gamma_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2) \\ B\dot{q} &= (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + a\gamma_3 - c\gamma_1 + k_3\gamma_3 p - k_1\gamma_1 r + L(r\gamma_1 - p\gamma_3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 - a\gamma_2 + k_1\gamma_1 q - k_2\gamma_2 p + L(p\gamma_2 - q\gamma_1) \\ \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь $L = L(t, \gamma, \omega)$ – некоторая непрерывная функция t, γ, ω.

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) установить аналоги случая Бобылева–Стеклова [1, 2] для системы (2.7), (2.8) и выполнить для них интегрирование уравнений движения;

2) выявить стационарные решения, которые задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (2.7), (2.8) в нуль;

3) используя первые интегралы получить методом интегральных связок Четаева [11] достаточные условия устойчивости выявленных стационарных решений.

В ходе анализа установлено, что аналоги случая Бобылева–Стеклова для системы (2.7), (2.8) могут быть получены только при следующих дополнительных условиях: $\lambda_3 = 0$, $a = c = 0$, $k_2 = k_3 = 0$, $L = 0$. При этом уравнения движения (2.7) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} A\dot{p} = (B - C)qr + \lambda_2 r - b\gamma_3 \\ B\dot{q} = (C - A)pr - \lambda_1 r - k_1\gamma_1 r \\ C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 + k_1\gamma_1 q \end{gathered} \tag{2.9}$$

Если гиростатический момент отсутствует $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$, момент гироскопических сил не действует $(k_1 = 0)$, и моменты инерции удовлетворяют условию $B = 2A$, то система (2.8), (2.9) соответствует классическому случаю Бобылева–Стеклова [1, 2].

Интегралы (2.3) и (2.4) для системы (2.8), (2.9) перепишутся так

$$J_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2b\gamma_2 = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

$$J_2 = \gamma_1(Ap + \lambda_1) + \gamma_2(Bq + \lambda_2) + Cr\gamma_3 + \frac{1}{2}k_1\gamma_1^2 = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

3. Построение решений методом Стеклова. В этом разделе для построения решений уравнений гиростата с моментом гироскопических сил (2.8), (2.9) применим подход, предложенный В.А. Стекловым [2] для уравнений тяжелого твердого тела (см. также [3]). Будем, следуя [2], искать решение (2.8), (2.9) в виде

$$p(t) = a_0 + a_1\gamma_1(t), \quad q(t) = q_0 = \mathrm{const}, \quad r(t) = 0, \tag{3.1}$$

где a_0, a_1 – некоторые вещественные постоянные, подлежащие определению (считается [2, 3], что $a_0 = 0$). Подставляя (3.1) в систему (2.9), придем к тождествам

$$\begin{gathered} Aa_1\dot{\gamma}_1 \equiv -b\gamma_3 \\ [(A - B)a_0 q_0 + \lambda_1 q_0 - \lambda_2 a_0] + [(A - B)a_1 q_0 - \lambda_2 a_1 + b + k_1 q_0]\gamma_1 \equiv 0 \end{gathered}$$

Подставляя (3.1) в систему (2.8), получим систему трех дифференциальных уравнений для нахождения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\dot{\gamma}_1 = -q_0\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = (a_0 + a_1\gamma_1)\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q_0\gamma_1 - (a_0 + a_1\gamma_1)\gamma_2 \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что $q_0 \neq 0, a_0, a_1$ должны удовлетворять системе трех алгебраических уравнений

$$[(A-B)q_0 - \lambda_2]a_0 + \lambda_1 q_0 = 0 \tag{3.3}$$
$$[(A-B)q_0 - \lambda_2]a_1 + b + k_1 q_0 = 0; \quad q_0 = b/(Aa_1)$$

В зависимости от условий на параметры $A, B, b, \lambda_1, \lambda_2, k_1$ система (3.3) имеет следующие решения q_0, a_0, a_1:

если $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$, то $a_0 = \lambda_1/A$, $a_1 = b/(Aq_0)$, а $q_0 \neq 0$ произвольное вещественное число;

если $\lambda_1 = 0$, $(A-B)b + k_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $B \neq A$, то $q_0 = \lambda_2/(A-B)$, $a_1 = b(A - B)/(A\lambda_2)$, a_0 – произвольное вещественное число;

