ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2022, том 86, № 4, с. 470–476

УДК 539.3

О СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В МАЛОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. А. Еремеев[1,2,*]

[1] *Университет Кальяри, Кальяри, Италия*

[2] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: eremeyev.victor@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.
После доработки 06.05.2022 г.
Принята к публикации 18.05.2022 г.

В рамках нелинейной градиентной теории упругости третьего порядка сформулированы достаточные условия устойчивости в малом аффинной деформации для краевых условий типа Дирихле. Условия состоят в выполнении трех неравенств, связанных с сильной эллиптичностью уравнений равновесия.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, сильная эллиптичность, устойчивость в малом

DOI: 10.31857/S0032823522040063

1. Введение. Модель градиентной теории упругости основана на предположении о зависимости плотности энергии деформации не только от градиента деформации, фактически первого градиента вектора перемещений, как в случае так называемых простых материалов или материалов в смысле Коши, но и от следующих градиентов деформаций [1–3]. В настоящее время этот подход получил распространение для моделирования некоторых композиционных материалов с существенными различиями в механических свойствах их компонент [4], а также для описания масштабных эффектов на наноуровне [5, 6]. Нужно отметить, что используются не только модели Тупина–Миндлина [7–10] или Айфантиса [6, 11], в которых предполагается зависимость энергии деформации от первого и второго градиентов перемещений, но и более сложные модели, учитывающие градиенты более высоких порядков [1, 12–15]. В частности, градиентная теория упругости третьего порядка допускает в уравнениях состояния градиенты перемещений до третьего порядка включительно. Миндлин [12] использовал эту модель для описания поверхностных напряжений в твердых телах, см. также [14, 15], где рассматриваются вопросы термоупругости и введено понятие группы симметрии.

Рассматривая уравнения равновесия градиентно-упругого материала, можно привлечь для анализа свойств их решений условие сильной эллиптичности, которое является наиболее употребительным определяющим неравенством в нелинейной теории упругости [16, 17]. В частности, для простых материалов установлена связь условия сильной эллиптичности и устойчивости в малом. В случае градиентных моделей материала эта связь, вообще говоря, является более сложной, см. [18].

Целью данной работы является анализ связи условий сильной эллиптичности и устойчивости в малом в рамках модели градиентно-упругого континуума третьего порядка при конечных деформациях. Отметим, что в дальнейшем будут использоваться обозначения прямого (безиндексного) тензорного исчисления [16, 19].

2. Основные соотношения. Пусть B — ограниченное упругое тело, которое занимает в отсчетной конфигурации объем V с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial B$. В качестве модели материала воспользуемся уравнениями градиентного упругого тела третьего порядка [12, 14, 15]. В рамках этой модели плотность потенциальной энергии деформации представляется как функция градиентов деформации

$$W = W(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}), \quad \mathbf{F} = \nabla\mathbf{x}, \quad \mathbf{G} = \nabla\mathbf{F}, \quad \mathbf{H} = \nabla\mathbf{G}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{F}$ — градиент деформации, ∇ — трехмерный набла-оператор в отсчетной конфигурации, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ — соответственно второй и третий градиенты деформации, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор места в актуальной конфигурации. С использованием принципа материальной индифферентности [16, 19] функция W приводится к виду [15]

$$W = W(\mathbf{C},\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{G}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{H}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{C}$ — мера деформации Коши–Грина, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ — лагранжевы меры деформации, которые представляют собой соответственно тензоры третьего и четвертого рангов.

В отсутствие массовых сил уравнения равновесия в метрике отсчетной конфигурации принимают вид

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = 0, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений типа Пиолы, который дается формулами

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \nabla\cdot\mathbf{P}_1 + \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_2) \tag{2.4}$$

В (2.4) $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — тензоры напряжений и гипернапряжений типа Пиолы, причем два последних являются тензорами третьего и четвертого ранга. Эти тензоры выражается через плотность энергии деформации формулами

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{G}}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{\partial W}{\partial\mathbf{H}} \tag{2.5}$$

В дальнейшем для простоты выкладок вместо (2.2) будем рассматривать энергию деформации в форме (2.1). Также ограничимся рассмотрением первой краевой задачи — на границе S предполагаются заданными перемещения и нормальные производные

Уравнение (2.3) представляет собой систему трех скалярных уравнений в частных производных шестого порядка относительно вектора места $\mathbf{x}$. Условие равномерной сильной эллиптичности (SE) для этой системы может быть записано следующим образом

$$(\mathbf{kkka}) :: \frac{\partial^2 W}{\partial\mathbf{H}^2} :: (\mathbf{kkka}) \geq C|\mathbf{k}|^6|\mathbf{a}|^2, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$ — произвольные векторы, C — положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$, “:” — двойное скалярное произведение [19].