если $k_1 \neq 0$, $B \neq A$, $D_1 = b^2(2A-B)^2 + 4Abk_1\lambda_2 \geq 0$, то в качестве q_0 можно взять те из двух чисел $q_0 = \left(b(B-2A) \pm \sqrt{D_1}\right)/(2Ak_1)$, которые отличны от нуля и от $\lambda_2/(A-B)$, а a_0 и a_1 вычисляются по формулам $a_0 = (\lambda_1 q_0)/((B-A)q_0 + \lambda_2)$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Проведем интегрирование системы (3.2). Эта система имеет интегралы $J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ и $J_4 = a_0\gamma_1 + 0.5a_1\gamma_1^2 + q_0\gamma_2 = c_4 = \text{const}$. Используя эти интегралы, выразим γ_2 и γ_3 через γ_1:

$$\begin{gathered} \gamma_2 = \frac{1}{q_0}\left(c_4 - a_0\gamma_1 - 0.5a_1\gamma_1^2\right) \\ \gamma_3 = F(\gamma_1) = \pm\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \frac{1}{q_0^2}\left(c_4 - a_0\gamma_1 - 0.5\gamma_1^2\right)^2} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Теперь $\gamma_1(t)$ находится из первого уравнения системы (3.2) обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{d\gamma_1}{F(\gamma_1)} = -q_0(t + c_5) \tag{3.5}$$

Тем самым установлена справедливость следующих утверждений.

Утверждение 2. В случае $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где $q_0 \neq 0$ произвольное вещественное число, $a_0 = \lambda_1/A$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Утверждение 3. В случае $\lambda_1 = 0$, $(A-B)b + k_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $B \neq A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где $q_0 = \lambda_2/(A-B)$, $a_1 = b(A-B)/(A\lambda_2)$, a_0 – произвольное вещественное число.

Утверждение 4. В случае $k_1 \neq 0$, $B \neq A$, $D_1 = b^2(2A-B)^2 + 4Abk_1\lambda_2 \geq 0$, система (2.8), (2.9) имеет семейство решений (3.1), (3.4), (3.5), где в качестве q_0 допускаются те из двух чисел $q_0^{\pm} = \left[b(B-2A) \pm \sqrt{D_1}\right]/(2Ak_1)$, которые отличны от нуля и от $\lambda_2/(A-B)$, а числа a_0 и a_1 даются формулами $a_0 = \lambda_1 q_0/((B-A)q_0 + \lambda_2)$, $a_1 = b/(Aq_0)$.

Тем самым установлено, что при условиях утверждений 2–4 упоминаемые в них решения системы (2.8), (2.9) выражаются эллиптическими функциями времени. Утверждение 2 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры q_0, c_4, c_5). Утверждение 3 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры a_0, c_4, c_5). Утверждение 4 дает два двухпараметрических семейства решений (параметры c_4, c_5).

Как известно [3], эллиптический интеграл вида (3.5) берется в элементарных функциях только в случаях, когда у полинома четвертой степени в подкоренном выражении имеются кратные корни. Иногда это дает возможность получить точное решение системы уравнений гиростата (2.8), (2.9), представленное элементарными функциями в явном виде.

Пример 1. Будем рассматривать трехпараметрическое семейство систем вида (2.8), (2.9), где свободными параметрами являются A, C, λ_2, удовлетворяющие неравенствам $0 < A < C < 3A$, $\lambda_2^2 \neq A^2$, а остальные коэффициенты B, λ_1, k_1, b выражаются через параметры по формулам

$$B = 2A, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}(A + \lambda_2)}{9}, \quad k_1 = \frac{8\sqrt{3}\lambda_2}{9}, \quad b = \frac{8\sqrt{3}A}{9}$$

Тогда из утверждения 4 следует, что каждая система из названного семейства имеет точное решение

$$p(t) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad q(t) = 1, \quad r(t) = 0$$

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3}, \quad \gamma_3(t) = -\frac{t}{t^2 + 3} + \frac{\left(t^2 - 6\right)t}{\left(t^2 + 3\right)^2} \tag{3.6}$$

$$\gamma_2(t) = \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{\left(t^2 - 6\right)^2}{\left(t^2 + 3\right)^2}$$

Очевидно, что для всех компонент решения (3.6) существуют пределы

$$\lim_{t \to \pm\infty} p(t) = p^* = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{t \to \pm\infty} q(t) = q^* = 1, \quad \lim_{t \to \pm\infty} r(t) = r^* = 0$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1^* = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \to \pm\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2^* = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{t \to \pm\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3^* = 0$$

Таким образом, данное решение описывает случай такого движения гиростата, когда далекое прошлое и далекое будущее абсолютно симметричны. Система медленно “выходит” из неустойчивого по Ляпунову стационарного состояния $(p^*, q^*, r^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$, в котором находилась в бесконечно далеком прошлом (при $t \to -\infty$), совершает интенсивное движение в настоящем (на сравнительно коротком интервале времени вблизи $t = 0$), и медленно возвращается в то же самое неустойчивое стационарное состояние в бесконечно далеком будущем (при $t \to +\infty$). При этом постоянно действуют как момент потенциальных сил ($b \neq 0$), так и момент гироскопических сил ($k_1 \neq 0$), присутствует также постоянный гиростатический момент ($\lambda \neq 0$).

Отметим, что в отличие от классического случая Бобылева–Стеклова [1, 2] для тяжелого твердого тела, для гиростата при действии момента гироскопических сил (т.е. при $k_1 \neq 0$), уже не удается получить в утверждениях 2 и 3 семейство решений с произвольным $q_0 \neq 0$. Зато в них не требуется выполнения условия на моменты инерции $B = 2A$.

4. Построение решений методом Бобылева. В этом разделе для построения решений уравнений гиростата с моментом гироскопических сил (2.8), (2.9) применим подход, предложенный Д.К. Бобылевым [1] для уравнений тяжелого твердого тела и распространенный на гиростат (без момента гироскопических сил) П.В. Харламовым [9]). Будем, следуя [1], искать решение системы (2.8), (2.9) в виде

$$q(t) = q_0 = \text{const}, \quad r(t) = 0 \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в систему (2.9), придем к тождеству

$$(A - B)pq_0 + \lambda_1 q_0 - \lambda_2 p + b\gamma_1 + k_1 q_0 \gamma_1 \equiv 0$$

Отсюда находим

$$\gamma_1 = \frac{1}{b + k_1 q_0}[(\lambda_2 + (B - A)q_0)p - \lambda_1 q_0] \tag{4.2}$$

Из интеграла (2.10), используя равенства (4.1), получим

$$\gamma_2 = \frac{1}{2b}\left[c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right] \tag{4.3}$$

Первое уравнение системы (2.9) теперь записывается в виде

$$A\dot{p} = -b\gamma_3 = \mp b\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} = \mp b\sqrt{P_4(p)}, \tag{4.4}$$

где полином четвертой степени $P_4(p)$ записывается с учетом (4.2) и (4.3) так

$$P_4(p) = 1 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2 - \frac{1}{(b + k_1 q_0)^2}(((B - A)q_0 + \lambda_2)p - \lambda_1 q_0)^2$$

Однако пользоваться уравнением (4.4), которое сводится к обращению эллиптического интеграла, можно только при некоторых дополнительных условиях на параметры системы (2.9). Эти условия порождаются необходимостью соблюдения интеграла площадей (2.11). Подставляя γ_1, γ_2 из (4.2), (4.3) в интеграл (2.11) и учитывая (4.1), перепишем этот интеграл в виде полинома по степеням p следующим образом

$$J_2 = K_2 p^2 + K_1 p + K_0 \tag{4.5}$$

Здесь коэффициенты K_j полинома (4.5) задаются выражениями

$$K_2 = -\frac{A}{2b(b + k_1 q_0)}[b((2A - B)q_0 - \lambda_2) + k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2)]$$

$$K_1 = -\frac{\lambda_1}{b + k_1 q_0}[((2A - B)q_0 - \lambda_2)]$$

$$K_0 = -\frac{G}{2b(b + k_1 q_0)}$$

$$G = B^2 k_1 q_0^4 + \left(B^2 b + Bk_1\lambda_2\right)q_0^3 + (Bb\lambda_2 - Bc_1 k_1)q_0^2 + \left(2b\lambda_1^2 - Bbc_1 - c_1 k_1 \lambda_2\right)q_0 - bc_1\lambda_2$$

Чтобы полином (4.5) был интегралом, т.е. сохранял постоянное значение на любом решении $p(t)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты удовлетворяли равенствам $K_1 = 0$, $K_2 = 0$. Отсюда следует, что
либо

$$\begin{cases} (2A - B)q_0 - \lambda_2 = 0 \\ k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

либо

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ b((2A - B)q_0 - \lambda_2) + k_1 q_0 (Bq_0 + \lambda_2) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Используя три различных решения системы уравнений (4.6) на параметры, а также уравнение (4.4), приходим к справедливости следующих трех утверждений.

Утверждение 5. В случае $\lambda_2 = k_1 = 0$, $B = 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \text{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5); \qquad P_4(p) = 1 - \frac{q_0^2}{b^2}(Ap - \lambda_1)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2,$$

после чего $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь q_0 произвольное вещественное число.

Утверждение 6. В случае $k_1 = 0$, $B \neq 2A$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \lambda_2/(2A - B) = \text{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{\lambda_2^2}{b^2(2A - B)^2}(Ap - \lambda_1)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - \frac{B\lambda_2^2}{(2A - B)^2}\right)^2$. После чего функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь q_0 не произвольное, а фиксированное вещественное число.

Утверждение 7. В случае $\lambda_2 = 0$, $k_1 \neq 0$ система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = 0 = \text{const}$, $r(t) = 0$, $\gamma_1(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2\right)^2$. После чего функция $\gamma_2(t)$ определяется по формуле, (4.2), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\frac{A}{b}\dot{p}(t)$.

Утверждение 5 дает трехпараметрическое семейство решений (параметры q_0, c_1, c_5). Утверждения 6 и 7 дают двухпараметрические семейства решений (параметры c_1, c_5).