Отметим, что (2.6) не налагает требований на зависимость W от $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$. Представим зависимость (2.1) следующим образом

$$W \equiv W(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}) = W_1(\mathbf{F},\mathbf{G}) + W_2(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$$

где

$$W_1(\mathbf{F},\mathbf{G}) = W(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})\big|_{\mathbf{H}=0}, \quad W_2(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}) = W(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}) - W_1(\mathbf{F},\mathbf{G})$$

Здесь и далее $\mathbf{0}$ – нулевой вектор или тензор произвольного ранга. Таким образом, имеем $W_2(\mathbf{F},\mathbf{G},0)=0$. В дополнение примем естественное предположение, что

$$\left.\frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{H}}\right|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} = 0,$$

которое в силу (2.5) означает, что соответствующий тензор гипернапряжений обращается в нуль, если $\mathbf{H} = \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$.

С функцией $W_1(\mathbf{F},\mathbf{G})$ поступим аналогично, представим в виде суммы

$$\begin{gathered} W_1(\mathbf{F},\mathbf{G}) = U(\mathbf{F}) + V(\mathbf{F},\mathbf{G}) \\ U(\mathbf{F}) = \left.W_1(\mathbf{F},\mathbf{G})\right|_{\mathbf{G}=\mathbf{0}}, \quad V(\mathbf{F},\mathbf{G}) = W_1(\mathbf{F},\mathbf{G}) - U(\mathbf{F}) \end{gathered} \tag{2.7}$$

При этом также примем предположение об отсутствии гипернапряжений $\mathbf{P}_1$, если второй градиент деформации обращается в нуль:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{G}}\right|_{\mathbf{G}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

Таким образом, приходим к представлению энергии деформации градиентно-упругого материала третьего порядка в виде суммы

$$W = U(\mathbf{F}) + V(\mathbf{F},\mathbf{G}) + W_2(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}) \tag{2.8}$$

Уравнение состояния (2.7) можно рассматривать как градиентную регуляризацию простого нелинейно-упругого материала с энергией деформации U. Тогда, в свою очередь, определяющие соотношения (2.8) представляют собой следующую градиентную регуляризацию градиентно-упругого материала первого порядка с энергией деформации W_1.

Другими словами, наряду с градиентно-упругим материалом третьего порядка можно рассматривать два других материала – простой нелинейно упругий материал с энергией деформации U и градиентно-упругий материал с уравнением состояния W_1. Для каждого из этих материалов можно сформулировать условия сильной эллиптичности

$$(\mathbf{kka}) \,\vdots\, \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{G}^2} \,\vdots\, (\mathbf{kka}) \ge C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2 \tag{2.9}$$

$$(\mathbf{ka}) : \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{H}^2} : (\mathbf{ka}) \ge C_2 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2, \tag{2.10}$$

где “$\vdots$” – тройное произведение [19], C_1 и C_2 – положительные постоянные.

Для краткости назовем неравенства (2.9) и (2.10) соответственно условиями сильной эллиптичности первого (SE1) и нулевого (SE0) порядков.

3. Устойчивость в малом. Пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ – некоторое решение нелинейной краевой задачи. Его устойчивость в малом можно исследовать методом линеаризации [16, 17]. Рассмотрим малое добавочное перемещение $\mathbf{w}$, так что возмущенное решение можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \tau\mathbf{w},$$

где τ – малый параметр. Следуя [16, 17], будем говорить, что решение $\tilde{\mathbf{x}}$ устойчиво в малом, если вторая вариация функционала полной энергии положительна для любых $\mathbf{w} \ne 0$

$$\delta^2 E > 0$$

$$E = \iiint\limits_V W\,dV, \quad \delta^2 E = \iiint\limits_V w\,dV \tag{3.1}$$

$$w = \frac{d^2}{d\tau^2} W\left(\tilde{\mathbf{F}} + \tau\nabla\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{G}} + \tau\nabla\nabla\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{H}} + \tau\nabla\nabla\nabla\mathbf{w}\right)\Big|_{\tau=0},$$

где $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{G}} = \nabla\tilde{\mathbf{F}}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \nabla\tilde{\mathbf{G}}$.

Равенство $\delta^2 E = 0$ для каких-то векторов $\mathbf{w}$, не равных нулю, означает существование нетривиальных решений линеаризованной краевой задачи и соответствует бифуркации равновесия.

4. Устойчивость в малом аффинной деформации. Назовем деформацию аффинной, если $\mathbf{C} = \mathbf{const}$, а $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ обращаются в нуль. С учетом принятых предположений относительно формы W это означает, что для аффинной деформации гипернапряжения отсутствуют: $\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$.