Используя решение системы уравнений (4.7) на параметры, а также уравнение (4.4), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 8. В случае $\lambda_1 = 0$, $k_1 \neq 0$, $D_2 = \left(b(2A - B) + k_1\lambda_2\right)^2 + 4Bbk_1\lambda_2 \geq 0$, система (2.8), (2.9) имеет семейство решений, для которых $q(t) = q_0 = \text{const}$, $r(t) = 0$, $p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P_4(p)}} = \mp \frac{b}{A}(t + c_5),$$

где $P_4(p) = 1 - \frac{1}{(b + k_1 q_0)^2}\left((B - A)q_0 + \lambda_2)p\right)^2 - \frac{1}{4b^2}\left(c_1 - Ap^2 - Bq_0^2\right)^2$. После чего функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ определяются по формулам (4.2), (4.3), а $\gamma_3(t)$ находится дифференцированием $\gamma_3(t) = -\dfrac{A}{b}\dot{p}(t)$. Здесь в качестве q_0 допускаются те из двух чисел $q_0^{\pm} = [-(b(2A-B)+k_1\lambda_2) \mp \sqrt{D_2}]/(2Bk_1)$, которые отличны от $\widehat{q_0} = -b/k_1$.

Утверждение 8 дает два двухпараметрических семейства решений (параметры c_1, c_5).

Тем самым установлено, что при условиях утверждений 5–8 упоминаемые в них решения системы (2.8), (2.9) выражаются эллиптическими функциями времени. Отметим, что условия утверждений 2 и 5 совпадают, поэтому они дают практически одно и то же семейство решений (кроме ситуации $q(t) = q_0 = 0$, не охватываемой утверждением 2). Для случая тяжелого твердого тела, когда дополнительно к условиям утверждений 2 и 5 будет и $\lambda_1 = 0$, методы Бобылева [1] и Стеклова [2] эквивалентны, поэтому в монографиях обычно излагают под общим названием "случай Бобылева–Стеклова" только какой-либо один из этих методов. В более общем случае гиростата с моментом гироскопических сил, когда $k_1 \neq 0$, как следует из утверждений 3, 4, 6, 7, 8 методы Стеклова и Бобылева не следуют один из другого и могут давать взаимодополняющие результаты. В частности, решения, полученные выше в примере 1 на основе утверждения 4, не могут быть получены из утверждений 5–8, так как в этом примере все параметры не нулевые.

Пример 2. Рассмотрим систему (2.8), (2.9) при следующих значениях параметров $B = A$, $\lambda_2 = 0$, $k_1 \neq 0$, $b > 0$ и будем искать решение на нулевом уровне интеграла энергии $c_1 = 0$, используя утверждение 7. Тогда получим выраженное через функции Якоби решение $q(t) = r(t) = \gamma_1(t) \equiv 0$, $p(t) = -\sqrt{\dfrac{2b}{A}}\,\mathrm{JacobiSN}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{Ab}}(t+c_5), \sqrt{-1}\right)$, $\gamma_2(t) = -\dfrac{A}{2b}p^2$, $\gamma_3(t) = -\dfrac{A}{2b}\dot{p}$. Отметим, что методом Стеклова это решение не находится, так как параметры не удовлетворяют системе (3.3).

5. Стационарные решения. Под стационарными решениями будем понимать такие постоянные $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3)$, которые обращают в нуль правые части системы (2.8), (2.9). Не останавливаясь на элементарном анализе получения таких решений, приведем шесть типов стационарных решений (в порядке возрастания количества ненулевых компонент), а также условия на параметры системы (2.8), (2.9), при которых эти решения имеют место.

а) При любых значениях параметров $A, B, C, \lambda_1, \lambda_2 k_1$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{p} = \overline{q} = \overline{r} = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{\gamma_2} = \sigma = \pm 1$$

б) При условии $\lambda_1 = 0$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{p} = \overline{r} = \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{\gamma_2} = \sigma = \pm 1; \quad \overline{q} \in R - \text{произвольно}$$

в) При условии $\lambda_2 \neq 0$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{q} = \overline{r} = \overline{\gamma_3} = \overline{\gamma_2} = 0, \quad \overline{\gamma_1} = \sigma = \pm 1, \quad \overline{p} = \frac{\sigma b}{\lambda_2}$$

г) При условиях $A \neq B$, $b(A-B) + k_1\lambda_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{b(A-B)+k_1\lambda_2}\right| < 1$ система (2.8), (2.9) имеет стационарное решение

$$\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{q} = \frac{\lambda_2}{A-B}, \quad \overline{\gamma_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{b(A-B)+k_1\lambda_2},$$

$$\overline{\gamma_2} = \sigma\sqrt{1-\overline{\gamma}_1^2}, \quad \sigma = \pm 1, \quad \overline{p} = \frac{\lambda_2}{(A-B)}\frac{\overline{\gamma_1}}{\overline{\gamma_2}}$$

д) При условиях $k_1 \neq 0$, $b(A-B)+k_1\lambda_2 \neq 0$ полагаем

$$\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0, \quad \overline{q} = -\frac{b}{k_1}, \quad \overline{p} = \frac{\lambda_1 b}{b(A-B)+k_1\lambda_2},$$

$$T = \frac{\lambda_1 k_1}{b(A-B)+k_1\lambda_2}, \quad \overline{\gamma_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{1+T^2}}, \quad \sigma = \pm 1, \quad \overline{\gamma_1} = -T\overline{\gamma_2}$$

В случаях а)–д) стационарные решения вычисляются через параметры по явным формулам.

е) При условии $\lambda_1 \neq 0$ стационарное решение строится следующим образом. Положим $\overline{r} = \overline{\gamma_3} = 0$, $\overline{q} \in R$ – произвольно, но $\overline{q} \neq \lambda_2/(A-B)$ и $\overline{q} \neq 0$. Далее вычислим $a_0 = \lambda_1\overline{q}/[(B-A)\overline{q}+\lambda_2]$, $a_1 = (b+k_1\overline{q})/[(B-A)\overline{q}+\lambda_2]$, и рассмотрим уравнение

$$z^2 + \frac{\overline{q}^2 z^2}{(a_0 + a_1 z)^2} = 1$$

Это уравнение всегда имеет либо 2, либо 4 вещественных корня, которые не превосходят 1 по модулю. Положим $\overline{\gamma_1} = z$ – любому из таких корней. После чего вычислим $\overline{p} = a_0 + a_1\overline{\gamma_1}$, $\overline{\gamma_2} = \frac{\overline{q}}{\overline{p}}\overline{\gamma_1}$. Компоненты стационара $\overline{\gamma_1}$, $\overline{p}$, $\overline{\gamma_2}$ получаются зависящими от выбора $\overline{q} \in R$. Таким образом, в случае е) у системы (2.8), (2.9) имеется континуум стационарных решений.

6. Анализ устойчивости стационарных решений. Для получения достаточных условий устойчивости стационарных решений воспользуемся методом интегральных связок, предложенным Н.Г. Четаевым [11]. Введем обозначения для отклонений от стационарного решения $(\overline{p},\overline{q},\overline{r},\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2,\overline{\gamma}_3)$

$$x_1 = p - \overline{p}, \quad x_2 = q - \overline{q}, \quad x_3 = r - \overline{r}$$

$$x_4 = \gamma_1 - \overline{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \overline{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \overline{\gamma}_3$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$J_1 - \overline{J}_1 = 2A\overline{p}x_1 + 2B\overline{q}x_2 + 2C\overline{r}x_3 + 2bx_5 + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} J_2 - \overline{J}_2 = {} & A\overline{\gamma}_1 x_1 + B\overline{\gamma}_2 x_2 + C\overline{\gamma}_3 x_3 + \\ & + (A\overline{p} + \lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1)x_4 + (B\overline{q} + \lambda_2)x_5 + (C\overline{r})x_6 + \\ & + Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}\left(k_1x_4^2\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$J_3 - \overline{J}_3 = 2\overline{\gamma}_1 x_4 + 2\overline{\gamma}_2 x_5 + 2\overline{\gamma}_3 x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \tag{6.3}$$

Здесь и далее через $\overline{J}_i$ обозначено значение интеграла J_i на стационарном решении.

Рассмотрим вначале условия устойчивости стационарных решений для случая а). Функцию Ляпунова строим в виде линейной связки (линейной комбинации) интегралов (6.1) и (6.3), которая для решений типа а) примет вид

$$V = \alpha_1\left(J_1 - \bar{J}_1\right) + \alpha_3\left(J_3 - \bar{J}_3\right) =$$
$$= \alpha_1\left(2bx_5 + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2\right) + \alpha_3\left(2\bar{\gamma}_2 x_5 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$$

Коэффициенты α_i, $i = 1,3$ с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -b\sigma$. Тогда получаем $V = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - b\sigma\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$. Для стационарного решения типа а), отвечающего условию $\sigma = -\mathrm{sign}(b)$, эта функция положительно определена. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 9. Соответствующее $\sigma = -\mathrm{sign}(b)$ стационарное решение типа а) устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим теперь вопрос о необходимых условиях устойчивости стационарных решений. Пусть Q есть 6×6 матрица линейной системы $\dot{x} = Qx$, получаемой линеаризацией системы (2.8), (2.9) в окрестности стационарного решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$. Эта матрица Q есть матрица Якоби, составленная из частных производных от правых частей (2.8), (2.9), вычисленных на стационарном решении $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$. Явный вид этой матрицы Q приводить не будем ввиду ее громоздкости. Характеристическое уравнение матрицы Q имеет вид $s^2\left(s^4 + q_1 s^2 + q_2\right) = 0$, где коэффициенты q_1 и q_2 зависят от параметров системы (2.8), (2.9) и выбранного стационарного решения.