Пусть решение $\tilde{\mathbf{x}}$ соответствует аффинной деформации. Тогда можно показать, что функцию w можно представить в виде

$$2w = \nabla\mathbf{w} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{w} + \nabla\nabla\mathbf{w} \,\vdots\, \mathbf{D} \,\vdots\, \nabla\nabla\mathbf{w} + \nabla\nabla\nabla\mathbf{w} :: \mathbf{E} :: \nabla\nabla\nabla\mathbf{w},$$

где $\mathbf{C}, \mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ – тензоры касательных модулей, которые даются формулами

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{F}^2}\bigg|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{G}^2}\bigg|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{G}=\tilde{\mathbf{G}}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{H}^2}\bigg|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{G}=\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{H}=\tilde{\mathbf{H}}}$$

Неравенства сильной эллиптичности (2.6), (2.9) и (2.10) сводятся к соотношениям для $\mathbf{C}, \mathbf{D}$, $\mathbf{E}$

$$(\mathbf{kkka}) :: \mathbf{E} :: (\mathbf{kkka}) \geq C|\mathbf{k}|^6 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.1}$$

$$(\mathbf{kka}) \,\vdots\, \mathbf{D} \,\vdots\, (\mathbf{kka}) \geq C_1|\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.2}$$

$$(\mathbf{ka}) : \mathbf{C} : (\mathbf{ka}) \geq C_2|\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.3}$$

Используя подход [16, 18], можно показать, что выполнение всех условий эллиптичности (4.1)–(4.3) влечет положительность второй вариации потенциальной энергии деформации (3.1), т.е. устойчивость в малом. Действительно, с использованием преобразования Фурье и теоремы Планшереля для произвольного вектора $\mathbf{w}$, обращающегося в нуль на границе вместе со своими первой и второй нормальной производными,

$$\mathbf{w}\big|_S = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n}\bigg|_S = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial n^2}\bigg|_S = \mathbf{0},$$

получаем серию формул

$$\delta^2 E = \iiint\limits_V w\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\nabla\mathbf{w} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{w} + \nabla\nabla\mathbf{w} \,\vdots\, \mathbf{D} \,\vdots\, \nabla\nabla\mathbf{w} + \nabla\nabla\nabla\mathbf{w} :: \mathbf{E} :: \nabla\nabla\nabla\mathbf{w})dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(\mathbf{ka}) : \mathbf{C} : (\mathbf{ka}) + (\mathbf{kka}) \,\vdots\, \mathbf{D} \,\vdots\, (\mathbf{kka}) + (\mathbf{kkka}) :: \mathbf{E} :: (\mathbf{kkka})]dV_k \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[C_2|\mathbf{k}|^2 + C_1|\mathbf{k}|^4 + C|\mathbf{k}|^6\right]|\mathbf{a}|^2\,dV_k =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left[C_2|\nabla\mathbf{w}|^2 + C_1|\nabla\nabla\mathbf{w}|^2 + C|\nabla\nabla\nabla\mathbf{w}|^2\right]dV,$$

из которых следует положительная определенность второй вариации функционала энергии.

Таким образом, в отличие от нелинейной теории упругости простых материалов [16, 17], одного условия сильной эллиптичности (2.6) недостаточно для устойчивости в малом аффинной деформации. В совокупности неравенства (2.6), (2.9) и (2.10) представляют собой достаточные условия устойчивости в малом в случае первой краевой задачи.

Заключение. В рамках градиентной теории упругости третьего порядка при конечных деформациях показано, что сильная эллиптичность (2.6) вместе с неравенствами сильной эллиптичности нулевого и первого порядков являются достаточными условиями устойчивости аффинной деформации в случае первой краевой задачи. Можно также показать, что устойчивость в малом влечет выполнение слабой формы неравенства (2.6), т.е. при $C = 0$. Нарушение условий (2.9) и (2.10), вообще говоря, может приводить к неустойчивости в малом и будет более подробно рассмотрено в последующих работах.

Автор благодарен академику Н.Ф. Морозову за привлечение внимания автора к задачам наномеханики, которые являются широким полем приложения обобщенных моделей сплошной среды, и, в частности, градиентной теории упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 20-08-00450.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials. 4th edition. Berlin: Springer Nature, 2021. 410 p.
2. Mechanics of Strain Gradient Materials. Ser. CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 600 / Ed. by *Bertram A., Forest S.* Cham: Springer, 2020.VIII+171 p.
3. *dell'Isola F., Corte A.D., Giorgio I.* Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives // Math.&Mech. Solids. 2017. V. 22. № 4. P. 852–872.
4. Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials / Ed by *dell'Isola F., Steigmann D.J.* Cambridge: Univ. Press, 2020. 398 p.
5. *Cordero N.M., Forest S., Busso E.P.* Second strain gradient elasticity of nano-objects // J. Mech.&Phys. Solids. 2016. V. 97. P. 92–124.
6. *Aifantis E.C.* Internal length gradient (ILG) material mechanics across scales and disciplines // Adv. in Appl. Mech. 2016. V. 49. P. 1–110.
7. *Toupin R.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. for Rational Mech.&Anal. 1962. V. 11. № 1. P. 385–414.
8. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. for Rational Mech.&Anal. 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
9. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. for Rational Mech.&Anal. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
10. *Mindlin R.D., Eshel N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // Int. J. Solids&Struct. 1968. V. 4. № 1. P. 109–124.
11. *Aifantis E.C.* Update on a class of gradient theories // Mech. Mater. 2003. V. 35. № 3–6. P. 259–280.
12. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids&Struct. 1965. V. 1. № 4. P. 417–438.
13. *dell'Isola F., Seppecher P., Madeo A.* How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in Nth gradient continua: approach "à la D'Alembert"// Z. Angew. Math. Phys. 2012. V. 63. P. 1119–1141.
14. *Reiher J.C., Bertram A.* Finite third-order gradient elasticity and thermoelasticity// J. Elasticity. 2018. V. 133 № 2. P. 223–252.

15. *Eremeyev V.A.* Local material symmetry group for first-and second-order strain gradient fluids // Math.&Mech. Solids. 2021. V. 26. № 8. P. 1173–1190.
16. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.
17. *Ogden R.W.* Non-Linear Elastic Deformations. Mineola: Dover, 1997. 532 p.
18. *Eremeyev V.A.* Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity // Mech. Res. Comm, 2021. V. 117, art no. 103782.
19. *Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P.* Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics. New Jersey: World Scientific, 2018. 498 p.

On Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nonlinear Strain Gradient Elasticity of Third Order

V. A. Eremeyev[a,b,#]

[a] *University of Cagliari, Cagliari, Italy*
[b] *Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia*
[#]*e-mail eremeyev.victor@gmail.com*

Within the framework of the nonlinear second strain gradient elasticity, we formulate sufficient conditions for infinitesimal stability of affine deformations under Dirichlet-type boundary conditions. The conditions consist of three inequalities related to strong ellipticity of equations of equilibrium.

Keywords: gradient theory of elasticity, strong ellipticity, infinitesimal stability

REFERENCES

1. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials. Berlin: Springer Nature, 2021. 410 p.
2. Mechanics of Strain Gradient Materials. Ser. CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 600 / Ed. by *Bertram A., Forest S.* Cham: Springer, 2020.VIII+171 p.
3. *dell'Isola F., Corte A.D., Giorgio I.* Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives// Math.&Mech. Solids, 2017, vol. 22. no. 4. pp. 852–872.
4. Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials / Ed. by *dell'Isola F., Steigmann D.J.* Cambridge: Univ. Press, 2020. 398 p.
5. *Cordero N.M., Forest S., Busso E.P.* Second strain gradient elasticity of nano-objects // J. Mech.&Phys. Solids, 2016, vol. 97, pp. 92–124.
6. *Aifantis E.C.* Internal length gradient (ILG) material mechanics across scales and disciplines // Adv. in Appl. Mech., 2016, vol. 49, pp. 1–110.
7. *Toupin R.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. for Rational Mech.&Anal., 1962, vol. 11, no. 1, pp. 385–414.
8. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. for Rational Mech.&Anal., 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85–112.
9. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. for Rational Mech.&Anal., 1964, vol. 16, no. 1, pp. 51–78.
10. *Mindlin R.D., Eshel N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // Int. J. Solids&Struct., 1968, vol. 4, no. 1, pp. 109–124.
11. *Aifantis E.C.* Update on a class of gradient theories// Mech. Mater., 2003, vol. 35, no. 3–6, pp. 259–280.
12. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids&Struct., 1965, vol. 1, no. 4, pp. 417–438.
13. *dell'Isola F., Seppecher P., Madeo A.* How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in Nth gradient continua: approach "à la D'Alembert" // Z. Angew. Math. Phys., 2012, vol. 63, pp. 1119–1141.

14. *Reiher J.C., Bertram A.* Finite third-order gradient elasticity and thermoelasticity // J. Elasticity, 2018, vol. 133, no. 2, pp. 223–252.
15. *Eremeyev V.A.* Local material symmetry group for first-and second-order strain gradient fluids // Math.&Mech. Solids, 2021, vol. 26, no. 8, pp. 1173–1190.
16. *Lurie A.I.* Non-Linear Theory of Elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.
17. *Ogden R.W.* Non-Linear Elastic Deformations. Mineola: Dover, 1997. 532 p.
18. *Eremeyev V.A.* Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity // Mech. Res. Comm., 2021, vol. 117, art no. 103782.
19. *Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P.* Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics. New Jersey: World Scientific, 2018. 498 p.