Необходимые условия устойчивости стационарного решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ даются неравенствами $q_1 \ge 0$, $q_2 \ge 0$, $q_1^2 - 4q_2 \ge 0$. Если хотя бы одно из этих трех неравенств нарушено, то у характеристического уравнения имеется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, что по теореме Ляпунова влечет неустойчивость соответствующего решения.

Для стационарного решения типа а), отвечающего $\sigma = -\mathrm{sign}(b)$, необходимые условия устойчивости заведомо выполнены. Для стационарного решения типа а), отвечающего $\sigma = \mathrm{sign}(b)$, получаем следующие коэффициенты характеристического уравнения

$$q_1 = \frac{A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 - B|b|(A + C)}{ABC}, \quad q_2 = \frac{|b|\left(B|b| - \lambda_1^2\right)}{ABC}$$

Поэтому это стационарное решение будет неустойчивым при выполнении хотя бы одного из трех следующих неравенств

$$B|b| - \lambda_1^2 < 0, \quad A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 - B|b|(A + C) < 0$$

$$\left(A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2\right)^2 - 2B|b|\left(A(A - C)\lambda_1^2 + B(A + C)\lambda_2^2\right) + B^2b^2(A - C)^2 < 0$$

При $\lambda_1^2 > 0$ и малых $|b|$ будет выполняться первое неравенство, а при больших $|b|$ второе. В случае отсутствия гиростатического момента $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ выполняется второе неравенство. Однако нет никаких оснований утверждать, что соответствующее $\sigma = \mathrm{sign}(b)$ стационарное решение типа а) всегда (т.е. при любых значениях параметров) неустойчиво по линейному приближению. Например, для следующих значений параметров $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$, $b = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ при $\sigma = 1 = \operatorname{sign}(b)$ коэффициенты характеристического уравнения равны $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 1/12$ и оно не имеет корней с положительной вещественной частью.

Перейдем теперь к получению условий устойчивости стационарных решений $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3) = (0, \overline{q}, 0, 0, \overline{\gamma}_2, 0)$ типа б), предполагая, что $\lambda_1 = 0$.

Будем строить функцию Ляпунова по методу Четаева [11] в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения (6.1)–(6.3)

$$V = (J_1 - \overline{J}_1) + \alpha_2 (J_2 - \overline{J}_2) + \alpha_3 (J_3 - \overline{J}_3) + \beta_2 (J_2 - \overline{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \overline{J}_3)^2$$

Коэффициенты α_i, $i = 2,3$ с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\overline{q}}{\overline{\gamma}_2} = -2\sigma\overline{q}, \quad \alpha_3 = \overline{q}(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma$$

Тогда получаем

$$V = \left(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2\right) - 2\sigma\overline{q}\left(Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}k_1x_4^2\right) +$$
$$+ (\overline{q}(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma)\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) +$$
$$+ \beta_2 (B\overline{\gamma}_2 x_2 + (B\overline{q} + \lambda_2) x_5)^2 + \beta_3 (2\overline{\gamma}_2 x_5)^2 + o\left(\|x\|^2\right)$$

Для положительной определенности квадратичной части $V_2 = V - o\left(\|x\|^2\right)$ интеграла V при достаточно больших $\beta_i > 0$ необходимо и достаточно [16], чтобы V_2 была положительно определенной на множестве $\Theta = \{B\overline{\gamma}_2 x_2 + (B\overline{q} + \lambda_2) x_5 = 0,\ 2\overline{\gamma}_2 x_5 = 0\}$. На этом множестве Θ получаем

$$V_2 = Ax_1^2 - 2\sigma\overline{q}Ax_1x_4 + (-\sigma\overline{q}k_1 + \overline{q}(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma)x_4^2 +$$
$$+ Cx_3^2 - 2\sigma\overline{q}Cx_3x_6 + (\overline{q}(B\overline{q} + \lambda_2) - b\sigma)x_6^2$$

Применяя критерий Сильвестра к двум квадратичным формам, из суммы которых состоит V_2, получаем условия положительной определенности интеграла V:

$$\Delta_1 = (B - A)\overline{q}^2 + \overline{q}(\lambda_2 - k_1\sigma) - b\sigma > 0, \quad \Delta_2 = (B - C)\overline{q}^2 + \overline{q}\lambda_2 - b\sigma > 0 \qquad (6.4)$$

Из теоремы Ляпунова теперь следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 10. Каждое стационарное решение $(0, \overline{q}, 0, 0, \overline{\gamma}_2, 0)$ типа б), для которого выполнены неравенства (6.4), является устойчивым в смысле Ляпунова.

Отметим, что нарушение условий (6.4) еще не означает, что соответствующее стационарное решение будет неустойчиво, поскольку условия (6.4) являются только достаточными. Чтобы сравнить достаточные условия устойчивости (6.4) с необходимыми отметим, что для стационара типа б) неравенство $q_2 \geq 0$ для коэффициента характеристического уравнения $s^2\left(s^4 + q_1s^2 + q_2\right) = 0$ выражается следующим образом $q_2 = \Delta_1\Delta_2/AC \geq 0$.

Аналогично доказательству утверждения 10 методом Н.Г. Четаева доказываются следующие утверждения.

Утверждение 11. Каждое стационарное решение $(\overline{p}, 0, 0, \overline{\gamma}_1, 0, 0)$ типа в), для которого выполнены неравенства

$$(A - C)\frac{b^2}{\lambda_2^2} + \frac{b(\sigma\lambda_1 + k_1)}{\lambda_2} > 0, \quad (A - B)\frac{b^2}{\lambda_2^2} + \frac{b(\sigma\lambda_1 + k_1)}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2^2}{A} > 0$$

является устойчивым в смысле Ляпунова.

Утверждение 12. Каждое стационарное решение $(\overline{p}, \overline{q}, 0, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, 0)$ типов г)–е), для которого выполнены неравенства

$$\begin{gathered}(A - C)\,\overline{p}^2 + \overline{p}(\lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1) > 0,\\
3A^2\overline{p}^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 - AB\overline{p}\overline{\gamma}_1^4 - 4AB\overline{p}^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 - AB\overline{p}^2\overline{\gamma}_2^4 - 4AB\overline{p}\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 +\\
+ 3Ak_1\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 + 2B^2\overline{p}\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + B^2\overline{q}^2\overline{\gamma}_1^4 - 2Bk_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 - Bk_1\overline{p}\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2^4 -\\
- 2Bk_1\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2 + k_1^2\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2^2 - 4A\lambda_2\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + 4A\lambda_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + 2B\lambda_2\overline{p}\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 -\\
- 2B\lambda_1\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + 2B\lambda_2\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^4 - 2B\lambda_1\overline{q}\,\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 - 2k_1\lambda_2\overline{\gamma}_1^4\overline{\gamma}_2 + 2k_1\lambda_1\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2^2 +\\
+ A\overline{p}\overline{\gamma}_1^4 + A\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + B\overline{p}\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 + B\overline{p}\overline{\gamma}_2^4 + \lambda_2^2\overline{\gamma}_1^4 - 2\lambda_1\lambda_2\overline{\gamma}_1^3\overline{\gamma}_2 + \lambda_1^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_2^2 > 0\end{gathered}$$

является устойчивым в смысле Ляпунова.

Замечание. Второе неравенство в условиях утверждения 12 заведомо будет выполнено для тех стационарных решений типов г)–е), для которых выполняются неравенства $A\overline{p}\lambda_1 > 0, (A - B)\,\overline{p}^2 + \overline{p}(\lambda_1 + k_1\overline{\gamma}_1) > 0$.

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с (2.8), (2.9) систему уравнений (2.7), (2.8), где дополнительно присутствует момент циркулярно-гироскопических сил, а параметры удовлетворяют условиям

$$a = c = k_2 = k_3 = \lambda_3 = 0$$

Будем обозначать составленную таким образом систему как систему (2.7а), (2.8). Из утверждения 1 следует, что система (2.7а), (2.8) имеет те же самые первые интегралы (6.1)–(6.3), что и система (2.8), (2.9). Очевидно также, что (2.7а), (2.8) имеет те же стационарные решения типов а)–е) при условиях, указанных в разд. 5. Поэтому утверждения 9–12 справедливы и для более общей системы (2.7а), (2.8).

Заключение. В заключение обсудим кратко возможные направления дальнейшего развития результатов статьи. Полезно выяснить существование аналогов случая Бобылева–Стеклова для нелинейного потенциала $U(\gamma_2)$, заданного аналитической функцией. Также целесообразно, рассматривая момент $L(t, \gamma, \omega)\,\omega \times \gamma$ как управляющее воздействие, сохраняющее первые интегралы, выяснить, какие дополнительные динамические свойства можно обеспечить за счет выбора такого управления. Выявлен ряд стационарных решений и проведен анализ их устойчивости методом Четаева. Было бы интересно расширить перечень стационарных движений и провести более полный их анализ, аналогично тому, как это сделано в работах [17–19] для гиростата с одними потенциальными силами или методом Рауса [20] для твердого тела в случае Гесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (Сообщено в заседании С.-Петерб. мат. об-ва 1893 г. 15 февр.) // в кн.: *Бобылев Д.* М.: тип. М.Г. Волчанинова, 1896. 13 с.

2. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. (Сообщ. в заседании Харьк. мат. об-ва 5 марта 1893 г.) // в кн.: *Стеклов В.* Сочинения. М.: тип. М.Г. Волчанинова, 1896. 9 с.
3. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
4. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
6. *Горр Г.В.* Об асимптотических движениях тяжелого твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 4. С. 651–661.
7. *Бардин Б.С.* Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелин. дин. 2009. Т. 5. № 4. С. 535–550.
8. *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Изд-во МАИ, 2020. 257 с.
9. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 4. С. 759–760.
10. *Макеев Н.Н.* Интегралы геометрической теории динамики гиростата // Вестн. Перм. унив. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 2(10). С. 26–35.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Изв. РАН. МТТ. 2017. Вып. 47. С. 12–24.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyp. Math. Soc. 2017. V. 25. P. 216–219.
14. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьют. исслед. моделир. 2018. Т. 10. № 1. С. 7–25.
15. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom. 2022. V. 430. P. 133103.
16. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
17. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal.&Appl. 2013. V. 401. P. 836–849.
18. *de Bustos Muñoz M.T., Guirao J.L.G., Vera López J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory Dyn. Syst. 2015. V. 14. № 2. P. 265–280.
19. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math.&Comput. 2017. V. 293. P. 404–415.
20. *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 28–37.

On Analogues of the Bobylev–Steklov Case for a Gyrostat under the Action of a Moment of Gyroscopic Forces

A. A. Kosov[a,#]

[a] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia*
[#] *e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

The article studies the equations of motion of a gyrostat around a fixed point under the action of a moment of gyroscopic forces. Analogues of the Bobylev–Steklov case are obtained, it is shown that, unlike the classical case of a rigid body, the approaches of Bobylev and Steklov are not equivalent and can give complementary results. Conditions are found under which parametric families of particular solutions expressed by elliptic functions are constructed. Six types of stationary solutions are singled out, and the conditions for their stability are obtained by the method of Chetaev's integral connections.

Keywords: gyrostat, Bobylev–Steklov case, parametric families of partial solutions, stationary solutions, stability

REFERENCES

1. *Bobylev D.K.* On a particular solution of the differential equations of rotation of a heavy solid body around a fixed point (Rep. in the session of St. Petersburg. Mat. Soc. 1893, February 15) // in: *Bobylev D.* Moscow: typ. M.G. Volchaninov, 1896. 13 p.
2. *Steklov V.A.* One case of motion of a heavy solid body having a fixed point Rep. in the meeting of Kharkiv. Mat. Soc. on March 5, 1893] // in: *Steklov V.* Moscow: typ. M.G. Volchaninov, 1896. 9 p.
3. *Golubev V.V.* Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Israel: Israeli Program for Scientific Translations, 1960. 287 p.
4. *Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems in the Dynamics of Rigid Body. Kiev: Naukova Dumka, 2012. 401 p. (in Russian).
5. *Borisov A., Mamaev I.* Rigid Body Dynamics. Moscow;Izhevsk: R&C Dyn., 2001 (in Russian).
6. *Gorr G.V.* On asymptotic motions of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 4, pp. 651–661.
7. *Bardin B.S.* On orbital stability of pendulum like of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2009, vol. 5, no. 4, pp. 535–550.
8. *Bardin B.S., Kuleshov A.S.* Kovacic Algorithm and Its Application in Problems of Classical Mechanics. Moscow: MAI, 2020. 257 p. (in Russian).
9. *Kharlamov P.V.* A case of integration of the equations of motion of a heavy rigid body having its cavities filled with a liquid // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1963, vol. 150, no. 4, pp. 759–760.
10. *Makeyev N.N.* Integrals of the geometrical theory of a dynamics gyrostat // Perm Univ. Bull. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 2012, iss. 2(10). pp. 26–35.
11. *Chetayev N.* The Stability of Motion. N.Y.: Pergamon Press, 1961.
12. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On solutions of the equations of motion of a rigid body in the potential force field in the case of constant modulus of the kinetic moment // Mech. Solids, 2017, vol. 47, pp. 12–24.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyp. Math. Soc., 2017, vol. 25, pp. 216–219.
14. *Zyza A.V.* Computer studies of polynomial solutions for gyrostat dynamics // Comput. Res.&Model., 2018, vol. 10, no. 1, pp. 7–25.
15. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom., 2022, vol. 430, pp. 133103.
16. *Rubanovskii V.N., Samsonov V.A.* Stability of Steady Motions in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian).
17. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal.&Appl., 2013, vol. 401, pp. 836–849.
18. *de Bustos Muñoz M.T., Guirao J. L.G., Vera López J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory of Dyn. Syst., 2015, vol. 14, no. 2, pp. 265–280.
19. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math.&Comput., 2017, vol. 293, pp. 404–415.
20. *Novikov M.A.* On Stationary motions of a rigid body under the partial Hess integral existence // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 262–270.